Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Бересневич, Э. И. Ковалевская, О диофантовых приближениях зависимых величин в p -адическом случае, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 22–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 10:50:56

УДК 511.36

О ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН В p -АДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В. В. Бересневич, Э. И. Ковалевская

В настоящей работе мы доказываем аналог метрической теоремы Хинчина для случая линейных диофантовых приближений плоских кривых, заданных над кольцом целых p -адических чисел с помощью нормальных (по Малеру) функций. Также доказываем некоторые общие утверждения, которые необходимы для обобщения этого результата на случай пространств большей размерности.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. В 1924 году Хинчин [1] доказал, что для почти всех действительных чисел x (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}$) неравенство $|qx - p| < \psi(q)$ имеет конечное либо бесконечное число решений $p, q \in \mathbb{Z}$, если соответственно сходится или расходится ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \psi(h)$, где $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ монотонно убывает.

Метрическая теория диофантовых приближений зависимых величин начала развиваться с работы К. Малера [2] 1932 года, в которой он, проводя классификацию действительных чисел, доказал, что при любом $w > 4n$ для почти всех чисел $x \in \mathbb{R}$ неравенство $|P(x)| < H(P)^{-w}$ имеет конечное число решений $P \in P_n$, где P_n – множество многочленов с целыми коэффициентами степени не выше n , $H(P)$ обозначает высоту многочлена P . В той же работе Малер предположил, что ограничение на w может быть ослаблено до $w > n$. Последовательные продвижения в решении проблемы Малера делали Дж. Коксма, В. Левек, Й. Кубилюс, Ф. Каш, Б. Фолькман и В. Шмидт. В 1964 году В. Г. Спринджук дал полное решение проблемы Малера [3], а также рассмотрел комплексный случай и аналоги для p -адических чисел и формальных степенных рядов. В 1966 году А. Бейкер высказал гипотезу о том, что в теореме Спринджука в правой части неравенства можно ставить функцию $\psi(H(P))$, где $\psi(h)$ – монотонно убывающая последовательность положительных чисел такая, что сходится ряд

$$\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1} \psi(h). \quad (1)$$

Гипотеза Бейкера была доказана В. И. Берником [4] в 1989 году. Предполагалось, что условие сходимости ряда (1) является не только достаточным, но и необходимым. Это было доказано в работе [5]. В ней был предложен новый метод, основанный на понятии регулярной системы точек. В настоящей работе мы переносим его на p -адический случай.

В последнее время было получено значительное продвижение в исследованиях диофантовых свойств дифференцируемых подмногообразий евклидова пространства. Со многими результатами можно ознакомиться по [3], [6]–[9].

В то время, как метрическая теория диофантовых приближений хорошо развита для поля действительных чисел, таких исследований в поле p -адических чисел проведено мало. В настоящей работе мы доказываем аналог теоремы Хинчина в случае линейных диофантовых приближений плоских кривых, заданных над кольцом целых p -адических чисел.

Всюду в дальнейшем мы используем следующие обозначения. Простое число $p \geq 2$ фиксировано, $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел, $\mathbb{Z}_p$ – кольцо целых p -адических чисел, $|x|_p$ – p -адическая норма $x \in \mathbb{Q}_p$, множество $K(\alpha, r) = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x - \alpha|_p < r\}$ называют *кругом* (диском или элементарным цилиндром) в $\mathbb{Z}_p$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $\alpha \in \mathbb{Z}_p$.

Известно, что поле $\mathbb{Q}_p$ является локально компактным, и на нем можно ввести меру Хаара, обозначаемую через μ и нормированную так, что $\mu\mathbb{Z}_p = p$. Конструкция и свойства этой меры описаны в [3, с. 69–76].

Согласно Малеру [10] функция $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ называется *нормальной*, если она имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - \alpha)^n,$$

где $|\alpha|_p \leq 1$, $|\alpha_n|_p \leq 1$ для всех n и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n|_p = 0.$$

Производные $f^{(k)}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) также являются нормальными функциями. Кроме того, для нормальной над $\mathbb{Z}_p$ функции имеет место разложение в ряд Тейлора [11], что не верно для произвольной p -адической функции [12, с. 223]. Отметим, что класс нормальных функций достаточно широк: если $g(x)$ – произвольная голоморфная функция p -адической переменной, то существуют целые рациональные числа s и t такие, что $p^s g(p^t x)$ – нормальная функция.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ – нормальная функция такая, что $f''(x) \neq 0$ почти всюду (в смысле меры Хаара) в $\mathbb{Z}_p$, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ монотонно убывает. Пусть $\mathcal{L}_f(\psi)$ – множество точек $x \in \mathbb{Z}_p$ таких, что неравенство

$$|a_2 f(x) + a_1 x + a_0|_p < \psi(h), \quad (2)$$

где $h = \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|\}$, имеет бесконечное число решений $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^3$. Тогда

$$\mu\mathcal{L}_f(\psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{h=1}^{\infty} h^2 \psi(h) < \infty, \\ p, & \text{если } \sum_{h=1}^{\infty} h^2 \psi(h) = \infty. \end{cases}$$

Эта теорема усиливает результат Мельничука [13], у которого в правой части неравенства (2) стоит величина $h^{-3-\varepsilon}$ с произвольным $\varepsilon > 0$. Отметим, что условие на f''

равносильно тому, что кривизна кривой $(x, f(x))$ отлична от нуля почти всюду в $\mathbb{Z}_p$. Аналог теоремы 1 в действительном случае доказан в [14], [15]. Если в неравенстве (2) вместо линейной формы $a_2 f(x) + a_1 x + a_0$ стоит многочлен с целыми коэффициентами степени не выше n , h обозначает его высоту, а ψ такова, что ряд (1) сходится, то соответствующая теорема доказана в [16]. Используя результаты данной работы, можно также рассмотреть случай расходимости и в этой теореме.

Случай сходимости в теореме 1 впервые был доказан в [17] методом существенных и несущественных областей. В настоящей работе мы даем эффективную версию этого результата (теорема 2 и следствие из теоремы 3), используя значительно модифицированный метод. Это позволяет строить наилучшие регулярные системы нулей линейных форм вида $a_2 f(x) + a_1 x + a_0$ (теорема 4). Мы также доказываем общее утверждение о приближении целых p -адических чисел точками регулярных систем (теорема 5), что является основой для исследования подобных задач в пространствах большей размерности.

2. Вспомогательные утверждения. Несложно показать, используя монотонность ψ , что нет ограничения общности в том, чтобы предполагать, что $\psi(h) < h^{-1}$.

