Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Бруй, Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbb{T})$, $p \in]1; \infty[$, и их консервативные средние, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 677–686

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1654>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:58:32

УДК 517.518.456

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ КЛАССОВ $L^p(\mathbb{T})$, $p \in]1; \infty[$, И ИХ КОНСЕРВАТИВНЫЕ СРЕДНИЕ

И. Н. Бруй

Пусть нижняя треугольная матрица $\mu: [\mu_m^{(n)}]$ определяет консервативный метод суммирования рядов:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \sum_{m=0}^n |\mu_m^{(n)} - \mu_{m+1}^{(n)}| < \infty, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m^{(n)} = \rho_m \in \mathbb{R},$$

и пусть последовательность (ρ_m) , $m \in \mathbb{Z}_0$, отграничена от нуля. Тогда тригонометрический ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{imx}$ есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{T})$, где показатель $p \in]1; \infty[$, в том и только том случае, когда последовательность p -норм его μ -средних ограничена:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{m=-n}^n \mu_{|m|}^{(n)} \gamma_m e^{imx} \right\|_p < \infty.$$

В случае метода Фейера имеем критерий У. и Дж. Янгов (1913). В случае метода Фурье имеем обращение теоремы Рисса (1927).

Библиография: 17 названий.

1. Обозначения. Пусть показатель $p \in [1; \infty[$. Через $L^p(\mathbb{T})$ обозначим множество всех почти всюду на действительной прямой $\mathbb{R}$ определенных и 2π -периодических комплекснозначных функций f , на отрезке $[-\pi; \pi]$ измеримых и имеющих интегрируемую по Лебегу на нем p -ю степень модуля $|f|^p$. По определению

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

2. Базисные понятия. Функциональный ряд вида

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{imx} \tag{1}$$

называется *тригонометрическим рядом*. Каждой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ сопоставляется последовательность $(c_m(f))$, $m \in \mathbb{Z}$, ее *коэффициентов Фурье*:

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad c_m(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-imt} dt.$$

Рядом Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ называется тригонометрический ряд (1), в котором $\forall m \in \mathbb{Z} \quad \gamma_m = c_m(f)$. Тригонометрический ряд (см., например, [1, с. 148] или [2, с. 123])

$$\sum_{|m|=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sign} m}{\ln |m|} e^{imx}$$

сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, однако, он не является рядом Фурье никакой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Говорят, что тригонометрический ряд (1) принадлежит классу $L^p(\mathbb{T})$, и записывают $(1) \in L^p(\mathbb{T})$, если тригонометрический ряд (1) является рядом Фурье некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{T})$.

3. Постановка вопроса. Широко известна (см. [3, с. 98], [2, с. 166] или [4, с. 235]) следующая теорема У. и Дж. Янгов.

ТЕОРЕМА 1 [5, с. 57]. Пусть показатель $p \in]1; \infty[$, и пусть

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \mu_m^{(n)} := \max(0; 1 - m(n+1)^{-1}). \quad (2)$$

Тогда справедлива эквивалентность

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{imx} \in L^p(\mathbb{T}) \iff \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{m=-n}^n \mu_m^{(n)} \gamma_m e^{imx} \right\|_p < \infty. \quad (3)$$

Естественен поиск ответа на вопрос: для каких матриц $\mu := [\mu_m^{(n)}]$ сохраняется заключение (3) теоремы У. и Дж. Янгов?

4. Обзор предшествовавших исследований. На свертки с аппроксимативной единицей критерий У. и Дж. Янгов распространен в обзоре [6, с. 147].

Элементы (2) задают регулярный метод суммирования рядов, т.е. такой метод, который сохраняет сумму любого сходящегося ряда.

Известна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 [7, с. 251–252]. Пусть нижняя треугольная матрица $\mu := [\mu_m^{(n)}]$ определяет регулярный метод суммирования рядов [8, с. 20]:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \sum_{m=0}^n |\mu_m^{(n)} - \mu_{m+1}^{(n)}| < \infty; \quad (4)$$

$$\forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m^{(n)} = 1, \quad (5)$$

и пусть последовательность констант Лебега метода суммирования μ ограничена:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{m=-n}^n \mu_m^{(n)} e^{imx} \right\|_1 < \infty. \quad (6)$$

Тогда для любого показателя $p \in]1; \infty[$ истинна эквивалентность (3).

