Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Азизов, Точный порядок информационной сложности слабо сингулярных интегральных уравнений с периодическими аналитическими коэффициентами, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 643–656

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:25:53

УДК 517.968

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК ИНФОРМАЦИОННОЙ СЛОЖНОСТИ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. Азизов

Найден точный порядок сложности слабо сингулярных интегральных уравнений с периодическими аналитическими коэффициентами при логарифмической сингулярности. Этот класс уравнений содержит граничные уравнения внешних краевых задач для двумерного уравнения Гельмгольца.

Библиография: 10 названий.

1. Введение и постановка задачи. Исследования сложности интегральных уравнений были инициированы вопросом Х. Вожняковского [1] о точном порядке сложности уравнений Фредгольма второго рода с ядрами и свободными членами, имеющими фиксированное число производных. Ответ на этот вопрос был дан в серии работ [2]–[4]. Что же касается слабо сингулярных интегральных уравнений, то, как отмечалось в [5], задача об оценке их сложности была поставлена Г. М. Вайникко в 1989 году. В случае малой гладкости коэффициентов при логарифмической и степенной особенностях двусторонние оценки сложности слабо сингулярных уравнений, отличающихся по порядку на логарифмический множитель, были получены в [5], [6]. Вместе с тем слабо сингулярные уравнения с достаточно гладкими коэффициентами при особенностях представляют особый интерес в связи с тем, что они естественно возникают в методе граничных интегральных уравнений применительно к краевым задачам для уравнений математической физики. Так, например, в [7] рассматривается уравнение вида

$$z(t) = Hz(t) + f(t) := \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{-a(t, \tau)}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{t - \tau}{2} \right| + \frac{b(t, \tau)}{2\pi} \right] z(\tau) d\tau + f(t), \quad (1)$$

являющееся граничным интегральным уравнением внешней краевой задачи для двумерного уравнения Гельмгольца. При этом предполагается, что коэффициенты $a(t, \tau)$, $b(t, \tau)$ и свободные члены $f(t)$ являются по каждой переменной 2π -периодическими функциями достаточной гладкости. Более того, если граница области, в которой ищется решение краевой задачи, является замкнутой аналитической кривой, то свойство аналитичности наследуется и коэффициентами $a(t, \tau)$, $b(t, \tau)$. Таким образом, в свете упоминавшегося выше вопроса Вайникко представляется интересным получение точного порядка сложности уравнений вида (1) с аналитическими коэффициентами $a(t, \tau)$, $b(t, \tau)$ и дифференцируемыми свободными членами $f(t)$. Этому посвящается настоящая статья.

Уравнения (1) будут рассматриваться в гильбертовом пространстве L_2 функций с интегрируемым на $(-\pi, \pi)$ квадратом, в котором скалярное произведение определяется формулой

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt,$$

а норма $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Кроме того, будем предполагать, что свободные члены $f(t)$ уравнений (1) принадлежат соболевскому пространству W_2^r 2π -периодических функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_r = \|f\|_{W_2^r} := \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} (1 + |l|^2)^r |\hat{f}(l)|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

где $\hat{f}(l) = (f, e^{-il\tau})$ – коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\{e^{-il\tau}\}_{l=-\infty}^{\infty}$. Очевидно, что $f^{(r)} \in L_2$ для $f \in W_2^r$. В соотношениях общего характера $W_2^0 = L_2$.

Как отмечалось выше, мы будем рассматривать уравнения (1) с 2π -периодическими аналитическими коэффициентами $a(t, \tau)$, $b(t, \tau)$. Говоря о периодических аналитических функциях, естественно думать о функциях, допускающих по каждой переменной аналитическое продолжение в некоторую полосу $\sigma_h = \{u = x + iy, x \in (-\infty, \infty), y \in (-h, h)\}$ комплексной плоскости шириной $2h$. Пространство таких функций будем обозначать через $\mathbb{A}_h$. Как известно (см. [8, с. 185]), функции $a(t, \tau)$ из $\mathbb{A}_h$ удовлетворяют условию

$$\|a\|_h := \left(\sum_{\nu, \mu=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2 |\nu h| \operatorname{ch}^2 |\mu h| \cdot |\hat{a}(\nu, \mu)|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

где

$$\hat{a}(\nu, \mu) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(t, \tau) e^{-i(\nu t + \mu \tau)} dt d\tau$$

– двумерные коэффициенты Фурье функции $a(t, \tau)$ по тригонометрической системе.

Следуя [5], рассмотрим задачу о сложности приближенного решения однозначно разрешимых уравнений (1) с операторами $H \in \mathcal{H}$ и свободными членами $f \in \Phi$. Класс таких уравнений будем обозначать через $[\mathcal{H}, \Phi]$.

Под *способом задания информации* об уравнениях класса $[\mathcal{H}, \Phi]$ будем понимать произвольный набор $T = \{\delta_i\}_{i=1}^m$ непрерывных функционалов δ_i , из которых $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ определены на множестве $\mathcal{H}$, а $\delta_{k+1}, \dots, \delta_m$ – на множестве Φ . Общее число функционалов, входящих в набор T , будем обозначать через $\operatorname{card}(T)$. При фиксированном T каждому уравнению (1) ставится в соответствие числовой вектор

$$T(H, f) = (\delta_1(H), \delta_2(H), \dots, \delta_k(H), \delta_{k+1}(f), \dots, \delta_m(f)), \quad (2)$$

называемый *информацией* об уравнении (1). Положим $\mathcal{T}_M = \{T : \operatorname{card}(T) \leq M\}$.