По условию теоремы $f''(x) \neq 0$ почти всюду в $\mathbb{Z}_p$. Удалим из $\mathbb{Z}_p$ множество произвольно малой меры θ так, чтобы в оставшейся части $\mathbb{Z}_p(\theta)$ выполнялось неравенство $|f''(x)|_p \geq C_1$, где $C_1 = C_1(\theta)$ и $0 < C_1 < 1$. Достаточно доказать теорему 1 на множестве $\mathbb{Z}_p(\theta)$. Это множество можно представить в виде объединения конечного или счетного числа кругов K_s . Дальнейшие рассуждения применимы к любому кругу K_s . Рассмотрим один из них, который обозначим через K_0 . Тогда для всех $x \in K_0$

$$|f''(x)|_p \geq C_1. \quad (3)$$

При этом без ограничения общности считаем, что радиус круга K_0 удовлетворяет неравенству

$$\text{radius}(K_0) < C_1 p^{-3}. \quad (4)$$

Определим множество $\mathcal{F}$, состоящее из всех ненулевых линейных форм с целыми рациональными коэффициентами вида $F = a_2 f(x) + a_1 x + a_0$. Очевидно, что каждая функция $F \in \mathcal{F}$ является нормальной. Для $F \in \mathcal{F}$ определим $h_F = \max\{|a_i| : i = 0, 1, 2\}$.

ЛЕММА 1. Пусть $F \in \mathcal{F}$, $\alpha_0, \alpha_1 > 0$, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$. Пусть $\sigma_{\alpha, \beta}(F)$ обозначает множество тех $x \in K_0$, для которых выполнена система неравенств

$$\begin{cases} |F(x)|_p < \alpha_0, \\ \beta_1 \leq |F'(x)|_p < \alpha_1, \\ \beta_2 \leq |F''(x)|_p. \end{cases} \quad (5)$$

Тогда множество $\sigma_{\alpha, \beta}(F)$ покрывается не более чем двумя кругами радиуса

$$r_{\alpha, \beta} = \min \left\{ \frac{\alpha_0}{\beta_1}, \left(\frac{\alpha_0}{\beta_2} \right)^{1/2}, \frac{\alpha_1}{\beta_2} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\sigma_{\alpha,\beta}(F)$ содержит по крайней мере две точки, поскольку в противном случае утверждение леммы очевидно. Тогда по свойству компактности $\mathbb{Z}_p$ существуют две точки $x_1, x_2 \in \sigma_{\alpha,\beta}(F)$ такие, что

$$|x_1 - x_2|_p \geq |x - y|_p \quad \text{для любых } x, y \in \sigma_{\alpha,\beta}(F). \quad (6)$$

Для доказательства леммы покажем, что $\sigma_{\alpha,\beta}(F) \subset \bigcup_{i=1}^2 K(x_i, r_{\alpha,\beta})$.

Пусть $x \in \sigma_{\alpha,\beta}(F)$ и $i \in \{1, 2\}$. По формуле Тейлора мы имеем

$$F'(x) - F'(x_i) = (x - x_i) \left(F''(x_i) + \sum_{n=2}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n+1)}(x_i) (x - x_i)^{n-1} \right). \quad (7)$$

Поскольку $F^{(n)}(x) = a_2 f^{(n)}(x)$ при $n > 1$, из (7) вытекает

$$F'(x) - F'(x_i) = a_2(x - x_i) \left(f''(x_i) + \sum_{n=2}^{\infty} (n!)^{-1} f^{(n+1)}(x_i) (x - x_i)^{n-1} \right). \quad (8)$$

Используя (3), (4), неравенство $|f^{(n)}(x)|_p \leq 1$ и известную оценку $|1/n!|_p \leq p^n$, легко проверить, что

$$|(n!)^{-1} f^{(n+1)}(x_i) (x - x_i)^{n-1}|_p < C_1 \leq |f''(x_i)|_p.$$

Тогда p -адическая норма правой части (8) (p -адическая норма суммы не превосходит максимума p -адических норм слагаемых и в точности равна ему, если этот максимум достигается ровно на одном слагаемом) равна

$$|a_2(x - x_i) f''(x_i)|_p = |F''(x_i)|_p |x - x_i|_p. \quad (9)$$

Сейчас, используя неравенства (5), получаем

$$\alpha_1 > |F'(x) - F'(x_i)|_p = |F''(x_i)|_p |x - x_i|_p \geq \beta_2 |x - x_i|_p,$$

откуда вытекает, что

$$|x - x_i|_p \leq \frac{\alpha_1}{\beta_2}. \quad (10)$$

Далее для $i = 1, 2$ рассмотрим разложение по формуле Тейлора для $F(x)$:

$$F(x) - F(x_i) = (x - x_i) \left(F'(x_i) + \sum_{n=2}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n)}(x_i) (x - x_i)^{n-1} \right). \quad (11)$$

Предположим, что для некоторого индекса $i \in \{1, 2\}$ выполнено неравенство

$$|F'(x_i)|_p > |2^{-1} F''(x_i) (x - x_i)|_p. \quad (12)$$

Тогда так же, как при доказательстве (9), несложно проверить, что p -адическая норма правой части (11) равна $|x - x_i|_p |F'(x_i)|_p$, и из (11) вытекает

$$|F(x) - F(x_i)|_p = |F'(x_i)|_p |x - x_i|_p. \quad (13)$$

Применяя к этому равенству условия (5), получаем

$$|x - x_i|_p \leq \frac{\alpha_0}{\beta_1}. \quad (14)$$

Кроме того, из (5), (12) и (13) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\geq |F(x) - F(x_i)|_p = |F'(x_i)|_p |x - x_i|_p > |2^{-1}F''(x_i)(x - x_i)|_p |x - x_i|_p \\ &\geq |F''(x_i)|_p |x - x_i|_p^2 \geq \beta_2 |x - x_i|_p^2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$|x - x_i|_p \leq \left(\frac{\alpha_0}{\beta_2} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Из неравенств (10), (14) и (15) получаем утверждение нашей леммы в случае (12).