Теорема 2 распространена в работе [9, с. 67] на пространства Орлича, а в работе [10, с. 195] и на полунепрерывные методы суммирования рядов (при сохранении аналогов ограничений (4)–(6)).

5. Основной результат. Метод суммирования рядов называется *консервативным*, если он сохраняет сходимость всех сходящихся рядов.

В настоящей работе доказывается

ТЕОРЕМА 3. Пусть нижняя треугольная матрица $\mu := [\mu_m^{(n)}]$ задает консервативный метод суммирования рядов, т.е. [8, с. 17] ее элементы удовлетворяют условиям (4) и

$$\forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m^{(n)} = \rho_m \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

и пусть последовательность (ρ_m) , $m \in \mathbb{Z}_0$, ограничена от нуля:

$$\forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad |\rho_m| \geq k_1(\mu) > 0. \quad (8)$$

Тогда для любого показателя $p \in]1; \infty[$ имеет место эквивалентность (3).

Регулярный метод суммирования $\mu := [\mu_m^{(n)}]$, очевидно, удовлетворяет условиям (4), (7) и (8) с $\forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \rho_m = 1$ и $k_1(\mu) = 1$.

6. Замечания к основному результату.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Метод Фурье — $\forall n \in \mathbb{Z}_0, \forall m \in [0; n] \cap \mathbb{Z}_0 \quad \mu_m^{(n)} = 1$ — удовлетворяет, очевидно,сылке теоремы 3. Для него константы Лебега, как известно (см. [1, с. 134], [2, с. 115] или [4, с. 115]), имеют логарифмический порядок. Стало быть, условие (6) — ограниченность последовательности констант Лебега метода суммирования μ — отражало в предшествовавших исследованиях используемые методы доказательства, а не существо дела.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае метода Фурье наша теорема содержит обращение известного (см. [3, с. 120], [2, с. 593] или [4, с. 423]) результата Рисса [11]:

$$\forall p \in]1; \infty[, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \|s_n(f; \cdot)\|_p \leq k_2(p) \cdot \|f\|_p, \quad (9)$$

где

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad s_n(f; x) := \sum_{m=-n}^n c_m(f) e^{imx}$$

суть частные суммы ряда Фурье функции f .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 3 не может быть распространена на крайние значения показателей $p = 1$ (см. [2, с. 171], [4, с. 235] или [7, с. 253]) и $p = \infty$ (см. [7, с. 253] или [12, с. 329]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие (8) исключает [13, с. 72] из множества консервативных методов порождающие сходимость методы, т.е. такие методы, которые суммируют все ряды с ограниченными частными суммами. Напомним, что множество консервативных методов содержит в качестве собственных подмножеств множество регулярных методов и множество порождающих сходимость методов, причем эти собственные подмножества не пересекаются [13, с. 73].

7. Доказательство необходимости. Пусть нижняя треугольная матрица $\mu := [\mu_m^{(n)}]$ удовлетворяет условию (4), функция $f \in L^p(\mathbb{T})$, где показатель $p \in]1; \infty[$.

Обозначим через $k_3(\mu) > 0$ верхнюю грань в условии (4).

Поскольку

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \sum_{m=-n}^n \mu_{|m|}^{(n)} c_m(f) e^{imx} = \sum_{m=0}^n (\mu_m^{(n)} - \mu_{m+1}^{(n)}) s_m(f; x),$$

то отсюда с помощью неравенства Минковского и теоремы Рисса (9) получаем требуемые оценки:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \left\| \sum_{m=-n}^n \mu_{|m|}^{(n)} c_m(f) e^{imx} \right\|_p \leq k_2(p) \cdot k_3(\mu) \cdot \|f\|_p < \infty.$$

8. Доказательство достаточности: случай $p \in [2; \infty[$. Пусть нижняя треугольная матрица $\mu := [\mu_m^{(n)}]$ удовлетворяет условиям (4), (7) и (8). Тригонометрический ряд (1) удовлетворяет условию в правой части эквивалентности (3).