Под *алгоритмом* A приближенного решения уравнений из класса $[\mathcal{H}, \Phi]$ будем понимать оператор, сопоставляющий информацию (2) в качестве приближенного решения уравнения (1), элемент $A(T, H, f) \in L_2$. Имеется в виду, что с каждым алгоритмом A связано параметрическое семейство $F_A \subset L_2$ элементов $\varphi(b_1, b_2, \dots, b_l) \in L_2$, определяемых значениями числовых параметров $b_1, b_2, \dots, b_l$. При этом $A(T, H, f) = \varphi(b_1, b_2, \dots, b_l) \in F_A$, а значения b_i находятся в результате выполнения элементарных

арифметических операций над компонентами вектора информации $T(H, f)$ (к элементарным арифметическим операциям (ЭАО) мы относим операции сложения, вычитания, умножения, деления и сравнения с нулем).

Через $\text{cost}\{A(T, H, f)\}$ обозначим число ЭАО, необходимых для определения $A(T, H, f)$. Положим $\mathcal{A}_N(T) = \{A : \text{cost}\{A(T, H, f)\} \leq N\}$. Рассматривая алгоритмы из $\mathcal{A}_N(T)$, естественно полагать, что $T \in \mathcal{T}_M$ при $M \leq N$. В противном случае алгоритмы из $\mathcal{A}_N(T)$ не используют всю информацию, представленную компонентами вектора $T(H, f)$.

Погрешностью алгоритма A на классе $[\mathcal{H}, \Phi]$, как обычно, будем называть величину

$$\mathcal{E}(A, [\mathcal{H}, \Phi]) = \sup_{\substack{z=Hz+f \\ H \in \mathcal{H}, f \in \Phi}} \|z - A(T, H, f)\|.$$

Положим

$$E_N([\mathcal{H}, \Phi]) = \inf_{T \in \mathcal{T}_M, M \leq N} \inf_{A \in \mathcal{A}_N(T)} \mathcal{E}(A, [\mathcal{H}, \Phi]).$$

Под ε -сложностью задачи приближенного решения уравнений из класса $[\mathcal{H}, \Phi]$ мы будем понимать величину

$$\text{comp}(\mathcal{E}, [\mathcal{H}, \Phi]) = \inf\{N : E_N([\mathcal{H}, \Phi]) \leq \varepsilon\},$$

равную минимальному числу ЭАО, которые необходимо выполнить для достижения точности ε на классе $[\mathcal{H}, \Phi]$.

Пусть $\mathcal{M}_N$ — множество всевозможных непрерывных отображений φ , действующих из W_2^r в N -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}_N$, а

$$\varphi^{-1} \circ \varphi(g) = \{f : f \in W_2^r, \varphi(g) = \varphi(f)\}$$

— полный прообраз элемента $\varphi(g) \in \mathbb{R}_N$. Предтабличным поперечником по К. И. Бабенко шара $W_{2,\gamma}^r = \{f : f \in W_2^r, \|f\|_{W_2^r} \leq \gamma\}$ в пространстве L_2 называется величина

$$\Delta_N(W_{2,\gamma}^r, L_2) = \inf_{\varphi \in \mathcal{M}_N} \sup_{g \in W_{2,\gamma}^r} \sup_{f_1, f_2 \in \varphi^{-1} \circ \varphi(g)} \|f_1 - f_2\|.$$

Известно [8, с. 247], что

$$\Delta_N(W_{2,\gamma}^r, L_2) \asymp N^{-r}.$$

Пусть $\mathcal{L}(W_2^\nu, W_2^\mu)$ — пространство линейных непрерывных операторов H из W_2^ν в W_2^μ с обычной нормой

$$\|H\|_{\mathcal{L}(W_2^\nu, W_2^\mu)} = \|H\|_{\nu \rightarrow \mu} := \sup_{\|f\|_\nu \leq 1} \|Hf\|_\mu.$$

Имеет место следующая лемма

ЛЕММА 1 [5]. Пусть $\|H\|_{r \rightarrow r} \leq \alpha$ для любого оператора $H \in \mathcal{H}$. Тогда

$$E_N([\mathcal{H}, W_{2,1}^r]) \geq 2^{-1} \Delta_N(W_{2,\gamma}^r, L_2),$$

где $\gamma = (1 + \alpha)^{-1}$.

2. Вспомогательные утверждения. Положим

$$Hg := Ag + Bg, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} Ag &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-a(t, \tau)}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{t - \tau}{2} \right| g(\tau) d\tau, \\ Bg &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b(t, \tau)}{2\pi} g(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя разложение в ряд Фурье

$$\begin{aligned} \ln \left| 2 \sin \frac{t - \tau}{2} \right| &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt - m\tau)}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} (e^{-im(t-\tau)} + e^{im(t-\tau)}) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \theta(m) e^{im(t-\tau)}, \quad \theta(m) = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ |m-1|, & m = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

получаем следующее представление для операторов из уравнений (1):

$$\begin{aligned} Hg(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{-a(t, \tau)}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{t - \tau}{2} \right| + \frac{b(t, \tau)}{2\pi} \right] g(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (A_{kl} + \hat{b}(k, -l)) \hat{g}(l), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$A_{kl} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{a}(k - m, m - l) \theta(m).$$

ЛЕММА 2 [9]. Пусть $a \in \mathbb{A}_h$ и $\lambda \geq 0$. Тогда для оператора A вида (4) справедлива оценка $\|A\|_{\lambda \rightarrow \lambda+1} \leq c_\lambda \|a\|_{\lambda+1, \lambda+1}$, где c_λ — некоторая постоянная, зависящая лишь от λ , a

$$\|a\|_{p,p} := \left(\sum_{\nu, \mu=-\infty}^{\infty} |\underline{\nu}|^{2p} \cdot |\underline{\mu}|^{2p} \cdot |\hat{a}(\nu, \mu)|^2 \right)^{1/2}, \quad \underline{b} := \begin{cases} b, & b \neq 0, \\ 1, & b = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим оператор H_n , задаваемый соотношением

$$H_n g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{kl}^n \hat{g}(l) + B_n g(t), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_{kl}^n &= \sum_{m: |k-m|+|m-l| \leq n} \hat{a}(k - m, m - l) \theta(m), \\ B_n g(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b_n(t, \tau)}{2\pi} g(\tau) d\tau = \sum_{|k|+|l| \leq n} e^{ikt} \hat{b}(k, -l) \hat{g}(l). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Для $a, b \in \mathbb{A}_h$ и $\lambda \geq 0$ при $n \geq 2(\lambda + 1)h^{-1}$ справедливо

$$\|H - H_n\|_{\lambda \rightarrow \lambda+1} \leq d_\lambda e^{-nh} (n^{2(\lambda+1)} \|a\|_h + n^{\lambda+1} \|b\|_h),$$

