Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, О слоениях отрицательной внешней кривизны на компактных римановых многообразиях, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 673–676

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1653>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:21:41

УДК 514

О СЛОЕНИЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ НА КОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А. А. Борисенко

В заметке изучается топологическое строение компактных римановых многообразий, на которых существуют гиперболические слоения.

Библиография: 4 названия.

В заметке изучается топологическое строение компактных римановых многообразий, на которых существуют гиперболические слоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слоение на римановом многообразии называется *гиперболическим*, если двумерная секционная кривизна слоя меньше двумерной секционной кривизны объемлющего пространства вдоль площадок, касательных к слою.

Если размерность слоя равна l , то минимальная размерность объемлющего пространства, когда может существовать гиперболическое слоение, равна $2l - 1$. Имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть F^l – гиперболическое слоение на односвязном компактном римановом многообразии M^{2l-1} . Если $l = 2, 3, 4$, то многообразие M^{2l-1} параллелизуемое.

ПРИМЕЧАНИЕ. По нашему мнению теорема верна при любых значениях $l \geq 2$.

Пусть задана система квадратных уравнений

$$A^\alpha(X, X) = A_{ij}^\alpha x^i x^j = 0, \quad i, j = 1, \dots, l, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где X есть вектор с координатами $x^1, \dots, x^l$. Так как система (1) однородна, решения, отличающиеся друг от друга ненулевым множителем, различать не будем. Пусть $A(X, Y)$ есть вектор с координатами $A_{ij}^\alpha x^i y^j$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов в касательном пространстве в точке M^{2l-1} .

ЛЕММА. Если в системе уравнений (1) $N = l - 1$ и для любых неколлинеарных векторов X, Y выполняется условие

$$\langle A(X, X), A(Y, Y) \rangle - \langle A(X, Y), A(X, Y) \rangle < 0, \quad (2)$$

то система имеет 2^{l-1} действительных нетривиальных решений, среди которых найдется l линейно независимых решений. Любые три решения не лежат в одной плоскости, в трехмерном подпространстве не может лежать более четырех решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма обобщает лемму, доказанную Т. Отзуки [1]. Сначала покажем, что все решения системы (1) с точностью до комплексного множителя действительны. Пусть $Z_0 = X_0 + iY_0$ – комплексное решение системы (1). Тогда

$$A(Z_0, Z_0) = A(X_0, X_0) - A(Y_0, Y_0) + 2iA(X_0, Y_0) = 0.$$

Отсюда $A(X_0, X_0) = A(Y_0, Y_0)$, $A(X_0, Y_0) = 0$. Если $X_0 \neq \lambda Y_0$, то

$$\langle A(X_0, X_0), A(Y_0, Y_0) \rangle - \langle A(X_0, Y_0), A(X_0, Y_0) \rangle > 0.$$

Это противоречит неравенству (2).

Пусть $t_0 = (t_0^1, \dots, t_0^l)$ – единичное решение системы (1). Оно удовлетворяет уравнениям

$$A^\alpha = A_{ij}^\alpha t^i t^j = 0, \quad A^l = \langle t, t \rangle = 1. \quad (3)$$

Матрица Якоби системы (3) при $t = t_0$ имеет вид

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial t^k} = 2A_{ik}^\alpha t_0^i, \quad \alpha = 1, \dots, l-1, \quad \frac{\partial A^l}{\partial t^k} = 2t_0^k, \quad k = 1, \dots, l.$$

Допустим что якобиан равен 0. Тогда существует ненулевой вектор $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ такой, что

$$A_{ik}^\alpha t_0^i \lambda^k = A^\alpha(t_0, \lambda) = 0, \quad \langle t_0, \lambda \rangle = 0.$$

Отсюда следует, что для ортогональных векторов t_0, λ имеет место равенство

$$\langle A(t_0, t_0), A(\lambda, \lambda) \rangle - \langle A(t_0, \lambda), A(t_0, \lambda) \rangle = 0.$$