Шаг 1. Обозначим через $k_4(\mu; \gamma) \geq 0$ верхнюю грань в эквивалентности (3). Тогда, поскольку величина $\|\cdot\|_p$ является возрастающей [4, с. 48] функцией своего показателя p и $p \in [2; \infty[$, имеем

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{m=-n}^n \mu_{|m|}^{(n)} \gamma_m e^{imt} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq k_4(\mu; \gamma).$$

Отсюда на основании равенства Парсеваля для любого целого $\nu \in [0; n]$ получаем

$$\sum_{m=-\nu}^{\nu} |\mu_{|m|}^{(n)}|^2 \cdot |\gamma_m|^2 \leq k_4^2(\mu; \gamma).$$

Переход к пределу в последнем неравенстве при фиксированном $\nu \in \mathbb{Z}_0$ и при $n \rightarrow \infty$ согласно условию (7) дает

$$\sum_{m=-\nu}^{\nu} |\rho_{|m|}|^2 \cdot |\gamma_m|^2 \leq k_4^2(\mu; \gamma).$$

Так как ν произвольно, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\rho_{|m|}|^2 \cdot |\gamma_m|^2 \leq k_4^2(\mu; \gamma).$$

Из условий (4) и (7) по предыдущей схеме получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\rho_m - \rho_{m+1}| \leq k_3(\mu). \quad (10)$$

Очевидно,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\gamma_m|^2 \leq k_4^2(\mu; \gamma) k_1^{-2}(\mu).$$

Отсюда на основании теоремы Рисса–Фишера (см. [1, с. 159], [2, с. 74] или [4, с. 207]) заключаем, что тригонометрический ряд (1) есть ряд Фурье некоторой функции f класса $L^2(\mathbb{T})$.

Шаг 2. В силу теоремы Карлесона (см. [14, с. 113] или [1, с. 201]) ряд Фурье найденной функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ сходится к ней почти всюду на $\mathbb{R}$. Так как метод μ суммирования рядов согласно условиям (4) и (7) консервативен, функция

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n \mu_{|m|}^{(n)} c_m(f) e^{imx}$$

определена для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Из правой части эквивалентности (3) в силу теоремы Фату (см. [2, с. 40] или [4, с. 49]) следует неравенство

$$\|g\|_p \leq k_4(\mu; \gamma), \quad (11)$$

т.е. принадлежность функции g классу $L^p(\mathbb{T})$.

Функция g связана с функцией f для почти всех $x \in \mathbb{R}$ формулой [8, с. 18]

$$g(x) = f(x) \left(\rho_0 - \sum_{m=0}^{\infty} \Delta \rho_m \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \Delta \rho_m s_m(f; x), \quad (12)$$

где *разность вперед* определяется как $\Delta \rho_m := \rho_m - \rho_{m+1}$.

Шаг 3. На основании неравенства (10) заключаем, что все частные суммы абсолютно сходящегося [13, с. 63] почти всюду на $\mathbb{R}$ функционального ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Delta \rho_m s_m(f; x) \quad (13)$$

мажорируется функцией

$$k_3(\mu) \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} |s_n(f; x)|. \quad (14)$$

Так как величина $\|\cdot\|_p$ является возрастающей функцией показателя p и по теореме Карлесона–Ханта [6, с. 161]

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} |s_n(f; \cdot)| \right\|_2 \leq k_5(2) \|f\|_2,$$

то мажоранта (14) интегрируема.

На основании теоремы Лебега о мажорируемой сходимости функциональный ряд (13) можно интегрировать почленно.

Поэтому из тождества (12) имеем

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(g) = c_n(f) \left(\rho_0 - \sum_{m=0}^{\infty} \Delta \rho_m \right) + c_n(f) \sum_{m=|n|}^{\infty} \Delta \rho_m.$$

Следовательно,

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(g) = \rho_{|n|} c_n(f). \quad (15)$$

Шаг 4. Равенство (15) позволяет методом Абеля получить соотношения

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \sum_{m=0}^{n-1} \Delta \rho_m s_m(f; x) + \rho_n s_n(f; x) = s_n(g; x).$$

Рассматривая первые $n+1$ из них как систему линейных алгебраических уравнений, по правилу Крамера находим

$$s_n(f; x) = \frac{1}{\prod_{\nu=0}^n \rho_\nu} \begin{vmatrix} \rho_0 & 0 & \dots & 0 & s_0(g; x) \\ \Delta \rho_0 & \rho_1 & \dots & 0 & s_1(g; x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta \rho_0 & \Delta \rho_1 & \dots & \rho_{n-1} & s_{n-1}(g; x) \\ \Delta \rho_0 & \Delta \rho_1 & \dots & \Delta \rho_{n-1} & s_n(g; x) \end{vmatrix}.$$