где d_λ – некоторая постоянная, зависящая лишь от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$a_n(t, \tau) = \sum_{|\nu| + |\mu| \leq n} e^{i\nu t} e^{i\mu \tau} \hat{a}(\nu, \mu).$$

Легко видеть, что

$$\hat{a}_n(\nu, \mu) = \begin{cases} \hat{a}(\nu, \mu), & |\nu| + |\mu| \leq n, \\ 0, & |\nu| + |\mu| > n. \end{cases}$$

Но тогда из (4) находим

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-a_n(t, \tau)}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{t - \tau}{2} \right| g(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n(k - m, m - l) \theta(m) \right) \hat{g}(l) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m: |k-m| + |m-l| \leq n} \hat{a}(k - m, m - l) \theta(m) \right) \hat{g}(l) = A_n g(t). \quad (7) \end{aligned}$$

Теперь в силу леммы 2

$$\|A - A_n\|_{\lambda \rightarrow \lambda} \leq c_\lambda \|a - a_n\|_{\lambda+1, \lambda+1}.$$

Заметим, что для $a \in \mathbb{A}_h$ при $q > 0$

$$\begin{aligned} \|a - a_n\|_{q, q}^2 &= \left\| \sum_{|\nu| + |\mu| > n} e^{i\nu t} e^{i\mu \tau} \hat{a}(\nu, \mu) \right\|_{q, q}^2 = \sum_{|\nu| + |\mu| > n} |\underline{\nu}|^{2q} \cdot |\underline{\mu}|^{2q} \cdot |\hat{a}(\nu, \mu)|^2 \\ &\leq 16 \sum_{|\nu| + |\mu| > n} \frac{|\underline{\nu}|^{2q} \cdot |\underline{\mu}|^{2q}}{e^{2h(|\nu| + |\mu|)}} \operatorname{ch}^2 \nu h \operatorname{ch}^2 \mu h |\hat{a}(\nu, \mu)|^2 \\ &= 16 \sum_{p=n+1}^{\infty} \sum_{|\nu| + |\mu| = p} \frac{|\underline{\nu}|^{2q} \cdot |\underline{\mu}|^{2q}}{e^{2h(|\nu| + |\mu|)}} \operatorname{ch}^2 \nu h \operatorname{ch}^2 \mu h |\hat{a}(\nu, \mu)|^2. \quad (8) \end{aligned}$$

С другой стороны, для $|\nu| + |\mu| = p \geq 2$

$$|\underline{\nu}| \cdot |\underline{\mu}| \leq \frac{(2 + |\nu| + |\mu|)^2}{4} = \frac{(p + 2)^2}{4} \leq p^2. \quad (9)$$

Кроме того, для $p > n \geq 2(\lambda + 1)h^{-1}$

$$p^{4(\lambda+1)} e^{-2ph} \leq n^{4(\lambda+1)} e^{-2n\lambda}. \quad (10)$$

Учитывая (9) и (10), из (8) находим

$$\begin{aligned} \|a - a_n\|_{\lambda+1, \lambda+1}^2 &\leq 16 \sum_{p=n+1}^{\infty} p^{4(\lambda+1)} e^{-2ph} \sum_{|\nu|+|\mu|=p} \text{ch}^2 \nu h \text{ch}^2 \mu h |\widehat{a}(\nu, \mu)|^2 \\ &\leq 16n^{4(\lambda+1)} e^{-2nh} \sum_{|\nu|+|\mu|>n} \text{ch}^2 \nu h \text{ch}^2 \mu h |\widehat{a}(\nu, \mu)|^2 \\ &\leq 16n^{4(\lambda+1)} e^{-2nh} \|a\|_h^2 \end{aligned}$$

и

$$\|a - a_n\|_{\lambda+1, \lambda+1} \leq 4n^{2(\lambda+1)} e^{-nh} \|a\|_h. \quad (11)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\|b - b_n\|_{\lambda+1, \lambda+1} \leq 4n^{\lambda+1} e^{-nh} \|b\|_h.$$

С учетом (11) и последнего неравенства получаем

$$\|H - H_n\|_{\lambda \rightarrow \lambda+1} \leq d_\lambda e^{-nh} (n^{2(\lambda+1)} \|a\|_h + n^{\lambda+1} \|b\|_h).$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что при $a, b \in \mathbb{A}_h$ и любом $\lambda > 0$ найдется постоянная $c_{\lambda, h}$ такая, что

$$\|a_n\|_{\lambda+1, \lambda+1} \leq \|a\|_{\lambda+1, \lambda+1} \leq c_{\lambda, h} \|a\|_h, \quad \|B\|_{\lambda, \lambda+1} \leq \|b\|_h.$$

