Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Анисова, Нуль-квадрики коразмерности 4 в пространстве $\mathbb{C}^7$, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 657–665

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1651>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:48:35

УДК 517.55

НУЛЬ-КВАДРИКИ КОРАЗМЕРНОСТИ 4 В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^7$

Е. Г. Анисова

В работе изучаются автоморфизмы невырожденных квадрик типа $(4, 3)$. Из всех квадрик этого типа выделены так называемые нуль-квадрики, произведена их классификация (оказалось, что с точностью до эквивалентности существует две нуль-квадрики), а также найдены их группы автоморфизмов.

Библиография: 7 названий.

Пусть $M \subset \mathbb{C}^{n+k}$ – вещественно-аналитическое CR-многообразие коразмерности k и CR-размерности n . Тогда в подходящих координатах (z, w) ($z \in \mathbb{C}^n$, $w = u + iv \in \mathbb{C}^k$, $u, v \in \mathbb{R}^k$) в окрестности начала координат уравнение M записывается в виде

$$v = F(z, \bar{z}, u),$$

где F – вещественно-аналитическая функция со значениями в $\mathbb{R}^k$, причем $F|_0 = 0$, $dF|_0 = 0$. Выделим у F компоненту степени 1 по z , степени 1 по $\bar{z}$ и нулевой степени по u . Обозначим ее через $\langle z, z \rangle = (\langle z, z \rangle^1, \dots, \langle z, z \rangle^k)$, $\langle z, z \rangle^p = {}^t \bar{z} H^p z$, где H^p – эрмитова матрица порядка n , $p = 1, \dots, k$. Тогда уравнение поверхности M примет вид

$$v = \langle z, z \rangle + F_1(z, \bar{z}, u).$$

Таким образом, с поверхностью M связана поверхность Q , задаваемая уравнением $v = \langle z, z \rangle$. Эта поверхность Q называется *касательной квадрикой* поверхности M . В статье [1] В. К. Белошанка доказал, что размерность группы голоморфных автоморфизмов поверхности M , сохраняющих на месте начало координат, не превосходит размерности аналогичной группы автоморфизмов касательной квадрики. Но изучение поверхностей вида $v = \langle z, z \rangle$ представляет и самостоятельный интерес.

Поверхность Q , заданная уравнением $v = \langle z, z \rangle$, называется (k, n) -*квадрикой*. Квадрика называется *невырожденной*, если выполняются следующие условия:

- 1) $\langle z, z \rangle^1, \dots, \langle z, z \rangle^k$ линейно независимы;
- 2) $\langle z, e \rangle = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \implies e = 0$.

В дальнейшем мы не будем различать квадрику, заданную уравнением $v = \langle z, z \rangle$, и соответствующие ей эрмитовы матрицы H^j , $j = 1, \dots, k$ ($\langle z, z \rangle^j = {}^t \bar{z} H^j z$).

С каждой квадрикой связана локальная группа Ли $G(Q)$ голоморфных автоморфизмов, сохраняющих начало координат, и алгебра Ли $g(Q)$ инфинитезимальных автоморфизмов. Группа автоморфизмов квадрики конечномерна тогда и только тогда, когда

квадрика невырождена (см. [1]). Мы будем рассматривать только невырожденные квадрики.

В случае $n = k = 1$ Пуанкаре в статье [2] нашел формулу для автоморфизмов квадрики $v = |z|^2$:

$$z^* = \frac{c(z + aw)}{1 - 2iz\bar{a} - (r + ia\bar{a})w}, \quad w^* = \frac{sw}{1 - 2iz\bar{a} - (r + ia\bar{a})w}.$$

Белошапкой получена следующая формула (см. [3]) для алгебры $g(Q)$ невырожденной (k, n) -квадрики Q :

$$g(Q) = \left\{ (Cz + aw + A(z, z) + B(z, w)) \frac{\partial}{\partial z} + (sw + 2i\langle z, a\bar{w} \rangle + r(w, w)) \frac{\partial}{\partial w} \right\},$$