Теперь пусть (12) не выполнено ни для какого $i \in \{1, 2\}$. Пусть $|x - x_1|_p \leq |x - x_2|_p$. Согласно (6) мы имеем

$$|x - x_1|_p \leq |x - x_2|_p \leq |x_1 - x_2|_p. \quad (16)$$

Домножив разложение Тейлора

$$F(x_2) - F(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n)}(x_1)(x_2 - x_1)^n$$

на $x - x_1$ и разделив на $x_2 - x_1$, получаем

$$\frac{(F(x_2) - F(x_1))(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n)}(x_1)(x_2 - x_1)^{n-1}(x - x_1).$$

Вычитая это равенство из разложения по формуле Тейлора

$$F(x) - F(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n)}(x_1)(x - x_1)^{n-1}(x - x_1)$$

и преобразовывая правую часть, получим

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_1) - \frac{(F(x_2) - F(x_1))(x - x_1)}{x_2 - x_1} \\ = (x - x_1)(x - x_2) \left(2^{-1}F''(x_1) + \sum_{n=3}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n)} \sum_{j=0}^{n-2} (x - x_1)^j (x_2 - x_1)^{n-2-j} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (5) и (16), мы находим, что p -адическая норма левой части (17) не превосходит α_0 . Далее, рассуждая, как при доказательстве (9), легко проверить, что p -адическая норма правой части (17) равна

$$|(x - x_1)(x - x_2)|_p |2^{-1}F''(x_1)|_p \leq |x - x_1|_p^2 |2^{-1}F''(x_1)|_p.$$

Тогда

$$\alpha_0 \geq |2^{-1}F''(x_1)|_p |x - x_1|_p^2. \quad (18)$$

Применяя неравенство (5), получаем (15) при $i = 1$. Из (5), (18) и неравенства, противоположного к (12), мы также имеем

$$\alpha_0 \geq |x - x_1|_p |2^{-1}F''(x_1)(x - x_1)|_p \geq |x - x_1|_p |F'(x_1)|_p \geq |x - x_1|_p \beta_1,$$

откуда следует (14) при $i = 1$. Итак, мы получили неравенства (10), (14) и (15) при $i = 1$. В предположении $|x - x_1| \geq |x - x_2|$ мы бы получили эти неравенства при $i = 2$. Из (10), (14) и (15) мы снова получаем требуемое.

ЛЕММА 2. Для каждой функции $F \in \mathcal{F}$ определим множество $\mathcal{Z}_F = \{x \in K_0 : F(x) = 0\}$. Пусть $\mathcal{Z} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{Z}_F$. Тогда $\mu \mathcal{Z} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу счетности множества $\mathcal{F}$ достаточно доказать, что $\mu \mathcal{Z}_F = 0$ для фиксированной $F \in \mathcal{F}$. Несложно проверить, что если $\mathcal{Z}_F$ состоит из по крайней мере двух точек (поскольку в противном случае утверждение тривиально), то $a_2(F) \neq 0$ и, следовательно, $|F''(x)|_p \geq |a_2|_p C_1 > 0$ для всех $x \in K_0$. Множество $\mathcal{Z}_F$ содержится в множестве $\{x \in K_0 : |F(x)|_p < \varepsilon\}$ для любого $\varepsilon > 0$, мера которого по лемме 1 не превосходит $\sqrt{\varepsilon/(|a_2|_p C_1)}$, т.е. сколь угодно мала. Тем самым, лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $E \subset K_0$ – измеримое множество, $0 < C_4 < 1$ – постоянная. Если для любого круга $K \subset K_0$ выполнено $\mu(E \cap K) \geq C_4 \mu K$, то множество E имеет полную меру Хаара в K_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{E} = K_0 \setminus E$. Тогда, поскольку $K \setminus \overline{E} = K \cap E$, для любого круга $K \subset K_0$ верно $\mu(K \setminus \overline{E}) \geq C_4 \mu K$. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества $\overline{E}$ кругами K_i такое, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu K_i - \varepsilon \leq \mu \overline{E} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu K_i.$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \mu \overline{E} &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu K_i - \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i \setminus \overline{E}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i \cap \overline{E}) - \varepsilon \\ &\geq C_4 \sum_{i=1}^{\infty} \mu K_i + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cap \overline{E}\right) - \varepsilon = C_4 \sum_{i=1}^{\infty} \mu K_i + \mu \overline{E} - \varepsilon \geq (C_4 + 1) \mu \overline{E} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mu \overline{E} \leq \varepsilon / C_4 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $\overline{E}$ имеет нулевую, а E полную меру в K_0 .

Следующие две леммы доказаны соответственно в [7, с. 23] и [5].

ЛЕММА 4. Пусть E_i , $i \in \mathbb{N}$, – измеримые подмножества $\mathbb{Z}_p$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i = \infty$ и $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i$. Тогда

$$\mu E \geq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{(\sum_{i=1}^N \mu E_i)^2}{\sum_{i,j=1}^N \mu(E_i \cap E_j)}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $\tilde{\psi}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ монотонно убывает. Тогда ряды $\sum_{h=1}^{\infty} \tilde{\psi}(h)$ и $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \tilde{\psi}(2^k)$ сходятся или расходятся одновременно.

Два следующих пункта посвящены получению верхних оценок меры множества $x \in K_0$, для которых разрешимо неравенство (2) с несколько видоизмененной правой частью. Получение этих оценок распадается на два случая.

3. Случай большой первой производной. Для $Q \in \mathbb{N}$ определим множество $\mathcal{F}(Q) = \{F \in \mathcal{F} : h_F \leq Q\}$ ($\mathcal{F}$ определено перед леммой 1). Пусть K обозначает круг в K_0 и $\gamma > 0$. Определим также множество $\Omega(K, \gamma, Q, F)$, состоящее из всех $x \in K$ таких, что

$$|F(x)|_p < \gamma Q^{-3}, \quad |F'(x)|_p \geq h_F^{-1/2}, \quad (19)$$

и множество

$$\Omega(K, \gamma, Q) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(Q)} \Omega(K, \gamma, Q, F).$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что для любого круга $K \subset K_0$, любого γ ($0 < \gamma < 1$) и всех $Q > Q_0(K, f)$ верно неравенство*

$$\mu\Omega(K, \gamma, Q) \leq C_2 \gamma \mu K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать только те функции $F \in \mathcal{F}(Q)$, для которых $\Omega(K, \gamma, Q, F) \neq \emptyset$. Для $F \in \mathcal{F}(Q)$, используя свойство компактности $\mathbb{Z}_p$, определим точку $\alpha_F \in \Omega(K, \gamma, Q, F)$ такую, что

$$|F'(\alpha_F)|_p = \min_{x \in \Omega(K, \gamma, Q, F)} |F'(x)|_p.$$

Тогда согласно лемме 1

$$\mu\Omega(K, \gamma, Q, F) \ll \gamma Q^{-3} |F'(\alpha_F)|_p^{-1}, \quad (20)$$

где “ $\ll$ ” – символ Виноградова ($A \ll B$ означает неравенство $A \leq CB$ с некоторой положительной постоянной C , зависящей только от K_0 и f). Для каждой функции $F \in \mathcal{F}(Q)$ определим круг

$$\overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F) = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x - \alpha_F|_p \leq (2pQ|F'(\alpha_F)|_p)^{-1}\}. \quad (21)$$

Если число Q достаточно велико, то радиус круга $\overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F)$ меньше радиуса K и, следовательно, $\overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F) \subset K$. Далее, используя (20), легко видеть, что

$$\mu\Omega(K, \gamma, Q, F) \ll \gamma Q^{-2} \mu\overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F). \quad (22)$$

Зафиксируем любую функцию $F \in \mathcal{F}(Q)$, для которой $\Omega(K, \gamma, Q, F) \neq \emptyset$. Пусть $x \in \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F)$. Записав разложение $F(x)$ в окрестности точки α_F по формуле Тейлора и оценив каждое слагаемое, получаем

$$|F(x)|_p < (2Q)^{-1}, \quad x \in \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F). \quad (23)$$

При этом используются неравенства (19), (21), $|n!^{-1}|_p \leq p^n$ и $|F^{(n)}(\alpha_F)|_p \leq 1$.