Условимся в дальнейшем обозначать буквой C различные постоянные, зависящие лишь от параметров типа λ, r, h , значения которых фиксированы для данного класса уравнений (1). Таким образом, из лемм 2 и 3 следует, что для $a, b \in \mathbb{A}_h$ операторы (5) и (6) действуют из W_2^λ в $W_2^{\lambda+1}$, $\lambda > 0$, и

$$\|H\|_{\lambda \rightarrow \lambda+1} \leq C(\|a\|_h + \|b\|_h), \quad \|H_n\|_{\lambda \rightarrow \lambda+1} \leq C(\|a\|_h + \|b\|_h). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь функции $a^*(t, \tau) = a(\tau, t)$ и $b^*(t, \tau) = b(\tau, t)$. Так как $\|a^*\|_h = \|a\|_h$, $\|b^*\|_h = \|b\|_h$, то в силу (12) для оператора

$$H_n^* g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{-a(\tau, t)}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{t - \tau}{2} \right| + \frac{b(\tau, t)}{2\pi} \right] g(\tau) d\tau$$

также справедлива оценка

$$\|H_n^*\|_{\lambda \rightarrow \lambda+1} \leq C(\|a\|_h + \|b\|_h).$$

Обозначим через F_ν^T $(2\nu + 1)$ -мерное подпространство тригонометрических полиномов

$$g(t) = \sum_{l=-\nu}^{\nu} \widehat{g}(l) e^{ilt} \quad (13)$$

порядка не выше ν , а через $S_\nu f(t)$ — частную сумму порядка ν ряда Фурье функции $f(t)$ по тригонометрической системе, т.е.

$$S_\nu f(t) = \sum_{l=-\nu}^{\nu} \widehat{f}(l) e^{ilt}.$$

Известно, что оператор S_ν является ортопроектором на F_ν^T , т.е. $S_\nu^2 = S_\nu$ и $S_\nu^* = S_\nu$. Кроме того, для $p, q > 0$

$$\|I - S_\nu\|_{p \rightarrow p-q} \leq \nu^{-q}, \quad (14)$$

где I — единичный оператор.

ЛЕММА 4. Если $g \in F_\nu^T$, то $H_n g \in F_{\nu+n}^T$. Более того, если $\text{cost}(H_n g)$ – число ЭАО, которые нужно выполнить над коэффициентами Фурье $\hat{a}(k, l)$, $\hat{b}(k, l)$, $\hat{g}(l)$ для вычисления коэффициентов полинома $H_n g$, то

$$\text{cost}(H_n g) \leq Cn^2(\nu + n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любого полинома $g \in F_\nu^T$ при $|l| > \nu$ имеем $\hat{g}(l) = 0$, в силу (7)

$$A_n g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \sum_{l=-\nu}^{\nu} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n(k-m, m-l) \theta(m) \right) \hat{g}(l).$$

Заметим, что для $|l| \leq \nu$, $|k| > \nu + n$ и любого m выполнено $|k-m| + |m-l| \geq |k-l| \geq |k| - |l| > \nu + n - \nu = n$. Учитывая это обстоятельство и то, что $\hat{a}_n(k-m, m-l) = 0$ при $|k-m| + |m-l| > n$, из (13) находим

$$\begin{aligned} A_n g(t) &= \sum_{|k| \leq \nu+n} e^{ikt} \sum_{|l| \leq \nu} \hat{g}(l) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n(k-m, m-l) \theta(m) \right) \\ &= \sum_{k=-\nu-n}^{\nu+n} e^{ikt} \sum_{l=-\nu}^{\nu} A_{kl}^n \hat{g}(l) = \sum_{k=-\nu-n}^{\nu+n} e^{ikt} \widehat{A_n g}(k), \end{aligned}$$

где

$$\widehat{A_n g}(k) = \sum_{l=-\nu}^{\nu} A_{kl}^n \hat{g}(l), \quad A_{kl}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n(k-m, m-l) \theta(m).$$

Вновь используя тот факт, что $\hat{a}_n(k-m, m-l) = 0$ при $|k-m| + |m-l| > n$, из очевидного соотношения $|k-m| + |m-l| > |k-l|$ и представления для A_{kl}^n находим

$$A_{kl}^n = \begin{cases} 0, & |k-l| > n, \\ \sum_{m: |k-m| + |m-l| \leq n} \hat{a}(k-m, m-l) \theta(m), & |k-l| \leq n. \end{cases} \quad (15)$$

Но тогда

$$\widehat{A_n g}(k) = \sum_{l=-\nu}^{\nu} A_{kl}^n \hat{g}(l) = \sum_{l: |k-l| \leq n} A_{kl}^n \hat{g}(l) = \sum_{l=k-n}^{k+n} A_{kl}^n \hat{g}(l).$$

Подставляя это равенство в выражение для $A_n g(t)$, имеем

$$A_n g(t) = \sum_{k=-\nu-n}^{\nu+n} e^{ikt} \sum_{l=k-n}^{k+n} A_{kl}^n \hat{g}(l).$$

Это означает, что $A_n g \in F_{\nu+n}^T$ и для вычисления всех коэффициентов $\widehat{A_n g}(k)$ достаточно выполнить не более $C(2n+1)(2\nu+2n+1)$ ЭАО над числами A_{kl}^n и коэффициентами $\hat{g}(l)$.

С другой стороны, для вычисления всех чисел A_{kl}^n нужно выполнить ЭАО над коэффициентами Фурье функции $a(t, \tau)$. Из (15) следует, что число Q этих операций удовлетворяет неравенству

$$Q < C \operatorname{card}\{m : |k - m| + |m - l| \leq n\} \\ \times \operatorname{card}\{(k, l) : k \in [-\nu - n, \nu + n], l \in [-\nu, \nu], |k - l| \leq n\},$$

где $\operatorname{card}\{B\}$ – число точек с целочисленными координатами из плоского множества B . Легко видеть, что

$$\operatorname{card}\{m : |k - m| + |m - l| \leq n\} \leq \operatorname{card}\{m : |k - m| \leq n\} \\ = \operatorname{card}\{m : m \in [k - n, k + n]\} \leq 2n + 1.$$

Кроме того,

$$\operatorname{card}\{(k, l) : k \in [-\nu - n, \nu + n], l \in [-\nu, \nu], |k - l| \leq n\} \\ \leq \operatorname{card}\{(k, l) : k \in [-\nu - n, \nu + n], l \in [k - n, k + n]\} \\ \leq (2n + 1)(2\nu + 2n + 1).$$

Таким образом, $Q \leq C(2n + 1)^2(2\nu + 2n + 1)$.