где все выражения линейны, причем

$$2 \operatorname{Re}\langle Cz, z \rangle = s\langle z, z \rangle, \quad (1)$$

$$\langle A\langle z, z \rangle, z \rangle = 2i\langle z, a\langle z, z \rangle \rangle, \quad (2)$$

$$\operatorname{Re}\langle B(z, u), z \rangle = r\langle \langle z, z \rangle, u \rangle, \quad \operatorname{Im}\langle B(z, \langle z, z \rangle), z \rangle = 0. \quad (3)$$

Приписав z вес 1, $\frac{\partial}{\partial z}$ – вес -1 , w – вес 2 и $\frac{\partial}{\partial w}$ – вес -2 , получим разложение $g(Q)$ в сумму градуированных компонент:

$$g(Q) = s(Q) + c(Q) + a(Q) + b(Q),$$

где

$$\begin{aligned} s(Q) &= \left\{ \mu z \frac{\partial}{\partial z} + (2 \operatorname{Re} \mu) w \frac{\partial}{\partial w}, \mu \in \mathbb{C} \right\}, \\ c(Q) &= \left\{ Cz \frac{\partial}{\partial z} + sw \frac{\partial}{\partial w}, C \in L(n, \mathbb{C}), s \in L(k, \mathbb{R}), \text{ выполняется (1)} \right\}, \\ a(Q) &= \left\{ (aw + A(z, z)) \frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, a\bar{w} \rangle \frac{\partial}{\partial w}, \text{ выполняется (2)} \right\}, \\ b(Q) &= \left\{ B(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + r(w, w) \frac{\partial}{\partial w}, \text{ выполняется (3)} \right\}. \end{aligned}$$

При этом $c(Q) + s(Q)$ отвечает за наличие линейных автоморфизмов, а $a(Q) + b(Q)$ – нелинейных.

Локально биголоморфно эквивалентные невырожденные квадрики линейно эквивалентны, поэтому под эквивалентностью квадрик Q_1 и Q_2 можно подразумевать, что существует пара матриц $(D, \rho) \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{C}) \times \operatorname{GL}(k, \mathbb{R})$ такая, что $\langle z, z \rangle_1 = \rho^{-1} \langle Dz, Dz \rangle_2$ (здесь $v = \langle z, z \rangle_j$ – уравнение Q_j , $j = 1, 2$). Пусть $\langle z, z \rangle_j^r = {}^t \bar{z} H_j^r z$, $j = 1, 2, r = 1, \dots, k$. Тогда переход от Q_1 к Q_2 с помощью пары матриц (D, ρ) можно осуществить в два этапа: сначала при помощи пары (D, E) перейти к квадрике Q_3 , заданной матрицами H_3^r , а потом при помощи пары (E, ρ) от Q_3 перейти к Q_2 . Тогда при первом шаге $H_1^r = D^* H_3^r D$, а при втором шаге $H_2^r = \rho_{r1} H_3^1 + \dots + \rho_{rk} H_3^k$. Таким образом, замены вида $H^r \mapsto T H^r T^*$

(назовем ее заменой первого типа) и $H \mapsto \rho H$ (замена второго типа) приводят к эквивалентным квадрикам $(T \in \text{GL}(n, \mathbb{C}), \rho \in \text{GL}(k, \mathbb{R}))$.

В статье [4] произведена классификация $(2, n)$ -квадрик и вычислены их алгебры автоморфизмов, а в статье [5] аналогичная работа проделана для $(3, 3)$ -квадрик. Случай квадрик типа $(3, 3)$ интересен тем, что это самая маломерная ситуация, в которой квадрика общего положения является жесткой (т.е. автоморфизмы, сохраняющие начало координат, имеют вид $z \mapsto \mu z, w \mapsto |\mu|^2 w, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) [3]. Таким образом, рассмотрение случая $(4, 3)$ -квадрик является естественным продолжением этой работы.

Из множества всех квадрик данного типа естественным образом выделяются так называемые нуль-квадрики. Квадрика коразмерности k в $\mathbb{C}^{n+k}$ называется *нуль-квадрикой*, если многочлен $P_H(t) = \det(t_1 H^1 + \dots + t_k H^k)$ тождественно равен 0. Мы рассмотрим $(4, 3)$ -квадрики, являющиеся нуль-квадриками, дадим их классификацию и найдем группы автоморфизмов.