Это противоречит неравенству (2). Значит, якобиан системы (3) при $t = t_0$ отличен от 0. Отсюда следует, что в точке $t = t_0$ гиперповерхности $A^\alpha(t, t) = 0$ пересекаются трансверсально, поэтому $t = t_0$ является изолированным решением системы (1), кратность которого равна 1. Теорема Безу [2, с. 268] утверждает, что число решений системы $l-1$ уравнений с l неизвестными или бесконечно, или равно произведению степеней уравнений, если решения считать с их кратностью. Так как решения системы (1) изолированы и действительны, система имеет 2^{l-1} различных действительных решений. Докажем, что среди решений найдется l линейно независимых. Допустим противное, пусть все решения системы (1) лежат в плоскости $x^l = 0$. На плоскости $x^l = 1$ рассмотрим функцию $f = \langle A(X, X), A(X, X) \rangle$. Каждый вектор с концом в этой плоскости имеет вид $X = \mu X^0 + e$, где X^0 – единичный вектор в плоскости $x^l = 0$, e – единичный вектор нормали к этой плоскости. Тогда

$$A(X, X) = \mu^2 A(X_0, X_0) + \mu A(X_0, e) + A(e, e).$$

Если $A(X_0, X_0) \neq 0$, то при $\mu \rightarrow \infty$ функция f на луче с направлением X_0 имеет порядок μ^4 и также стремится к бесконечности. Если $A(X_0, X_0) = 0$, то из (2) следует, что $A(X_0, e) \neq 0$, и функция f имеет на этом луче порядок μ^2 . Отсюда следует, что при $\langle X_0, X_0 \rangle \rightarrow \infty$ функция $f \rightarrow \infty$. Поэтому найдется такое значение $X = Y_0$, при котором функция f принимает наименьшее значение, отличное от 0. Пусть $F = f - \mu(x^l)^2$. В точке минимума

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x^i} &= 2 \sum_{\alpha=1}^{l-1} A_{sj}^\alpha y_0^s y_0^j A_{ij}^\alpha y_0^j - \mu \delta_i^l y_0^l = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x^i \partial x^j} &= 2 \sum_{\alpha=1}^{l-1} A_{st}^\alpha y_0^s y_0^t A_{ij}^\alpha + 4 \sum_{\alpha=1}^{l-1} A_{it}^\alpha y_0^t A_{sj}^\alpha y_0^s - \mu \delta_i^l \delta_j^l. \end{aligned}$$

Из необходимого условия минимума следует, что

$$\langle A(Y_0, Y_0), A(Y_0, t) \rangle = 0, \quad 2\langle A(Y_0, Y_0), A(t, t) \rangle + 4\langle A(Y_0, t), AY_0, t \rangle \geq 0. \quad (4)$$

Для $t = t_0$ $A(t_0, t_0) = 0$. Поэтому из (4) следует, что

$$\langle A(Y_0, t_0), A(Y_0, t_0) \rangle \geq 0.$$

Это противоречит неравенству (2). Поэтому предположение, что все решения системы (1) лежат в плоскости меньшей размерности, неверно. Любые три решения системы (1) линейно независимы. Пусть t_1, t_2 – непропорциональные решения системы (1), $t = \lambda t_1 + \lambda t_2$ – любой вектор из плоскости, натянутой на эти векторы. Тогда

$$A(t, t) = 2\lambda_1\lambda_2 A(t_1, t_2).$$

Из (2) следует, что $A(t_1, t_2) \neq 0$. Поэтому в плоскости нет других решений системы. В трехмерной плоскости E^3 лежит не более четырех различных решений системы (1). Действительно, пусть t_1, t_2, t_3 – три различных решения системы (1). Пусть $t = \lambda^1 t_1 + \lambda^2 t_2 + \lambda^3 t_3$. Тогда

$$A(t, t) = \lambda^i \lambda^j A(t_i, t_j), \quad i \neq j, \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Из (2) следует, что векторы $A(t_i, t_j)$ неколлинеарны, в крайнем случае они могут лежать в одной плоскости. Если t – решение системы (1), то мы имеем этот случай. С точностью до коэффициента пропорциональности существует единственный набор чисел c_1, c_2, c_3 таких, что

$$c_1 A(t_2, t_2) + c_2 A(t_3, t_1) + c_3 A(t_1, t_2) = 0.$$

Поэтому

$$\lambda^1 \lambda^2 = \rho c_3, \quad \lambda^3 \lambda^1 = \rho c_2, \quad \lambda^2 \lambda^3 = \rho c_1.$$

Мы получаем единственное с точностью до пропорциональности решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из формулы Гаусса [3] следует, что

$$\gamma_{2/F} = \gamma_{2/M} + \langle A(X, X), A(Y, Y) \rangle - \langle A(X, Y), A(X, Y) \rangle,$$