Поскольку для любой функции $g \in F_\nu^T$

$$B_n g(t) = \sum_{|k| + |l| \leq n} e^{ikt} \widehat{b}(k, -l) \widehat{g}(l) \in F_n^T,$$

то

$$B_n g = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \sum_{-n+|k| \leq l \leq n-|k|} e^{ikt} \widehat{b}(k, -l) \widehat{g}(l),$$

и

$$\operatorname{cost}(B_n g) = \sum_{k=-n}^n (2n - 2|k| + 1) = 2 \sum_{k=1}^n (2n - 2k + 1) + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1.$$

Подводя итог, имеем

$$\operatorname{cost}(H_n g) \leq \operatorname{cost}(A_n g) + \operatorname{cost}(B_n g) + 2n + 1 \\ = C(2n + 1)(2\nu + 2n + 1) + Q + 2n^2 + 2n + 1 \leq Cn^2(\nu + n).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Если $a, b \in \mathbb{A}_h$, то для операторов (5), (6) имеет место оценка

$$\|H - H_n\|_{r \rightarrow 0} \leq C e^{-nh} (\|a\|_h + \|b\|_h),$$

где постоянная C зависит лишь от r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство Коши–Буняковского, для произвольного элемента $g \in W_2^r$ имеем

$$\|Hg - H_ng\|^2 = \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} (A_{kl} - A_{kl}^n) \widehat{g}(l) \right) \right\|^2 + \left\| \sum_{|k|+|l|>n} e^{ikt} \widehat{b}(k, -l) \widehat{g}(l) \right\|^2. \quad (16)$$

Оценим первое слагаемое в (16):

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} (A_{kl} - A_{kl}^n) \widehat{g}(l) \right) \right\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} (A_{kl} - A_{kl}^n) \widehat{g}(l) \right|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{A_{kl} - A_{kl}^n}{(1+|l|^2)^{r/2}} (1+|l|^2)^{r/2} \widehat{g}(l) \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{|A_{kl} - A_{kl}^n|^2}{(1+|l|^2)^r} \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} (1+|l|^2)^r |\widehat{g}(l)|^2 \right) \\ &\leq \|g\|_r^2 \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \frac{|A_{kl} - A_{kl}^n|^2}{(1+|l|^2)^r}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\begin{aligned} |A_{kl} - A_{kl}^n|^2 &= \left| \sum_{m: |k-m|+|m-l|>n} \widehat{a}(k-m, m-l) \theta(m) \right|^2 \\ &= \left| \sum_{m: |k-m|+|m-l|>n} \operatorname{ch}^2(k-m)h \operatorname{ch}^2(m-l)h \right. \\ &\quad \times \left. |\widehat{a}(k-m, m-l)|^2 \frac{\theta(m)}{\operatorname{ch}^2(k-m)h \operatorname{ch}^2(m-l)h} \right|^2 \\ &\leq C \sum_{m: |k-m|+|m-l|>n} \operatorname{ch}^2(k-m)h \operatorname{ch}^2(m-l)h |\widehat{a}(k-m, m-l)|^2 \\ &\quad \times \sum_{m: |k-m|+|m-l|>n} e^{-2h(|k-m|+|m-l|)} \theta^2(m) \\ &\leq Ce^{-2nh} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} m^{-2} \\ &\quad \times \sum_{m: |k-m|+|m-l|>n} \operatorname{ch}^2(k-m)h \operatorname{ch}^2(m-l)h |\widehat{a}(k-m, m-l)|^2 \\ &\leq Ce^{-2nh} \sum_{m: |k-m|+|m-l|>n} \operatorname{ch}^2(k-m)h \operatorname{ch}^2(m-l)h |\widehat{a}(k-m, m-l)|^2. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (17), находим, что для любого элемента $g \in W_2^r$

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} (A_{kl} - A_{kl}^n) \widehat{g}(l) \right) \right\|^2 \\ & \leq C \|g\|_r^2 e^{-2nh} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (1 + |l|^2)^{-r} \\ & \quad \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m: |k-m|+|m-l|>n} \operatorname{ch}^2(k-m)h \operatorname{ch}^2(m-l)h |\widehat{a}(k-m, m-l)|^2 \\ & \leq C \|a\|_h^2 \|g\|_r^2 e^{-2nh} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (1 + |l|^2)^{-r} \leq C \|a\|_h^2 \|g\|_r^2 e^{-2nh}. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично доказывается, что

$$\left\| \sum_{|k|+|l|>n} e^{ikt} \widehat{b}(k, -l) \widehat{g}(l) \right\|^2 \leq C \|b\|_h^2 \|g\|_r^2 e^{-2nh}. \quad (19)$$

Утверждение леммы теперь следует из (17)–(19).

3. Основной результат. Будем рассматривать уравнения (1) с коэффициентами $a(t, \tau), b(t, \tau) \in \mathbb{A}_h$ и свободными членами $f(t) \in W_2^r$, $r = 1, 2, \dots$, удовлетворяющими условиям $\|a\|_h \leq \alpha$, $\|b\|_h \leq \beta$, $\|f\|_r \leq \eta$. Кроме того, будем предполагать, что нормы резольвент интегральных операторов H уравнений (1) ограничены в совокупности постоянной γ , т.е. $\|(I - H)^{-1}\|_{0 \rightarrow 0} \leq \gamma$. Класс таких уравнений (1) обозначим через $\Psi^{h,r} = \Psi^{h,r}(\alpha, \beta, \gamma, \eta)$.