Отсюда, раскладывая определитель по элементам последнего столбца, получаем

$$s_n(f; x) = \left(\prod_{\nu=0}^n \rho_\nu \right)^{-1} \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} M_{m,n} s_m(g; x).$$

Миноры

$$M_{n,n} = \prod_{\nu=0}^{n-1} \rho_\nu, \quad M_{n-1,n} = \Delta \rho_{n-1} \prod_{\nu=0}^{n-2} \rho_\nu$$

есть определители нижних треугольных матриц. С учетом определения разности вперед значение минора

$$M_{0,n} = (-1)^{n-1} \Delta \rho_0 \prod_{\nu=2}^n \rho_\nu$$

(определителя нижней матрицы Хессенберга) находится с помощью известных правил, ключевым из которых является следующее: каждый элемент j -го столбца можно рассматривать как разность и представлять определитель как разность двух определителей, таких, что j -й столбец первого из них образуют уменьшаемые, а второго – вычитаемые, остальные (не j -е) столбцы у трех определителей одинаковые. Для всех индексов $m \in [1; n-2]$ минор

$$M_{m,n} = (-1)^{n-m-1} \Delta \rho_m \prod_{\nu=0}^{m-1} \rho_\nu \prod_{\nu=m+2}^n \rho_\nu$$

есть определитель нижней блочно-треугольной матрицы, у которой два диагональных блока: нижняя треугольная матрица порядка m и нижняя матрица Хессенберга порядка $n-m$.

Таким образом,

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad s_n(f; x) = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_{m+1}} \right) s_m(g; x) + \frac{1}{\rho_n} s_n(g; x). \quad (16)$$

Шаг 5. В силу шага 2 функция $g \in L^p(\mathbb{T})$. Поэтому согласно теореме Рисса (9) и неравенству (11) имеем

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \|s_n(g; \cdot)\|_p \leq k_2(p) k_4(\mu; \gamma). \quad (17)$$

Из тождеств (16) применением неравенства Минковского и оценок (17), (8) и (10) получаем

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \|s_n(f; \cdot)\|_p \leq k_6(p; \mu) k_4(\mu; \gamma), \quad (18)$$

где константа

$$k_6(p; \mu) := k_2(p) \left(\frac{k_3(\mu)}{k_1^2(\mu)} + \frac{1}{k_1(\mu)} \right).$$

Так как последовательность $(s_n(f; x))$, $n \in \mathbb{Z}_0$, частных сумм ряда Фурье функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ сходится для почти всех $x \in \mathbb{R}$ к $f(x)$, из неравенств (18) на основании теоремы Фату имеем

$$\|f\|_p \leq k_6(p; \mu) k_4(\mu; \gamma).$$

Итак, полученная на шаге 1 функция $f \in L^2(\mathbb{T})$ принадлежит узкому более классу $L^p(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$.

Достаточность для показателей $p \in [2; \infty[$ доказана.

9. Доказательство достаточности: случай $p \in]1; 2[$. Предположения те же, что и в предыдущем пункте.

Шаг 1. Согласно условию в правой части эквивалентности (3)

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{m=-n}^n \mu_{|m|}^{(n)} \gamma_m e^{imt} \right|^p dt \right)^{1/p} \leq k_4(\mu; \gamma).$$

Отсюда, во-первых, на основании теоремы Хаусдорфа–Янга (см. [3, с. 172], [2, с. 211] или [15, с. 153]) имеем

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \left(\sum_{m=-n}^n |\mu_{|m|}^{(n)}|^q \right)^{1/q} \leq k_4(\mu; \gamma), \quad (19)$$

где сопряженный показатель $q := p(p-1)^{-1} \in [2; \infty[$, и, во-вторых, в силу критерия Руни (см. [16, с. 765] или [1, с. 53]), применяемого в направлении ‘ $\implies$ ’, получаем

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad (l+1)^{p-1} \sum_{k=0}^l \left| \sum_{m=-n}^n \mu_{|m|}^{(n)} \gamma_m c_{-m}(p_l, k) \right|^p \leq k_4^p(\mu; \gamma), \quad (20)$$

где

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad c_{-m}(p_l, k) := \frac{l!}{k!(l-k)!} \int_0^1 t^k (1-t)^{l-k} e^{2\pi i m t} dt \quad (21)$$

суть коэффициенты Фурье алгебраических многочленов

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0, \quad \forall k \in [0; l] \cap \mathbb{Z}_0 \quad p_{l,k}(x) := \frac{l!}{k!(l-k)!} x^k (1-x)^{l-k}.$$