где $\gamma_{2/F}, \gamma_{2/M}$ – двумерные секционные кривизны слоя F^l и объемлющего пространства M^{2l-1} в направлении двумерной площадки, натянутой на векторы X, Y , касательные к слою. $A(X, X)$ – вектор с координатами $A_{ij}^\alpha x^i x^j$, где A_{ij}^α – коэффициенты вторых квадратичных форм слоя относительно ортонормированного базиса нормалей n_α , X, Y – взаимно ортогональные единичные векторы, касательные к слою. Из гиперболичности слоения следует, что

$$\langle A(X, X), A(Y, Y) \rangle - \langle A(X, Y), A(X, Y) \rangle < 0$$

и система квадратных уравнений

$$A_{ij}^\alpha t^i t^j = 0, \quad \langle t, t \rangle = 0,$$

в каждой точке слоя удовлетворяет условию леммы 1. Ненулевые решения этой системы определяют асимптотические направления на слоях. Из теоремы о неявной функции и невырожденности якобиана из решений системы (3) следует, что локально асимптотические направления распадаются на 2^l регулярных единичных векторных поля V_i , заданных на многообразии M^{2l-1} . Пусть TM^{2l-1} – касательное расслоение многообразия M^{2l-1} . M_1 – совокупность единичных асимптотических векторов к слоям. Так как локально они распадаются на регулярные векторные поля, M_1 является компактным дифференцируемым многообразием [4]. Пусть $\iota: M_1 \rightarrow TM^{2l-1}$ – отображение включения, $\varphi: TM^{2l-1} \rightarrow M^{2l-1}$ – естественная проекция. Тогда отображение $\varphi \circ \iota: M_1 \rightarrow M^{2l-1}$ является локальным диффеоморфизмом, а компактное многообразие M_1 – накрывающей многообразия M^{2l-1} со слоем конечной мощности. Так как M^{2l-1} односвязно, M_1 состоит из связных компонент, каждая из которых диффеоморфна M^{2l-1} . Каждая компонента есть глобальное невырожденное асимптотическое векторное поле, касательное к слою, определенное на M^{2l-1} . При $l = 2$ утверждение очевидно. Пусть $l = 3$ и V_1 – глобальное невырожденное асимптотическое векторное поле на M^5 , V_2, V_3 – два других асимптотических векторных поля. Из леммы следует, что V_1, V_2, V_3 – линейно независимые векторные поля. Пусть $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3$ – ортогональные к V_1 единичные векторные поля, направление которых совпадает с ортогональной проекцией полей V_2, V_3 в касательном пространстве к слою на плоскость, перпендикулярную к V_1 . Пусть $v = (v_1, \dots, v_l)$ – значение векторного поля V_1 в точке Q . Тогда $A_{ij}^\alpha v^i v^j = 0$ и $\langle A(X, v), A(X, v) \rangle > 0$ для векторов X , ортогональных v . Отображение $A: T_Q^\perp \rightarrow N_Q$ ортогонального дополнения $T_Q^\perp$ вектора v в касательном пространстве к слою на нормальное пространство к слою N_Q является изоморфизмом. Это отображение ставит в соответствие каждому вектору $X \in T_Q^\perp(v)$ вектор с координатами $A_{ij}^\alpha X^i v^j$. При этом векторные поля $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3$ отображаются в нормальные линейно независимые поля $A(\tilde{V}_2), A(\tilde{V}_3)$. Векторные поля $V_1, V_2, V_3, A(\tilde{V}_2), A(\tilde{V}_3)$ линейно независимы в каждой точке. Отсюда следует, что M^5 – параллелизуемое многообразие. Пусть $l = 4$. Аналогично случаю $l = 3$ асимптотические векторные поля V_1, V_2, V_3 линейно независимы; V_4 – поле направлений, ортогональное векторным полям V_1, V_2, V_3 и касательное к слоям. В силу односвязности многообразия M^7 мы можем выбрать единичное глобальное векторное поле V^4 . В дальнейшем ход доказательства совпадает со случаем $l = 3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Otsuki Т. On the existence of solution of quadratic equations and its geometrical application // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1953. V. 29. P. 99–100.
- [2] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972.
- [3] Эйзенхарт Л. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
- [4] Борисенко А. А. О компактных поверхностях отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве // Укр. геом. сб. 1976. Т. 19. С. 9–11.

Харьковский государственный университет
E-mail: Alexander.A.Borisenko@univer.kharkov.ua

Поступило
01.12.95
Исправленный вариант
17.03.97