Из леммы 2 и замечания 1 следует существование постоянных $\gamma_1, \dots, \gamma_r, \dots$, зависящих только от α и γ , таких, что для операторов H уравнений (1) из класса $\Psi^{h,r}(\alpha, \beta, \gamma, \eta)$

$$\|(I - H)^{-1}\|_{\nu \rightarrow \nu} \leq \gamma_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

В самом деле, при $\nu = 0$ и $\gamma_0 = \gamma$ справедливость (20) следует из определения класса $\Psi^{h,r}(\alpha, \beta, \gamma, \eta)$. Пусть теперь при $\nu = 0, 1, 2, \dots, m-1$ выполнено (20). Тогда при $\nu = m$ из очевидного тождества $(I - H)^{-1} = I + H(I - H)^{-1}$ и из (12) следует

$$\begin{aligned} \|(I - H)^{-1}\|_{m \rightarrow m} &= \|I + H(I - H)^{-1}\|_{m \rightarrow m} \leq 1 + \|H\|_{m-1 \rightarrow m} \cdot \|(I - H)^{-1}\|_{m \rightarrow m-1} \\ &\leq 1 + C(\|a\|_h + \|b\|_h) \|(I - H)^{-1}\|_{m-1 \rightarrow m-1} \leq 1 + C(\alpha + \beta) \gamma_{m-1} := \gamma_m. \end{aligned}$$

Таким образом, индукцией по ν соотношение (20) доказано.

Рассмотрим способ задания информации $T_{n,N}$ об уравнениях (1) класса $\Psi^{h,r}$, определяемый набором функционалов

$$T(H, f) = \{\widehat{a}(\nu, \mu), \widehat{b}(\nu, \mu), \widehat{f}(k), |\nu| + |\mu| \leq n, |k| \leq N\}.$$

Легко видеть, что $\operatorname{card}(T_{n,N}) \asymp N + n^2$ и информации $T_{n,N}(H, f)$ достаточно для того, чтобы по уравнению (1) построить уравнение

$$\bar{z} = H_n \bar{z} + S_N f, \quad (21)$$

где H_n определен соотношением (6). Для каждого уравнения (21) определим последовательность элементов

$$z_0 = 0, \quad z_k = z_{k-1} + (I - S_m H_n S_M)^{-1} (H_n S_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_N f), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

и рассмотрим алгоритм $A_{m,M}^r \in \mathcal{A}_{N_1}(T_{n,N})$, при котором каждому уравнению (1) из класса $\Psi^{h,r}$ сопоставляется в качестве приближенного решения элемент $A_{m,M}^r(T_{n,N}, H, f) = z_{3r}$, определяемый соотношением (22) при $k = 3r$.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. $\text{comp}(\varepsilon, \Psi^{h,r}) \asymp \varepsilon^{-1/r}$. Способ задания информации $T_{n,N}$ и алгоритм $A_{m,M}^r$ реализуют оптимальный порядок сложности на классе $\Psi^{h,r}$ при $N \asymp \varepsilon^{-1/r}$, $M \asymp \varepsilon^{-1/(r+1)}$, $n \asymp h^{-1} \log(\varepsilon^{-1})$, $m \asymp \varepsilon^{-1/3r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего оценим $\text{cost}\{A_{m,M}^r(T_{n,N}, H, f)\}$. Из (22) следует, что z_k можно представить в виде

$$z_k = z_{k-1} + \delta_{k-1}, \quad (23)$$

где δ_{k-1} является решением уравнения с конечномерным оператором

$$\delta_{k-1} = S_m H_n S_M \delta_{k-1} + H_n S_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_N f. \quad (24)$$

Так как по определению $z_0 = 0$ и $m = N^{1/3}$, то в силу (24) $\delta_0, z_1 \in F_N^T$. Кроме того, из леммы 4 следует, что при любом k

$$H_n S_M z_{k-1} \in F_{M+n}^T, \quad M + n \asymp \varepsilon^{-1/(r+1)} \asymp N^{r/(r+1)} < N.$$

Таким образом, при любом k $\delta_{k-1}, z_k \in F_N^T$.

Пусть z_{k-1} уже определено. Тогда для определения z_k нужно подсчитать коэффициенты полинома $H_n S_M z_{k-1}$, что в силу леммы 4 потребует выполнения ЭАО, общее число которых определяется соотношением

$$\text{cost}(H_n S_M z_{k-1}) \leq C n^2 (M + n) \asymp \varepsilon^{-1/(r+1)} \ln^2(\varepsilon^{-1}).$$

Приводя подобные члены, определяем коэффициенты полинома $H_n S_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_N f \in F_N^T$, что потребует еще $N \asymp \varepsilon^{-1/r}$ ЭАО. После этого поправка δ_{k-1} определяется из уравнения (24). Поскольку оператор $S_m H_n S_M$ этого уравнения является конечномерным оператором ранга $2m + 1$, то, как известно, решение (24) сведется к системе $2m + 1$ линейных алгебраических уравнений. Решение такой системы методом Гаусса потребует $C(2m + 1)^3 \asymp \varepsilon^{-1/r}$ ЭАО. Определив δ_{k-1} , мы находим $z_k \in F_N^T$ из (23) в виде полинома (13) при $\nu = N$. Для этого потребуются еще раз посчитать коэффициенты при подобных членах, что потребует $N \asymp \varepsilon^{-1/r}$ ЭАО. Таким образом, если z_{k-1} уже определено, то

$$\begin{aligned} \text{cost}(z_k) &= \text{cost}(H_n S_M z_{k-1}) + C_1 N + C_2 (2m + 1)^3 \\ &\leq C n^2 (M + n) + C_1 N + C_2 (2m + 1)^3 \\ &\asymp \varepsilon^{-1/(r+1)} \ln^2(\varepsilon^{-1}) + \varepsilon^{-1/r} \asymp \varepsilon^{-1/r}. \end{aligned}$$

Но тогда по построению

$$\text{cost}\{A_{m,M}^r(T_{n,N}, H, f)\} = \sum_{k=0}^{3r} \text{cost}(z_k) \asymp \varepsilon^{-1/r}. \quad (25)$$

Оценим теперь величину $\mathcal{E}(A_{m,M}^r, \Psi^{h,r})$, т.е. погрешность алгоритма $A_{m,M}^r$ на классе $\Psi^{h,r}$.