Шаг 2. Отталкиваясь от неравенств (19), по схеме шага 1 предыдущего пункта приходим к заключению, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\rho_{|m|} \gamma_m|^q \leq k_4^q(\mu; \gamma). \quad (22)$$

Шаг 3. Для любого целого $\nu \in [0; n-1]$, $n \in \mathbb{N}$, имеем [2, с. 31]

$$\left| \sum_{m=-\nu}^{\nu} \mu_{|m|}^{(n)} \gamma_m c_{-m}(p_{l,k}) \right|^p \leq 2^p \left(\left| \sum_{m=-n}^n \mu_{|m|}^{(n)} \gamma_m c_{-m}(p_{l,k}) \right|^p + \left| \sum_{|m|=\nu+1}^n \mu_{|m|}^{(n)} \gamma_m c_{-m}(p_{l,k}) \right|^p \right). \quad (23)$$

С помощью неравенства Гёльдера и оценок (19) получаем

$$\left| \sum_{|m|=\nu+1}^n \mu_{|m|}^{(n)} \gamma_m c_{-m}(p_{l,k}) \right| \leq k_4(\mu; \gamma) \left(\sum_{|m|=\nu+1}^n |c_{-m}(p_{l,k})|^p \right)^{1/p}. \quad (24)$$

Интегрированием в (21) по частям с последующим использованием значения интеграла от дифференциального бинома [17, формула 853.21] устанавливаются оценки [16, с. 764]

$$\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad |c_{-m}(p_{l,k})| \leq \frac{1}{\pi |m|}. \quad (25)$$

В силу этих оценок имеем

$$\sum_{|m|=\nu+1}^n |c_{-m}(p_{l,k})|^p \leq \frac{2}{(p-1)\pi^p} \cdot \frac{1}{\nu^{p-1}}. \quad (26)$$

С учетом последовательно неравенств (23), (20), (24) и (26) получаем

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad (l+1)^{p-1} \sum_{k=0}^l \left| \sum_{m=-\nu}^{\nu} \mu_{|m|}^{(n)} \gamma_m c_{-m}(p_{l,k}) \right|^p \leq 2^p k_4^p(\mu; \gamma) \left(1 + \frac{2(l+1)^p}{(p-1)\pi^p \nu^{p-1}} \right).$$

В последних неравенствах при фиксированном $l \in \mathbb{Z}_0$ предельный переход по $n \rightarrow \infty$ согласно условию (7) приводит к оценкам

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad (l+1)^{p-1} \sum_{k=0}^l \left| \sum_{m=-\nu}^{\nu} \rho_{|m|} \gamma_m c_{-m}(p_{l,k}) \right|^p \leq 2^p k_4^p(\mu; \gamma) \left(1 + \frac{2(l+1)^p}{(p-1)\pi^p \nu^{p-1}} \right). \quad (27)$$

Шаг 4. На основании неравенства Гёльдера

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\rho_{|m|} \gamma_m c_{-m}(p_{l,k})| \leq \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\rho_{|m|} \gamma_m|^q \right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_{-m}(p_{l,k})|^p \right)^{1/p}.$$

Отсюда с учетом равенства (см. определение (21) и формулу 853.21 в [17])

$$c_0(p_{l,k}) = \frac{1}{k+1}$$

и неравенств (22) и (25) получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\rho_{|m|} \gamma_m c_{-m}(p_{l,k})| \leq k_4(\mu; \gamma) \left(\frac{1}{(k+1)^p} + \frac{2}{\pi^p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^p} \right)^{1/p} < \infty.$$

Таким образом, числовой ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_{|m|} \gamma_m c_{-m}(p_{l,k})$$

абсолютно сходится. Поэтому предельный переход в оценках (27) по $\nu \rightarrow \infty$ приводит к неравенствам

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad (l+1)^{p-1} \sum_{k=0}^l \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_{|m|} \gamma_m c_{-m}(p_{l,k}) \right|^p \leq 2^p k_4^p(\mu; \gamma). \quad (28)$$

Шаг 5. Из условий (22) и (28) на основании критерия Руни (см. [16, с. 765] или [1, с. 53]), применяемого в направлении ‘ $\Leftarrow$ ’, следует существование функции $g \in L^p(\mathbb{T})$ такой, что

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad c_m(g) = \rho_{|m|} \gamma_m. \quad (29)$$

Так как найденная функция g принадлежит классу $L^p(\mathbb{T})$, где показатель $p \in]1; 2[$, по теореме Карлесона–Ханта [6, с. 161] ее ряд Фурье

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_{|m|} \gamma_m e^{imx} \quad (30)$$

сходится для почти всех $x \in \mathbb{R}$ к $g(x)$.