Пусть $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(Q)$ и отличаются только коэффициентом a_0 , т.е. $F_1 - F_2 \in \mathbb{Z}$. Если предположить, что существует $x \in \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F_1) \cap \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F_2)$, то из (23) следует, что $|F_1(x) - F_2(x)|_p < (2Q)^{-1}$. С другой стороны, $F_1(x) - F_2(x)$ есть целое число, по абсолютной величине не превосходящее $2Q$. Следовательно, его норма не может быть

меньше $(2Q)^{-1}$. Полученное противоречие показывает, что $\overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F_1) \cap \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F_2) = \emptyset$. Следовательно,

$$\sum_{F \in \mathcal{F}(Q, a_2, a_1)} \mu \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F) \leq \mu K, \quad (24)$$

где $\mathcal{F}(Q, a_2, a_1)$ – подмножество $\mathcal{F}(Q)$, состоящее из функций F с фиксированными ко-эффициентами a_2 и a_1 . Из последней оценки и (22) следует, что

$$\sum_{F \in \mathcal{F}(Q, a_2, a_1)} \mu \Omega(K, \gamma, Q, F) \ll \gamma Q^{-2} \mu K.$$

Суммирование этого неравенства по всевозможным a_2, a_1 (их число равно $(2Q + 1)^2$) дает требуемую оценку.

4. Случай малой первой производной. Для каждой функции $F(x) = a_2 f(x) + a_1 x + a_0 \in \mathcal{F}$ определим следующую величину: $a_F = \text{НОД}(a_2, a_1, a_0)$. Далее пусть $\mathcal{F}^* = \{F \in \mathcal{F} : a_F = 1\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для почти всех $x \in K_0$ система неравенств

$$|F(x)|_p < h_F^{-3}, \quad |F'(x)|_p < h_F^{-\varepsilon} \quad (25)$$

имеет только конечное число решений $F \in \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in K_0$ и (25) выполнено бесконечно часто. На первом шаге доказательства мы покажем, что нет ограничения общности в том, чтобы предполагать, что решения F системы (25) принадлежат $\mathcal{F}^*$. Действительно, если дано решение F системы (25), то функция $\Phi = F/a_F$ принадлежит $\mathcal{F}^*$ и удовлетворяет неравенствам

$$|a_F|_p |\Phi(x)|_p = |F(x)|_p < h_F^{-3}, \quad |a_F|_p |\Phi'(x)|_p = |F'(x)|_p < h_F^{-\varepsilon}.$$

Поскольку $|a_F|_p^{-1} \leq a_F$ и, как легко проверить, $h_F = h_\Phi a_F$, из этих неравенств мы получаем

$$|\Phi(x)|_p < h_\Phi^{-3} a_F^{-2}, \quad |\Phi'(x)|_p < h_\Phi^{-\varepsilon} a_F^{1-\varepsilon}. \quad (26)$$

Если (26) выполнено только для конечного числа различных функций Φ , то найдется одна из этих функций такая, что (26) выполнено для бесконечного числа функций F с одной и той же Φ , что необходимо приводит к тому, что $\Phi(x) = 0$. По лемме 2 x принадлежит множеству нулевой меры. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что (26) выполнено для бесконечного числа Φ . Если $\varepsilon \geq 1$, то из (26) мы опять приходим к системе (25) для функции Φ , что доказывает наше предположение и в этом случае. Поэтому далее считаем, что $\varepsilon < 1$.

Тогда если система (25) выполнена для бесконечного числа функций $F \in \mathcal{F}$, для которых $a_F \geq h_\Phi^{\varepsilon/(2-2\varepsilon)}$, то, используя первое неравенство (26), мы получаем, что неравенство $|\Phi(x)|_p < h_\Phi^{-3-\varepsilon/(1-\varepsilon)}$ выполнено для бесконечного числа $\Phi \in \mathcal{F}^*$. Согласно результату работы [13] множество таких x имеет нулевую меру.

Если система (25) выполнена для бесконечного числа функций $F \in \mathcal{F}$, для которых $a_F < h_\Phi^{\varepsilon/(2-2\varepsilon)}$, то из (26) мы получаем, что неравенства

$$|\Phi(x)|_p < h_\Phi^{-3}, \quad |\Phi'(x)|_p < h_\Phi^{-\varepsilon/2}$$

выполнены для бесконечного числа $\Phi \in \mathcal{F}^*$. Это также обосновывает наше предположение.

Второй шаг доказательства теоремы включает в себя введение дополнительных условий на производные. Прежде всего покажем, что для каждой функции $F \in \mathcal{F}^*$ такой, что существует решение $x \in K_0$ системы (25), выполнено

$$|F''(x)|_p \geq C_1, \quad x \in K_0. \quad (27)$$

Пусть $|a_2|_p < 1$. Тогда $h_F > 1$. Далее из неравенств (25) легко получить, что $|a_i|_p < 1$ для $i = 0, 1$. Следовательно, $p \mid a_F$, что противоречит тому, что F принадлежит $\mathcal{F}^*$. Используя (3), получаем (27).

Далее, используя лемму Бореля–Кантелли, лемму 1 и неравенство (27), легко проверить, что множество тех $x \in K_0$, для которых бесконечно часто выполнено неравенство $|F'(x)|_p < h_F^{-3}$, имеет меру нуль. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только те точки $x \in K_0$, для которых неравенство $|F'(x)|_p \geq h_F^{-3}$ выполняется для всех $F \in \mathcal{F}^*$, кроме возможно конечного числа.