ТЕОРЕМА. *Любая нуль-квадрика коразмерности 4 в $\mathbb{C}^7$ эквивалентна одной из двух неэквивалентных между собой квадрик Q_1, Q_2 , где*

$$\begin{aligned} \langle z, z \rangle_1^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 z^3, & \langle z, z \rangle_1^2 &= 2 \operatorname{Re} z^2 z^3, & \langle z, z \rangle_1^3 &= 2 \operatorname{Im} z^1 z^3, & \langle z, z \rangle_1^4 &= 2 \operatorname{Im} z^2 z^3, \\ \langle z, z \rangle_2^1 &= 2 \operatorname{Re} z^1 z^3, & \langle z, z \rangle_2^2 &= 2 \operatorname{Re} z^2 z^3, & \langle z, z \rangle_2^3 &= |z^3|^2, & \langle z, z \rangle_2^4 &= 2 \operatorname{Im} z^2 z^3. \end{aligned}$$

Для доказательства мы воспользуемся следующими теоремами о приведении к каноническому виду пары матриц при помощи одной и той же невырожденной матрицы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [6, теорема 4.5.19]. *Пусть H^1 и H^2 – эрмитовы матрицы, причем $\det H^1 \neq 0$. Тогда существует невырожденная матрица T такая, что*

$$T(rH^1 - H^2)T^* = \operatorname{diag}\{\varepsilon_1 R_1, \dots, \varepsilon_s R_s, R_0\},$$

где $r \in \mathbb{R}$,

$$R_j = \begin{pmatrix} 0 & & -1 & r - \lambda_j \\ & \ddots & \ddots & \\ -1 & \ddots & & \\ r - \lambda_j & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad j = 1, \dots, s,$$

$$R_0 = \operatorname{diag}\{R_{01}, \dots, R_{0p}\},$$

$$R_{0t} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & & -1 & r - \mu_t \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & & -1 & \ddots & & \\ & & & & r - \mu_t & & & 0 \\ \hline 0 & & -1 & r - \bar{\mu}_t & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & & 0 & \\ r - \bar{\mu}_t & & & 0 & & & & \end{array} \right),$$

$$\operatorname{Im} \mu_t \neq 0, \quad t = 1, \dots, p.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [7]. Пусть H^1 и H^2 – эрмитовы матрицы, $\det(rH^1 - sH^2) \equiv 0$, $r, s \in \mathbb{R}$. Тогда существует невырожденная матрица T такая, что

$$T(rH^1 - sH^2)T^* = \text{diag}\{R_1, \dots, R_p, rH_0^1 - sH_0^2\},$$

где

$$R_j = \begin{pmatrix} 0 & L_j \\ L_j^T & 0 \end{pmatrix}, \quad L_j = \begin{pmatrix} r & & 0 \\ s & \ddots & \\ & \ddots & r \\ 0 & & s \end{pmatrix} \in L(m_j + 1, m_j), \quad 1 \leq j \leq p,$$

или R_j – нулевая матрица; $\det(rH_0^1 - sH_0^2) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. С помощью утверждений 1 и 2 приведем пару матриц H^1, H^2 к каноническому виду. При этом H^3 и H^4 будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} a_j & d_j - ip_j & t_j - im_j \\ d_j + ip_j & b_j & l_j - ik_j \\ t_j + im_j & l_j + ik_j & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

где $a_j, d_j, p_j, t_j, m_j, b_j, l_j, k_j, c_j \in \mathbb{R}$.

Так как для нуль-квадрики $\det(rH^1 - sH^2) \equiv 0$, к ней можно применить утверждение 2. Тогда матрица $T(rH^1 - sH^2)T^*$ имеет вид

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & s \\ r & s & 0 \end{pmatrix}; \text{ в этом случае}$$

$$\hat{H}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad -\hat{H}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2) \text{diag}\{0, rH_0^1 - sH_0^2\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{rH_0^1 - sH_0^2} \\ 0 & & \end{pmatrix}; \text{ в этом случае}$$

$$\hat{H}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{H_0^1} \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad \hat{H}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{H_0^2} \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Так как $\det(rH_0^1 - sH_0^2) \neq 0$, то, не уменьшая общности, можно считать, что $\det H_0^1 \neq 0$.