Отсюда, поскольку условия (4), (7) и (8) влекут условие

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_{m+1}} \right| \leq \frac{k_3(\mu)}{k_1^2(\mu)} < \infty,$$

следует (см. [1, с. 153] или [13, с. 72]) сходимости почти всюду на $\mathbb{R}$ тригонометрического ряда (1) к некоторой функции f .

Шаг 6. Равенства (29) позволяют по схеме шага 4 предыдущего пункта выразить частные суммы тригонометрического ряда (1) через (см. правую часть формул (16)) частные суммы $s_n(g; x)$ ряда Фурье (30) функции $g \in L^p(\mathbb{T})$.

Из этих выражений, во-первых, по схеме шага 5 пункта 8 получаем оценки

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \left\| \sum_{m=-n}^n \gamma_m e^{imx} \right\|_p \leq k_6(p; \mu) \|g\|_p, \quad (31)$$

и, во-вторых, имеем очевидные неравенства

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \left| \sum_{m=-n}^n \gamma_m e^{imx} \right| \leq \left(\frac{k_3(\mu)}{k_1^2(\mu)} + \frac{1}{k_1(\mu)} \right) \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} |s_n(g; x)|. \quad (32)$$

Согласно шагу 5 настоящего пункта частные суммы тригонометрического ряда (1) сходятся для почти всех $x \in \mathbb{R}$ к $f(x)$. Поэтому из оценок (31) на основании теоремы Фату (см. [2, с. 40] или [4, с. 49]) вытекает неравенство

$$\|f\|_p \leq k_6(p; \mu) \|g\|_p,$$

т.е. принадлежность полученной в предыдущем шаге функции f классу $L^p(\mathbb{T})$.

Шаг 7. Очевидно,

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0, \quad \forall \nu \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-n}^n \gamma_m e^{imt} \right) e^{-i\nu t} dt = \begin{cases} \gamma_\nu, & \text{если } |\nu| \leq n; \\ 0, & \text{если } |\nu| > n. \end{cases}$$

Из принадлежности функции g классу $L^p(\mathbb{T})$, где показатель $p \in]1; 2[$, по схеме шага 3 пункта 8 выводится интегрируемость мажоранты (правой части неравенств (32)) частных сумм тригонометрического ряда (1). Поэтому на основании теоремы Лебега в мажорируемой сходимости

$$\forall \nu \in \mathbb{Z} \quad \gamma_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-n}^n \gamma_m e^{imt} \right) e^{-i\nu t} dt = c_\nu(f).$$

Итак, тригонометрический ряд (1) является рядом Фурье функции $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Достаточность для показателей $p \in]1; 2[$ доказана.

Доказательство основного результата закончено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. М.: Мир, 1985.
- [2] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [3] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.
- [4] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [5] Young W. H., Young G. E. On the theorem of Riesz–Fischer // Quart. J. Pure Appl. Math. 1913. V. 44. P. 49–88.
- [6] Кисляков С. В. Классическая проблематика анализа Фурье // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1987. С. 135–196.
- [7] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958.
- [8] Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин: Валгус, 1977.
- [9] Тыннов М. Т-дополнительные пространства коэффициентов Фурье // Уч. записки Тартуского гос. ун-та. 1966. Т. 192. С. 65–81.
- [10] Тыннов М. Коэффициенты Фурье и множители суммируемости // Уч. записки Тартуского гос. ун-та. 1970. Т. 253. С. 194–201.
- [11] Riesz M. Sur les fonctions conjuguées // Math. Z. 1927. V. 27. P. 218–244.
- [12] Busko E. Fonctions continues et fonctions bornées non adhérentes dans $L^\infty(\mathbb{T})$ à la suite de leurs sommes partielles de Fourier // Studia Math. 1970. V. 34. № 3. P. 319–337.
- [13] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
- [14] Карлесон Л. О сходимости рядов Фурье и о росте их частных сумм // Математика. 1967. Т. 11. № 4. С. 113–132.
- [15] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [16] Rooney P. G. On the representation of sequences as Fourier coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11. P. 762–768.
- [17] Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973.