Пусть T – достаточно большое натуральное число. Положим $\delta = \varepsilon/T$. Согласно сказанному выше для каждой точки x из рассматриваемого множества существует целое число l , удовлетворяющее условию $-3 - \delta \leq l\delta \leq -\varepsilon$, такое, что для бесконечного числа $F \in \mathcal{F}^*$ выполнена система неравенств

$$|F(x)|_p < h_F^{-3}, \quad h_F^{(l-1)\delta} \leq |F'(x)|_p < h_F^{l\delta}. \quad (28)$$

С настоящего момента мы фиксируем l . Для каждой функции $F \in \mathcal{F}^*$ определим множество

$$\sigma(F) = \{x \in K_0 : \text{выполнены неравенства (28)}\}.$$

Нас интересует множество тех $x \in K_0$, которые попадают в бесконечное число множеств $\sigma(F)$, где $F \in \mathcal{F}^*$.

Применяя лемму 1 к неравенствам (27) и (28), получаем

$$\mu\sigma(F) \leq h_F^{-\xi},$$

где

$$\xi = \max\left(3 + (l-1)\delta, \frac{3}{2}, -l\delta\right).$$

Третий шаг доказательства содержит выделение двух типов множеств $\sigma(F)$ и доказательство теоремы для каждого из них. Для целых неотрицательных t определим классы

$$\mathcal{F}^*(t) = \{F \in \mathcal{F}^* : 2^t \leq h_F < 2^{t+1}\}.$$

Далее при каждом таком t круг K_0 можно разбить на подкруги радиуса $2^{t(-\xi+\delta)}$. Круги такого разбиения обозначим через $K_i^{(t)}$, где $1 \leq i \leq s_t$. Легко видеть, что число

кругов разбиения s_t удовлетворяет соотношению $s_t \asymp 2^{t(\xi-\delta)}$, где $A \asymp B$ означает одновременное выполнение $A \ll B$ и $B \ll A$.

Будем говорить, что функция $F \in \mathcal{F}^*(t)$ ассоциирована с кругом $K_i^{(t)}$, если $\sigma(F) \cap K_i^{(t)} \neq \emptyset$. Две функции, ассоциированные с одним и тем же кругом, назовем *ассоциированными*. Заметим, что $\sigma(F) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда F и $-F$ ассоциированы.

Теперь мы можем определить упомянутые классы. Функцию $F \in \mathcal{F}^*$ отнесем к *первому типу*, если эта функция ассоциирована не более чем с $\pm F$. В противном случае отнесем эту функцию ко *второму типу*.

Первый случай тривиален, поскольку при фиксированном t число функций первого типа во множестве $\mathcal{F}^*(t)$ не превосходит $2s_t$, и, следовательно, сумма мер $\sigma(F)$ по функциям первого типа не превосходит

$$2 \sum_{t=0}^{\infty} 2^{-\xi t} s_t \ll \sum_{t=0}^{\infty} 2^{-\xi t} 2^{(\xi-\delta)t} = \sum_{t=0}^{\infty} 2^{(-\delta)t} < \infty.$$

Применение леммы Бореля–Кантелли завершает рассмотрение этого случая.

Перейдем к случаю функций второго типа. Легко проверить, что если точка $x \in K_0$ не попадает в бесконечное число множеств $\sigma(F)$ первого типа, то эта точка попадает в бесконечное число кругов $K_i^{(t)}$ второго типа, т.е. таких кругов, с которыми ассоциированы функции второго типа. Зафиксируем t и круг $K_i^{(t)}$ второго типа и покажем, что точки этого круга допускают более сильную аппроксимацию.

Согласно определению существуют функции F_1, F_2 , ассоциированные с $K_i^{(t)}$, причем $F_1 \neq \pm F_2$. Эти функции имеют следующий вид: $F_j(x) = a_2^{(j)} f(x) + a_1^{(j)} x + a_0^{(j)}$. Из определения множества $\mathcal{F}^*$ следует, что $a_{F_j} = 1$. Тогда, используя условие $F_1 \neq \pm F_2$, легко показать, что векторы $\mathbf{a}^{(j)} = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, a_2^{(j)})$ линейно независимы ($j = 1, 2$).

Далее мы оцениваем p -адическую норму F_j и F'_j в произвольной точке $x \in K_i^{(t)}$. Для этого записывая разложение $F_j(x)$ и $F'_j(x)$ в окрестности некоторой точки $x_j \in \sigma(F_j) \cap K_i^{(t)}$ по формуле Тейлора и используя неравенства

$$|x - x_j| \ll 2^{t(-\xi+\delta)}, \quad |n!^{-1}|_p \leq p^n, \quad |F^{(n)}(x_j)|_p \leq 1,$$

(4) и (28), получаем

$$|F_j(x)|_p \ll 2^{t(-3+2\delta)}, \quad |F'_j(x)|_p \ll 2^{t(-l\delta+\delta)}. \quad (29)$$

Рассмотрим все возможные числа вида

$$\lambda_1 a_2^{(1)} + \lambda_2 a_2^{(2)}, \quad (30)$$

когда $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 2^{3\delta t}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$. Число различных выражений вида (30) равно

$$([2^{3\delta t}] + 1)^2 > 2^{6\delta t} \geq p^{[6\delta t \log_p 2]}.$$

Поэтому существует два различных выражения вида (30), значения которых имеют одинаковые остатки по $\text{mod } p^{[6\delta t \log_p 2]}$. Обозначим эти выражения через $\lambda_{1,k} a_2^{(1)} + \lambda_{2,k} a_2^{(2)}$, $k = 1, 2$. Тогда

$$r_2 = \lambda_{1,0} a_2^{(1)} + \lambda_{2,0} a_2^{(2)} \equiv 0 \pmod{p^{[6\delta t \log_p 2]}}, \quad (31)$$

где $\lambda_{j,0} = \lambda_{j,1} - \lambda_{j,2}$ ($j = 1, 2$). При этом выполнено

$$0 < |\lambda_{1,0}| + |\lambda_{2,0}| \quad \text{и} \quad \max\{|\lambda_{1,0}|, |\lambda_{2,0}|\} \leq 2 \cdot 2^{3\delta t}. \quad (32)$$

Функция $R(x) = r_2 f(x) + r_1 x + r_0 = \lambda_{1,0} F_1(x) + \lambda_{2,0} F_2(x)$ не равна тождественно нулю, поскольку $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(2)}$ линейно независимы. Кроме того, несложно проверить, что

$$h_R \ll 2^{t(1+3\delta)}. \quad (33)$$

Используя (29) и (32), получаем

$$|R(x)|_p \leq \max(|\lambda_{1,0}|_p |F_1(x)|_p, |\lambda_{2,0}|_p |F_2(x)|_p) \ll 2^{t(-3+2\delta)}, \quad (34)$$

$$|R'(x)|_p \leq \max(|\lambda_{1,0}|_p |F_1'(x)|_p, |\lambda_{2,0}|_p |F_2'(x)|_p) \ll 2^{t(-1\delta+\delta)} \leq 2^{t(-\varepsilon+\delta)}. \quad (35)$$

Далее, используя (31), (34) и (35), получаем неравенства

$$|r_1|_p \leq p^{-[6\delta t \log_p 2]}, \quad |r_0|_p \leq p^{-[6\delta t \log_p 2]}.$$

Следовательно, мы можем определить функцию $Q(x) = p^{-[6\delta t \log_p 2]} R(x) \in \mathcal{F}$. Согласно (33) мы находим $h_Q \ll 2^{t(1-3\delta)}$. Из оценки (34) получаем

$$|Q(x)|_p = |p^{-[6\delta t \log_p 2]} R(x)|_p \ll 2^{t(-3+8\delta)} \ll h_Q^{-(3-8\delta)/(1-3\delta)} = h_Q^{-3-\delta/(1-3\delta)}. \quad (36)$$

Если точка x попадает в бесконечное число кругов второго типа, то неравенства (36) выполнены для бесконечного числа номеров t .