Тогда по утверждению 1 существует невырожденная матрица $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\tilde{T}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$ такая,

что $T_1(r\hat{H}^1 - \hat{H}^2)T_1^*$ имеет вид

$$a) \text{diag}\{0, R_0\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r - \mu \\ 0 & r - \bar{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \text{Im } \mu \neq 0; \text{ в этом случае}$$

$$\tilde{H}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \bar{\mu} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \text{diag}\{0, \varepsilon_1 R_1\} = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & r - \lambda_1 \\ 0 & r - \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \varepsilon_1 = \pm 1, \lambda_1 \in \mathbb{R}; \text{ в этом случае}$$

$$\tilde{H}^1 = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}^2 = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \text{diag}\{0, \varepsilon_1 R_1, \varepsilon_2 R_2\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1(r - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2(r - \lambda_2) \end{pmatrix}, \text{ где } \varepsilon_j = \pm 1, \lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2;$$

в этом случае

$$\tilde{H}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_2 \end{pmatrix};$$

$$\text{3) } \text{diag}\{0, 0, rH_0^1 - sH_0^2\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rH_0^1 - sH_0^2 \end{pmatrix}; \text{ в этом случае}$$

$$\hat{H}^1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}^2 = \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Соответствующая квадратика вырождена.

Применив к этим квадратикам замену второго типа, мы придем к одной из следующих квадратик:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_j & d_j - ip_j & -im_j \\ d_j + ip_j & b_j & -ik_j \\ im_j & ik_j & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_j & d_j - ip_j & t_j - im_j \\ d_j + ip_j & 0 & -ik_j \\ t_j + im_j & ik_j & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_j & d_j - ip_j & t_j - im_j \\ d_j + ip_j & 0 & l_j - ik_j \\ t_j + im_j & l_j + ik_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_j & d_j - ip_j & t_j - im_j \\ d_j + ip_j & b_j & 0 \\ t_j + im_j & 0 & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Пусть про один из параметров матрицы H^3 (например, a_1) известно, что он ненулевой, и при этом значение ни одного ненулевого параметра в матрице H^3 не фиксировано. Тогда с помощью замены второго типа параметр a_1 можно сделать равным 1, а соответствующий параметр в матрице H^4 (т.е. a_2) – равным 0. Аналогичное преобразование можно сделать, поменяв матрицы H^3 и H^4 местами.

Воспользуемся теперь условием $\det(r_1 H^1 + r_2 H^2 + r_3 H^3 + r_4 H^4) = 0$. Тогда в первом случае получим квадратiku

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -im_j \\ 0 & 0 & -ik_j \\ im_j & ik_j & c_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

во втором случае – квадратiku

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & d_j - ip_j & 0 \\ d_j + ip_j & 0 & -ik_j \\ 0 & ik_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

в четвертом случае – квадратики

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - im_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 + im_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & d_j - ip_j & 0 \\ d_j + ip_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

а в третьем случае получим, что квадратика вырождена.

Квадрика (4) при $c_1 = c_2 = 0$ приводится заменой второго типа к квадратике

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В противном случае можно считать, что $c_1 = 1, c_2 = 0$. Если $k_2 \neq 0$, то можно считать, что $k_2 = 1, k_1 = 0$. Заменой $z^1 = z^{*1}, z^2 = -m_2 z^{*1} + z^{*2}, z^3 = z^{*3}$ получим квадратiku

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ m_2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -im_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ im_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $m_1 = 0$, то имеем квадратiku

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

а если $m_1 \neq 0$, то заменами $z^1 = z^{*2}/m_1$, $z^2 = z^{*1}$, $z^3 = z^{*3}$, а затем $z^1 = z^{*1}$, $z^2 = z^{*2} + iz^{*3}/2$, $z^3 = z^{*3}$ (и заменами второго типа) придем к квадрике, эквивалентной (10). Если же $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $k_2 = 0$, то (так как $H^4 \neq 0$) можно считать, что $m_2 = 1$, $m_1 = 0$. Тогда, сделав замену $z^1 = z^{*1}$, $z^2 = z^{*2} + iz^{*3}/2$, $z^3 = z^{*3}$, вновь получаем квадрику (10).