Пусть z и $\bar{z}$ – решения уравнений (1) и (21) соответственно. Тогда из леммы 5 и из (14) находим

$$\begin{aligned} \|z - \bar{z}\| &= \|(I - H_n)^{-1}((H - H_n)z + f - S_N f)\| \\ &\leq \|(I - H)^{-1}\|_{0 \rightarrow 0}(\|(H - H_n)\|_{r \rightarrow 0} \cdot \|z\|_r + \|I - S_N\|_{r \rightarrow 0} \cdot \|f\|_r) \\ &\leq \|(I - H)^{-1}\|_{0 \rightarrow 0}(C(\alpha + \beta)e^{-nh}\|z\|_r + \eta N^{-r}). \end{aligned} \quad (26)$$

Если уравнение (1) принадлежит классу $\Psi^{h,r}(\alpha, \beta, \gamma, \eta)$, то в силу (20)

$$\|z\|_r = \|(I - H)^{-1}f\|_r \leq \|(I - H)^{-1}\|_{r \rightarrow r} \cdot \|f\|_r \leq \gamma_r \eta. \quad (27)$$

Кроме того, используя теорему об оценке норм резольвент близких операторов (см. [10, с. 517]) и лемму 3, при достаточно больших n имеем

$$\begin{aligned} \|(I - H_n)^{-1}\|_{\nu \rightarrow \nu} &\leq \frac{\|(I - H)^{-1}\|_{\nu \rightarrow \nu}}{1 - \|(I - H)^{-1}\|_{\nu \rightarrow \nu} \cdot \|H - H_n\|_{\nu \rightarrow \nu+1}} \\ &\leq \frac{\gamma_\nu}{1 - \gamma_\nu \|H - H_n\|_{\nu \rightarrow \nu+1}} \\ &\leq \frac{\gamma_\nu}{1 - \gamma_\nu d_\nu e^{-nh}(\alpha n^2(\nu+1) + \beta n^{\nu+1})} \leq \gamma_{\nu h}, \end{aligned} \quad (28)$$

где постоянная $\gamma_{\nu h}$ не зависит от n . Объединяя (26)–(28), для $n \asymp h^{-1} \ln(\varepsilon^{-1})$, $N \asymp \varepsilon^{-1/r}$, получаем

$$\|z - \bar{z}\| \leq \gamma_{0h}(C(\alpha + \beta)e^{-nh}\gamma_r \eta + \eta N^{-r}) \asymp \varepsilon. \quad (29)$$

Более того, из (28) находим

$$\|\bar{z}_r\| = \|(I - H_n)^{-1}S_N f\|_r \leq \|(I - H_n)^{-1}\|_{r \rightarrow r} \cdot \|S_N\|_{r \rightarrow r} \cdot \|f\|_r \leq \gamma_{rh} \eta. \quad (30)$$

Наряду с уравнением (21) рассмотрим уравнение

$$\bar{z}_M = H_n S_M \bar{z}_M + S_N f. \quad (31)$$

В силу замечания 1 и (14) имеем

$$\begin{aligned} \|H_n - H_n S_M\|_{\nu \rightarrow \nu} &\leq \|H_n\|_{\nu-1 \rightarrow \nu} \cdot \|I - S_M\|_{\nu \rightarrow \nu-1} \\ &\leq C(\|a\|_h + \|b\|_h)M^{-1} \leq C(\alpha + \beta)M^{-1}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \|H_n - H_n S_M\|_{r \rightarrow 0} &= \sup_{\|\varphi\|_r \leq 1} \|H_n \varphi - H_n S_M \varphi\| = \sup_{\|\varphi\|_r \leq 1} \sup_{\|\psi\| \leq 1} (H_n(I - S_M)\varphi, \psi) \\ &= \sup_{\|\varphi\|_r \leq 1} \sup_{\|\psi\| \leq 1} ((I - S_M)\varphi, (I - S_M)H_n^* \psi) \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_r \leq 1} \|(I - S_M)\varphi\| \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|(I - S_M)H_n^* \psi\| \\ &\leq \|I - S_M\|_{r \rightarrow 0} \cdot \|I - S_M\|_{1 \rightarrow 0} \cdot \|H_n^*\|_{0 \rightarrow 1} \leq C(\alpha + \beta)M^{-r-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Кроме того, из (28) и (32) следует, что при достаточно большом M

$$\begin{aligned} \|(I - H_n S_M)^{-1}\|_{\nu \rightarrow \nu} &\leq \frac{\|(I - H_n)^{-1}\|_{\nu \rightarrow \nu}}{1 - \|(I - H_n)^{-1}\|_{\nu \rightarrow \nu} \cdot \|H_n - H_n S_M\|_{\nu \rightarrow \nu}} \\ &\leq \frac{\gamma_{\nu h}}{1 - C(\alpha + \beta)\gamma_{\nu h} M^{-1}} \leq \gamma_{\nu 1}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\gamma_{\nu 1}$ не зависит от n и M . Таким образом, при $M \asymp \varepsilon^{-1/(r+1)}$, из (30)–(34) имеем

$$\begin{aligned} \|z - \bar{z}_M\| &= \|(I - H_n S_M)^{-1}(H_n - H_n S_M)\bar{z}\| \\ &\leq \|(I - H_n S_M)^{-1}\|_{0 \rightarrow 0} \cdot \|H_n - H_n S_M\|_{r \rightarrow 0} \cdot \|\bar{z}_r\| \\ &\leq C\gamma_{01}(\alpha + \beta)\gamma_{\nu h}\eta M^{-1} \asymp \varepsilon. \end{aligned} \quad (35)$$