Если (36) выполнено только для конечного числа различных функций Q , то найдется одна из этих функций такая, что (36) выполнено для бесконечного числа t с одной и той же функцией Q , что необходимо приводит к тому, что $Q(x) = 0$. По лемме 2 такая точка x принадлежит множеству нулевой меры. Если (36) выполнено для бесконечного числа Q , то по теореме Мельничука [13] x опять принадлежит множеству нулевой меры. Теорема 3 доказана.

Используя теоремы 2 и 3, несложно получить

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Delta(K, Q, \gamma) = \{x \in K : \exists F \in \mathcal{F}(Q), |F(x)|_p < \gamma Q^{-3}\}$, где $K \subset K_0$ – некоторый круг, $Q, \gamma > 0$. Тогда существует абсолютная постоянная $C_3 > 0$ такая, что $\mu\Delta(K, Q, \gamma) \leq C_3 \gamma$ для всех $Q > Q_0(K, \gamma, f)$.

5. Доказательство случая сходимости в теореме 1. Этот случай разбивается на два подслучая. Первый состоит в рассмотрении множества тех $x \in K_0$, для которых существует бесконечно много $F \in \mathcal{F}$ таких, что $|F(x)|_p < \psi(h_F)$, $|F'(x)|_p < h_F^{-1/2}$. Поскольку $\psi(h) < h^{-3}$ для всех достаточно больших h , то согласно теореме 3 это множество имеет нулевую меру Хаара.

Второй случай – это рассмотрение множества тех $x \in K_0$, для которых существует бесконечно много $F \in \mathcal{F}$ таких, что $|F(x)|_p < \psi(h_F)$, $|F'(x)|_p \geq h_F^{-1/2}$. Для $t \in \mathbb{N}$ пусть $\Lambda(t)$ обозначает множество $x \in K_0$ таких, что существует решение $F \in \mathcal{F}(2^t)$ этой системы. Исследуемое множество состоит из тех x , которые попадают в бесконечное число $\Lambda(t)$. В силу монотонности ψ мы имеем включение $\Lambda(t) \subset \Omega(K_0, \psi(2^t), h)$. Согласно теореме 2 $\mu\Lambda(t) \ll 2^{3t}\psi(2^t)$. Тогда если $\sum_{h=1}^{\infty} h^2\psi(h) < \infty$, то, используя эту оценку и лемму 5, находим

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mu\Lambda(t) \ll \sum_{t=0}^{\infty} 2^{3t}\psi(2^t) < \infty.$$

По лемме Бореля–Кантелли рассматриваемое множество имеет нулевую меру Хаара. Таким образом, случай сходимости в теореме 1 доказан.

6. Построение регулярной системы p -адических нулей. Доказательство случая расходимости проводится методом, изложенным в [5] и [18]. Этот метод впервые был применен к задаче приближения действительных чисел действительными алгебраическими числами [5]. Он опирается на построение наилучшей регулярной системы из нулей линейных форм, которые реализуют аппроксимацию. В этом пункте мы строим такую регулярную систему для нашей задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть Γ – множество p -адических чисел и $N: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ – функция, называемая нормировочной. Пара (Γ, N) называется *регулярной системой точек в круге* K_0 , если существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого круга $K \subset K_0$ и для любого достаточно большого числа T найдется набор $\gamma_1, \dots, \gamma_t \in \Gamma \cap K$, удовлетворяющий условиям $N(\gamma_i) \leq T$ ($1 \leq i \leq t$), $|\gamma_i - \gamma_j|_p \geq T^{-1}$ ($1 \leq i < j \leq t$), $t \geq CT\mu K$.

ТЕОРЕМА 4. Пара $\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{Z}_p : \exists F \in \mathcal{F}, F(\gamma) = 0\}$ и $N(\gamma) = \min_{F \in \mathcal{F}: F(\gamma)=0} h_F^3$ является регулярной системой точек в K_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный круг $K \subset K_0$ и $Q > 0$ – достаточно большое число. Пусть $\overline{\Delta}(K, Q, \gamma) = K \setminus \Delta(K, Q, \gamma)$. По следствию 1 для всех достаточно больших Q верно неравенство

$$\mu \overline{\Delta}\left(K, Q, \frac{1}{2C_3}\right) \geq \frac{\mu K}{2}. \quad (37)$$

Определим натуральное число l такое, что $p^l > C_3 \geq p^{l-1}$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} |F(x)|_p \leq 2^{-1}p^{-2l}Q^{-3}, \\ |a_i| \leq p^l Q, \quad i = 0, 1, 2, \\ |a_2|_p \leq p^{-l}, \end{cases} \quad (38)$$

где $F(x) = a_2 f(x) + a_1 x + a_0$. Используя принцип ящиков Дирихле, несложно показать, что для любого $x \in \mathbb{Z}_p$ эта система имеет решение $F \in \mathcal{F}$. Если предположить, что $|F'(x)|_p \leq p^{-l}$, то из (38) можно получить, что $|a_i|_p \leq p^{-l}$, откуда вытекает, что $\tilde{F} = p^{-l}F \in \mathcal{F}$. Более того, используя (38), несложно показать, что $h_{\tilde{F}} \leq Q$ и $|\tilde{F}(x)|_p \leq 2^{-1}p^{-l}Q^{-3} < (2C_3)^{-1}Q^{-3}$. В этом случае мы имеем $x \in \Delta(K, Q, 1/(2C_3))$. Следовательно, если $x \in \overline{\Delta}(K, Q, 1/(2C_3))$, то $|F'(x)|_p \geq p^{-l} \geq 1/(pC_3)$ для любого решения $F \in \mathcal{F}$ системы (38). Далее, для каждого такого решения F существует корень $\gamma_F \in K$ функции F такой, что $|x - \gamma_F|_p \leq p^{-2l}Q^{-3}$. Этот корень легко найти как предел следующей последовательности: $x_{n+1} = x_n - F(x_n)/F'(x_n)$, $x_0 = x$, сходимость которой легко доказать, используя условия на $F(x_0)$ и $F'(x_0)$.