Если в квадрике (5) $k_1 = k_2 = 0$, то заменой второго типа она приводится к виду (4). Значит, мы можем считать, что $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Если $p_2 = 0$, то мы снова получаем квадрику из (4). Поэтому $p_2 = 1$, $p_1 = 0$. Теперь после замены

$$z^1 = \frac{d_2 + i}{d_2^2 + 1} z^{*1}, \quad z^2 = z^{*3}, \quad z^3 = z^{*2}$$

получим квадрику

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{d_2+i}{d_2^2+1}d_1 \\ 0 & 0 & -i \\ \frac{d_2+i}{d_2^2+1}d_1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что эквивалентно

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & id & 0 \\ -id & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $d = 0$ квадрика эквивалентна (11), а при $d \neq 0$ она приводится к виду (11) заменой $z^1 = \frac{1}{d}(iz^{*1} - z^{*2})$, $z^2 = z^{*3}$, $z^3 = z^{*2}$.

Квадрики (6) и (8) являются частными случаями (5).

Квадрика (7) после замен $z^1 = z^{*1} - \frac{ic_2}{2}z^{*3}$, $z^2 = z^{*2}$, $z^3 = z^{*3}$ и $z^1 = z^{*1} - \frac{c_1}{2}z^{*3}$, $z^2 = z^{*2}$, $z^3 = z^{*3}$ также приводится к виду (11).

Квадрика (9) при $b_1 = b_2 = 0$ эквивалентна (4), поэтому можно считать, что $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. Если при этом $p_2 = 0$, то квадрика также эквивалентна (4), поэтому можно считать, что $p_2 = 1$, $p_1 = 0$. Но полученная квадрика эквивалентна (7).

Таким образом, мы получили, что любая нуль-квадрика эквивалентна одной из двух квадрик: Q_1 , задаваемой матрицами (10), и Q_2 , задаваемой матрицами (11). Эти квадрики не эквивалентны между собой. Действительно, для любой квадрики рассмотрим множество изотропных векторов $V = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, z \rangle = 0\}$. Если квадрики Q_1 и Q_2 эквивалентны посредством пары невырожденных матриц (D, ρ) (т.е. $\langle z, z \rangle_1 = \rho^{-1} \langle Dz, Dz \rangle_2$), то соответствующие им множества V_1 и V_2 получаются одно из другого невырожденным линейным преобразованием

$$\begin{aligned} V_2 &= \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, z \rangle_2 = 0\} = \{Dz \in \mathbb{C}^n : \langle Dz, Dz \rangle_2 = 0\} \\ &= D\{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, z \rangle_1 = 0\} = DV_1. \end{aligned}$$

Но $V_1 = \{z_3 = 0\} \cup \{z_1 = z_2 = 0\}$, а $V_2 = \{z_3 = 0\}$. Множество V_1 не является линейным подпространством $\mathbb{C}^3$, а V_2 является, и поэтому одно нельзя перевести в другое линейным преобразованием. Таким образом, квадрики не эквивалентны. Теорема доказана.

Прямыми вычислениями по формулам (1)–(3) для квадрики Q_1 получаем

$$\dim(c(Q_1) + s(Q_1)) = 10, \quad \dim a(Q_1) = 6, \quad \dim b(Q_1) = 4,$$

а для квадрики Q_2 –

$$\dim(c(Q_2) + s(Q_2)) = 11, \quad \dim a(Q_2) = 6, \quad \dim b(Q_2) = 4.$$

Найдем теперь группы автоморфизмов этих квадрик.