Заметим теперь, что решение уравнения (31) допускает представление

$$\bar{z}_M = z_{k-1} + \Delta_{k-1}, \quad (36)$$

где $\Delta_{k-1} = \bar{z}_M - z_{k-1}$, и удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{k-1} = H_n S_M \Delta_{k-1} + H_n S_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_N f, \quad k = 1, 2, \dots \quad (37)$$

С другой стороны, из замечания 1, (14) и (34) следует, что

$$\|H_n S_M - S_m H_n S_M\|_{0 \rightarrow 0} \leq \|I - S_m\|_{1 \rightarrow 0} \cdot \|H_n\|_{0 \rightarrow 1} \cdot \|S_M\|_{0 \rightarrow 0} \leq C(\alpha + \beta)m^{-1}, \quad (38)$$

и при достаточно больших m

$$\begin{aligned} \|(I - S_m H_n S_M)^{-1}\|_{0 \rightarrow 0} &\leq \frac{\|(I - H_n S_M)^{-1}\|_{0 \rightarrow 0}}{1 - \|(I - H_n S_M)^{-1}\|_{0 \rightarrow 0} C(\alpha + \beta)m^{-1}} \\ &\leq \frac{\gamma_{01}}{1 - C(\alpha + \beta)\gamma_{01}m^{-1}} \leq \bar{\gamma}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\bar{\gamma}$ не зависит от m, n, M . Но тогда из (24), (36)–(39) находим

$$\begin{aligned} \|\Delta_k\| &= \|\bar{z}_M - z_k\| = \|\Delta_{k-1} - \delta_{k-1}\| \\ &= \|(I - S_m H_n S_M)^{-1}(H_n S_M - S_m H_n S_M)\Delta_{k-1}\| \\ &\leq \bar{\gamma}C(\alpha + \beta)m^{-1}\|\Delta_{k-1}\| \leq (\bar{\gamma}C(\alpha + \beta)m^{-1})^2\|\Delta_{k-2}\| \leq \dots \\ &\leq (\bar{\gamma}C(\alpha + \beta)m^{-1})^k\|\Delta_0\| = (\bar{\gamma}C(\alpha + \beta)m^{-1})^k\|\bar{z}_M\| \\ &\leq C m^{-k} \|(I - H_n S_M)^{-1} S_N f\| \leq C\gamma_{01}\eta m^{-k}. \end{aligned}$$

Это означает, что при $k = 3r$, $m \asymp \varepsilon^{-1/(3r)}$

$$\|z_M - A_{m,M}^r(T_{n,N}, H, f)\| = \|\bar{z}_M - z_{3r}\| \leq C m^{-3r} \asymp \varepsilon. \quad (40)$$

Таким образом, из (29), (35), (40) окончательно получаем

$$\mathcal{E}(A_{m,M}^r, \Psi^{h,r}) \leq C\varepsilon, \quad (41)$$

что с учетом (25) приводит к требуемой оценке сверху

$$\text{comp}(\varepsilon, \Psi^{h,r}) \leq C\varepsilon^{-1/r}. \quad (42)$$

С другой стороны, из леммы 1, замечания 1 и из (3) следует, что $E_N(\Psi^{h,r}) \geq CN^{-r}$ и неравенство $E_N(\Psi^{h,r}) \leq \varepsilon$ возможно лишь при $N \geq C\varepsilon^{-1/r}$. Но тогда

$$\text{comp}(\varepsilon, \Psi^{h,r}) = \inf\{N : E_N(\Psi^{h,r}) \leq \varepsilon\} \geq C\varepsilon^{-1/r}. \quad (43)$$

Утверждение теоремы следует теперь из (41)–(43).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [7] построен алгоритм, который для уравнений вида (1) из класса $\Psi^{h,r}$ дает точность ε после выполнения $O(\varepsilon^{-2/r})$ ЭАО. Сравнение этого результата с доказанной теоремой позволяет заключить, что для уравнений (1) из класса $\Psi^{h,r}$ алгоритм из [7] не является оптимальным в смысле сложности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wozniakowski H. Information-based complexity // Ann. Rev. Comput. Sci. 1986. V. 1. P. 318–380.
- [2] Переверзев С. В. О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма второго рода с гладкими ядрами. II // Укр. матем. ж. 1989. Т. 41. № 2. С. 189–193.
- [3] Переверзев С. В. Гиперболический крест и сложности приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с дифференцируемыми ядрами // Сиб. матем. ж. 1991. Т. 32. № 1. С. 107–115.
- [4] Frank K., Heinrich S., Pereverzev S. V. Information complexity of multivariate Fredholm integral equations in Sobolev classes. Technical Report № 263/95. Kaiserslautern: Univ. Kaiserslautern, 1995.
- [5] Pereverzev S. V., Sharipov C. C. Information complexity of the equations of the second kind with compact operators in Hilbert space // J. Complexity. 1992. V. 8. № 2. P. 176–202.
- [6] Махкамов К. Ш. О сложности задачи нахождения решений слабо сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН Украины. 1994. № 1. С. 28–34.
- [7] Yan Y. A fast numerical solution for a second kind boundary integral equation with a logarithmic kernel // SIAM J. Numer. Anal. 1994. V. 31. № 2. P. 477–498.
- [8] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [9] Saranen J., Vainikko G. Trigonometric collocation methods with product integration for boundary integral equations on closed curves // SIAM J. Numer. Anal. 1995. V. 32. № 2. P. 2845–2851.
- [10] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Институт математики НАН Украины

Поступило
13.05.96