Пусть Γ_Q^* – множество всевозможных таких $\gamma_F \in K$. Тогда

$$\overline{\Delta}\left(K, Q, \frac{1}{2C_3}\right) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_Q^*} K(\gamma, p^{-2l}Q^{-3}). \quad (39)$$

Выберем максимальный набор чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_t \in \Gamma_Q^*$ такой, что $|\gamma_i - \gamma_j|_p \geq p^{-2l}Q^{-3}$ при $i \neq j$. Согласно выбору всякое $\gamma \in \Gamma_Q^*$ удовлетворяет неравенству $|\gamma - \gamma_i|_p \leq$

$p^{-2l}Q^{-3}$ для некоторого i . Следовательно, $K(\gamma, p^{-2l}Q^{-3}) \subset K(\gamma_i, p^{-2l}Q^{-3})$, и из (37) и (39) вытекает, что

$$\frac{\mu K}{2} \leq \mu \bar{\Delta}\left(K, Q, \frac{1}{2C_3}\right) \leq tp^{-2l}Q^{-3}.$$

Значит, $t \geq 2^{-1}p^{2l}Q^3\mu K$. Кроме того, из (38) следует, что $N(\gamma_i) \leq (p^lQ)^3$. Полагая $T = p^{3l}Q^3$, получаем требуемый набор точек в определении регулярной системы. Теорема 4 доказана.

7. Приближение точками регулярных систем.

ТЕОРЕМА 5. Пусть (Γ, N) – регулярная система точек в круге $K_0 \subset \mathbb{Z}_p$, $\tilde{\psi}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – монотонно убывающая функция такая, что $\sum_{h=1}^{\infty} \tilde{\psi}(h) = \infty$. Тогда $\mu\Gamma_{\tilde{\psi}} = \mu K_0$, где множество $\Gamma_{\tilde{\psi}}$ состоит из $x \in K_0$ таких, что неравенство

$$|x - \gamma|_p < \tilde{\psi}(N(\gamma)) \quad (40)$$

имеет бесконечное число решений в $\gamma \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу монотонности $\tilde{\psi}$ и сходимости ряда $\sum_{h=1}^{\infty} \tilde{\psi}(h)$ без ограничения общности можно считать, что для всех h выполнено неравенство

$$\tilde{\psi}(h) \leq \frac{h^{-1}}{2}. \quad (41)$$

Зафиксируем произвольный круг $K \subset K_0$. Определим последовательность $\varphi_k = 2^k \tilde{\psi}(2^k)$. Согласно лемме 3 имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k = \infty. \quad (42)$$

По определению регулярной системы существуют постоянные $C = C(\Gamma, N, K_0)$ и $k_0 = k_0(\Gamma, N, K)$ такие, что для любого целого $k \geq k_0$ существует набор $\Gamma_k(K) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{t_k}\} \subset \Gamma \cap K$ такой, что

$$N(\gamma) \leq 2^k \quad \text{для всех } \gamma \in \Gamma_k(K), \quad (43)$$

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p \geq 2^{-k} \quad \text{для всех различных } \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_k(K), \quad (44)$$

$$C2^k\mu K \leq t_k \leq 2^k\mu K. \quad (45)$$

Для $\gamma \in \Gamma_k(K)$ определим множество $E_k(\gamma) = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x - \gamma|_p < \tilde{\psi}(2^k)\}$. Пусть $E_k = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_k(K)} E_k(\gamma)$. В силу монотонности $\tilde{\psi}$ и условия (43) для любого $x \in E_k(\gamma)$ выполнено (40). Тогда легко видеть, что

$$E(K) = \bigcap_{N=k_0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} E_k \subset \Gamma_{\tilde{\psi}} \cap K.$$

Следовательно,

$$\mu(\Gamma_{\tilde{\psi}} \cap K) \geq \mu E(K). \quad (46)$$

Далее легко проверить, что

$$\mu E_k(\gamma) \asymp \tilde{\psi}(2^k). \quad (47)$$

В силу неравенств (41) и (44) для различных $\gamma, \beta \in \Gamma_k(K)$ выполнено $E_k(\gamma) \cap E_k(\beta) = \emptyset$. Тогда, используя (45), получаем $\mu E_k \asymp 2^k \mu K \tilde{\psi}(2^k) = \varphi_k \mu K$ и

$$\left(\sum_{k=k_0}^N \mu E_k \right)^2 \asymp (\mu K)^2 \left(\sum_{k=k_0}^N \varphi_k \right)^2. \quad (48)$$

Согласно (42) имеем $\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu E_k = \infty$.

Перейдем к оценке суммы мер пересечений множеств E_k . Пусть $k_0 \leq k < l \leq N$, где N – достаточно большое натуральное число. Для любого $\gamma \in \Gamma_k(K)$ верно равенство

$$E_l \cap E_k(\gamma) = \bigcup_{\beta \in \Gamma_l(K)} E_l(\beta) \cap E_k(\gamma).$$

Используя (47), мы получаем

$$\mu(E_l \cap E_k(\gamma)) \leq \max_{\beta \in \Gamma_l(K)} \{\mu E_l(\beta)\} n(l, k, \gamma) \ll n(l, k, \gamma) \tilde{\psi}(2^l), \quad (49)$$

где $n(l, k, \gamma)$ – число различных $\beta \in \Gamma_l(K)$ таких, что $E_l(\beta) \cap E_k(\gamma) \neq \emptyset$ (для краткости множество таких β обозначим через $\Gamma_{l,k}(\gamma)$). Чтобы оценить число $n(l, k, \gamma)$, заметим, что $K(\beta_1, 2^{-l-1}) \cap K(\beta_2, 2^{-l-1}) = \emptyset$ для любых различных $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma_l(K)$, что легко проверить, используя (44) для $\Gamma_l(K)$. Следовательно,

$$\mu \left(\bigcup_{\beta \in \Gamma_{l,k}(\gamma)} K(\beta, 2^{-l-1}) \right) = n(l, k, \gamma) \mu K(\beta, 2^{-l-1}) \asymp n(l, k, \gamma) 2^{-l}. \quad (50)$$