Введем обозначения

$$Z = \begin{pmatrix} z^3 & 0 \\ 0 & z^1 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{Z} = \begin{pmatrix} \bar{z}^2 & \bar{z}^1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}^3 \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} w^3 - iw^4 & w^1 - iw^2 & 0 \\ 0 & 0 & w^1 + iw^2 \\ 0 & 0 & w^3 + iw^4 \end{pmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{pmatrix} \bar{w}^3 - i\bar{w}^4 & \bar{w}^1 - i\bar{w}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{w}^1 + i\bar{w}^2 \\ 0 & 0 & \bar{w}^3 + i\bar{w}^4 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение

$$Z\bar{Z} = \frac{1}{2i}(W - \bar{W}) \quad (12)$$

задает квадратiku Q_1 . Из формулы Пуанкаре имеем нелинейные автоморфизмы Q_1 :

$$Z^* = (\text{Id} - 2iZ\bar{A} - W(R + iA\bar{A}))^{-1}(Z + WA), \quad W^* = (\text{Id} - 2iZ\bar{A} - W(R + iA\bar{A}))^{-1}W, \quad (13)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix}, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \\ 0 & r_3 & r_4 \end{pmatrix}, \quad r_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Размерность равна 10, как и было вычислено выше.

Прямыми вычислениями по формуле $\langle Cz, Cz \rangle = s\langle z, z \rangle$ получаем, что линейные автоморфизмы Q_1 имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} \text{Re } c_{11}\bar{c}_{33} & -\text{Im } c_{11}\bar{c}_{33} & 0 & 0 \\ \text{Im } c_{11}\bar{c}_{33} & \text{Re } c_{11}\bar{c}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Re } c_{22}\bar{c}_{33} & -\text{Im } c_{22}\bar{c}_{33} \\ 0 & 0 & \text{Im } c_{22}\bar{c}_{33} & \text{Re } c_{22}\bar{c}_{33} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 & 0 \\ z^2 & 0 \\ z^3 & z^1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Z} = \begin{pmatrix} \bar{z}^1 & 0 & 0 \\ \bar{z}^3 & \bar{z}^2 & \bar{z}^1 \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} w^1 & 0 & 0 \\ w^2 - iw^3 & 0 & 0 \\ 2w^4 & w^2 + iw^3 & w^1 \end{pmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{pmatrix} \bar{w}^1 & 0 & 0 \\ \bar{w}^2 - i\bar{w}^3 & 0 & 0 \\ 2\bar{w}^4 & \bar{w}^2 + i\bar{w}^3 & \bar{w}^1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (12) задает квадрику Q_2 . Из формулы Пуанкаре имеем нелинейные автоморфизмы (13) квадрики Q_2 , где

$$A = \begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ a^2 & 0 \\ a^3 & a^1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}^1 & 0 & 0 \\ \bar{a}^3 & \bar{a}^2 & \bar{a}^1 \end{pmatrix}, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$R = \begin{pmatrix} r^1 & 0 & 0 \\ r^2 - ir^3 & 0 & 0 \\ 2r^4 & r^2 + ir^3 & r^1 \end{pmatrix}, \quad r_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Размерность равна 10, как и вычислено выше.

Прямыми вычислениями по формуле $\langle Cz, Cz \rangle = s \langle z, z \rangle$ получаем, что линейные автоморфизмы Q_2 имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} |c_{11}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re} c_{11} \bar{c}_{22} & -\operatorname{Im} c_{11} \bar{c}_{22} & 0 \\ 0 & \operatorname{Im} c_{11} \bar{c}_{22} & \operatorname{Re} c_{11} \bar{c}_{22} & 0 \\ 0 & \operatorname{Re} c_{11} \bar{c}_{32} & -\operatorname{Im} c_{11} \bar{c}_{32} & c_{11} \bar{c}_{33} \end{pmatrix}, \quad c_{11} \bar{c}_{33} \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, нуль-квадрики полностью рассмотрены.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белошайка В. К. Конечномерность группы автоморфизмов вещественно-аналитической поверхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 48. № 2. С. 437–442.
- [2] Poincaré H. Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1907. P. 185–220.
- [3] Белошайка В. К. О голоморфных преобразованиях квадрики // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 2. С. 203–219.
- [4] Шевченко С. Н. Описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов квадратиков коразмерности два и их классификация // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 5. С. 142–153.
- [5] Палинчак Н. Ф. Вещественные квадрики коразмерности 3 в $\mathbb{C}^6$ и их нелинейные автоморфизмы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 3. С. 159–178.
- [6] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [7] Turnbull H. W. On equivalence of pencils of Hermitian forms // Proc. London Math. Soc. (2). 1935. V. 32. № 3. P. 232–248.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: liza@main.mccme.rssi.ru

Поступило
06.12.96