Далее покажем, что

$$K(\beta, 2^{-l-1}) \subset K(\gamma, \tilde{\psi}(2^k) + 2^{-l}) \quad (51)$$

для каждого $\beta \in \Gamma_{l,k}(\gamma)$. Действительно, пусть $x \in K(\beta, 2^{-l-1})$ и $y \in E_k(\gamma) \cap E_l(\beta)$. Тогда, используя определение множеств $E_k(\gamma)$, $E_k(\beta)$ и неравенство (42), мы находим

$$|x - \gamma|_p = |x - \beta + \beta - y + y - \gamma|_p \leq \max\{|x - \beta|_p, |\beta - y|_p, |y - \gamma|_p\} \leq \max\{\tilde{\psi}(2^k), 2^{-l}\},$$

что доказывает (51). Из (51) вытекает, что мера объединения в (50) не превосходит $\mu K(\gamma, \tilde{\psi}(2^k) + 2^{-l})$. Тогда мы получаем $n(l, k, \gamma) 2^{-l} \ll \tilde{\psi}(2^k) + 2^{-l}$, откуда $n(l, k, \gamma) \ll 2^l \tilde{\psi}(2^k) + 1$. Подставляя эту оценку в (49), получаем

$$\mu(E_l \cap E_k(\gamma)) \ll \tilde{\psi}(2^l) \cdot (2^l \tilde{\psi}(2^k) + 1).$$

Наконец, используя (45), при $l > k$ оцениваем меру пересечения $E_l \cap E_k$:

$$\mu(E_l \cap E_k) \ll t_k \mu(E_l \cap E_k(\gamma)) \ll \mu K(2^{-(l-k)} \varphi_l + \varphi_k \varphi_l).$$

Итоговая оценка для $\mu(E_l \cap E_k)$ при любых $k_0 \leq k, l \leq N$ может быть записана в виде

$$\mu(E_l \cap E_k) \ll \mu K (2^{-|l-k|} \varphi_l + \varphi_k \varphi_l).$$

Применяя эту оценку и (42), при достаточно большом N , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=k_0}^N \sum_{k=k_0}^N \mu(E_l \cap E_k) &\ll \mu K \sum_{l=k_0}^N \sum_{k=k_0}^N \varphi_k \varphi_l + \mu K \sum_{l=k_0}^N \sum_{k=k_0}^N 2^{-|l-k|} \varphi_l \\ &\ll \mu K \sum_{k=k_0}^N \sum_{l=k_0}^N \varphi_k \varphi_l + \mu K \sum_{l=k_0}^N \varphi_l \ll \mu K \left(\sum_{k=k_0}^N \varphi_k \right)^2, \end{aligned}$$

где неявная постоянная в этом неравенстве не зависит ни от K , ни от N . Комбинируя эту оценку вместе с (48), находим, что

$$\frac{(\sum_{k=k_0}^N \mu E_k)^2}{\sum_{k,l=k_0}^N \mu(E_k \cap E_l)} \geq C_5 \mu K,$$

где постоянная C_5 не зависит ни от K , ни от N . По лемме 4 получаем $\mu E(K) \geq C_5 \mu K$. Согласно (46) имеем $\mu(\Gamma(\tilde{\psi}) \cap K) \geq C_5 \mu K$ для любого шара $K \subset K_0$. Лемма 3 завершает доказательство теоремы 5.

8. Доказательство случая расходимости в теореме 1. Пусть (Γ, N) – регулярная система, определенная в теореме 4, и ψ – монотонная функция такая, что $\sum_{h=1}^{\infty} h^2 \psi(h) = \infty$. Определим также функцию $\tilde{\psi}(n) = \psi(n^{1/3})$. Используя монотонность ψ , получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}(n) = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{(h-1)^3 < n < h^3} \tilde{\psi}(n) \gg \sum_{h=1}^{\infty} h^2 \psi(h) = \infty.$$

Очевидно также, что $\tilde{\psi}$ монотонна. Тогда по теореме 5 для почти всех $x \in K_0$ неравенство

$$|x - \gamma|_p < \tilde{\psi}(N(\gamma)) \quad (52)$$

имеет бесконечное число решений $\gamma \in \Gamma$.

Для каждого числа $\gamma \in \Gamma$ существует функция $F \in \mathcal{F}$ такая, что $F(\gamma) = 0$ и $N(\gamma) = h_F^3$. Используя формулу Тейлора и свойства p -адической нормы, несложно проверить, что $|F(x)|_p \leq |x - \gamma|_p$. Кроме того, $\tilde{\psi}(N(\gamma)) = \psi(N^{1/3}(\gamma)) = \psi(h_F)$. Поэтому из неравенства (52) следует, что $|F(x)|_p < \psi(h_F)$. Тогда последнее неравенство выполнено бесконечно часто для почти всех $x \in K_0$. Тем самым, доказательство теоремы 1 завершено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Math. Ann. 1924. V. 92. P. 115–125.
- [2] Mahler K. Über das Maß der Menge aller S -Zahlen // Math. Ann. 1932. V. 106. P. 131–139.
- [3] Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск: Наука и техника, 1967.
- [4] Берник В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arith. 1989. V. 53. P. 17–28.
- [5] Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. 1999. V. 50. № 2. P. 97–112.
- [6] Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine Approximation on Manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
- [7] Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.
- [8] Спринджук В. Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений // УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 1–80.
- [9] Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. Math. 1998. V. 148. P. 339–360.
- [10] Mahler K. Über Transcendente p -adische Zahlen // Composito Math. 1935. V. 2. P. 259–275.
- [11] Adams W. W. Transcendental numbers in the p -adic domain // Amer. J. Math. 1966. V. 88. № 2. P. 279–308.
- [12] Mahler K. p -Adic Numbers and Their Functions. Cambridge Tracts in Math. V. 76. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
- [13] Мельничук Ю. В. О метрической теории совместных диофантовых приближений p -адических чисел // Докл. АН УССР. Сер. А. 1978. № 5. С. 394–397.
- [14] Beresnevich V., Bernik V., Dodson M., Dickinson H. The Khintchine–Groshev theorem for planar curves // Proc. Royal Soc. London. Ser. A. 1999. V. 455. P. 3053–3063.
- [15] Bernik V., Dodson M., Dickinson H. A Khintchine type version of Schmidt's theorem for planar curves // Proc. Royal Soc. London. Ser. A. 1998. V. 454. P. 179–185.
- [16] Ковалевская Э. И. Метрическая теорема о точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов в $\mathbb{Q}_p$ // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 5. С. 34–36.
- [17] Ковалевская Э. И. p -адический вариант теоремы Хинчина для плоских кривых в случае сходимости // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 2. С. 28–30.
- [18] Бересневич В. В. Применение понятия регулярных систем точек в метрической теории чисел // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 1. С. 35–39.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск

E-mail: beresnevich@im.bas-net.by, kovalevsk@im.bas-net.by

Поступило

20.10.2000