Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Вечтомов, Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 687–693

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:01:03

УДК 512.556

РЕШЕТКА ПОДАЛГЕБР КОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И ХЬЮИТТОВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Е. М. Вечтомов

Рассматривается решетка $A(X)$ всевозможных подалгебр кольца всех непрерывных $\mathbb{R}$ -значных функций, определенных на $\mathbb{R}$ -отделимом пространстве X . Топологическое пространство называется хьюиттовским, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени числовой прямой $\mathbb{R}$. Основным результатом работы является доказательство определяемости любого хьюиттского пространства X решеткой $A(X)$. Применяется оригинальная техника минимальных и максимальных подалгебр. Показано, что модулярность решетки $A(X)$ равносильна тому, что X содержит не более двух точек.

Библиография: 3 названия.

Введение. Целью статьи является доказательство определяемости любого хьюиттского пространства X решеткой всех подалгебр кольца непрерывных функций на X . Применяется оригинальная техника минимальных и максимальных подалгебр. Исследуются также некоторые алгебраические свойства решетки подалгебр кольца непрерывных функций.

Пусть X – топологическое пространство и $C(X)$ – кольцо всех непрерывных $\mathbb{R}$ -значных отображений, заданных на X , с поточечно определенными операциями. Как обычно, $\mathbb{R}$ – это топологическое поле действительных чисел. Обозначим через $A(X)$ решетку всех $\mathbb{R}$ -подалгебр кольца $C(X)$ относительно отношения включения ' $\subseteq$ '. Решетка $A(X)$ является полной с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом $C(X)$. Минимальные (ненулевые) подалгебры в $C(X)$ – это атомы решетки $A(X)$, а максимальные (собственные) подалгебры – ее коатомы.

Хаусдорфово пространство X называется *тихоновским*, если для любого замкнутого множества $V \subseteq X$ и любой точки $x \in X \setminus V$ найдется функция $f \in C(X)$ такая, что $f(V) = \{0\}$ и $f(x) = 1$. Тихоновское пространство X называется *хьюиттовским* (или *Q-пространством*, вещественно полным, функционально замкнутым), если все $\mathbb{R}$ -идеалы кольца $C(X)$ являются фиксированными максимальными идеалами. Напомним, что идеал M в $C(X)$ называется $\mathbb{R}$ -идеалом, если факторкольцо $C(X)/M$ изоморфно полю $\mathbb{R}$. Идеалы вида $M_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$, $x \in X$, называются *фиксированными максимальными идеалами*. Хорошо известны следующие характеристики (см., например, [1]): топологическое пространство является тихоновским (хьюиттовским) тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно подпространству (замкнутому подпространству) некоторой тихоновской степени пространства $\mathbb{R}$. Топологическое пространство X называется $\mathbb{R}$ -отделимым, если для любых двух различных его точек x и y существует $f \in C(X)$, для которой $f(x) \neq f(y)$. Нуль-множеством на X называется множество

вида $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$, $f \in C(X)$. Множество $\text{coz } f = X \setminus Z(f)$ при $f \in C(X)$ называется *конуль-множеством*.

Говорят, что *хьюиттовское пространство* X *определяется решеткой* $A(X)$, если для любого хьюиттовского пространства Y изоморфность решеток $A(Y) \cong A(X)$ влечет гомеоморфность пространств $Y \approx X$. Проблема определяемости хьюиттовских пространств X решетками $A(X)$ ставилась автором на Тираспольской школе по топологической алгебре в августе 1988 года и на Общемосковском топологическом семинаре имени П. С. Александрова в мае 1994 года. Определяемость произвольного хьюиттовского пространства X кольцом $C(X)$ доказана Хьюиттом еще в 1948 году. Теории определяемости топологических пространств посвящен обзор [2].

Следующие две теоремы являются основными в работе.

ТЕОРЕМА 1. *Всякое хьюиттовское пространство X определяется решеткой $A(X)$.*

ТЕОРЕМА 2. *Для любых двух топологических пространств X и Y эквивалентны условия:*

- 1) *решетки $A(X)$ и $A(Y)$ изоморфны;*
- 2) *кольца $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны.*

Теорема 2 вытекает из теоремы 1. Действительно, поскольку любой изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$ является их изоморфизмом как $\mathbb{R}$ -алгебр [1, 1J], то 2) влечет 1). Известно также [1, теоремы 3.9 и 8.7], что для произвольного топологического пространства Z существуют тихоновское пространство τZ и хьюиттовское пространство $\nu \tau Z$, для которых кольца $C(Z)$, $C(\tau Z)$ и $C(\nu \tau Z)$ канонически изоморфны. Пусть теперь $A(X) \cong A(Y)$. Тогда $A(\nu \tau X) \cong A(\nu \tau Y)$. По теореме 1 $\nu \tau X \approx \nu \tau Y$. Стало быть, $C(X) \cong C(\nu \tau X) \cong C(\nu \tau Y) \cong C(Y)$. Значит, и условие 1) влечет условие 2).

Отметим, что необходимые теоретико-решеточные понятия можно найти в книге [3].

1. Минимальные и максимальные подалгебры. Пока на топологическое пространство X не накладывается никаких ограничений. Подалгебры $\mathbb{R}$ -алгебры $C(X)$ будем называть также *подалгебрами на X* . Заметим, что все идеалы кольца $C(X)$ являются подалгебрами на X . Решеточными операциями в $A(X)$ служат $A \cap B$ и $A \vee B = A + B + AB$, где $AB = \{\sum a_i b_i : a_i \in A, b_i \in B\}$.

Для $f \in C(X)$ пусть $[f] \in A(X)$ – подалгебра, порожденная f . Конечно, $[f]$ представляет собой подалгебру на X всех многочленов от f с действительными коэффициентами и без свободных членов.

Минимальные подалгебры на X легко описываются.

ЛЕММА 1. *Подалгебра $A \in A(X)$ минимальна тогда и только тогда, когда $A = e\mathbb{R}$ для некоторого ненулевого идемпотента e из $C(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что подалгебры $e\mathbb{R}$, $e \neq 0$ и $e^2 = e \in C(X)$, минимальны. Предположим, что A – минимальная подалгебра на X . Возьмем ненулевую функцию $f \in A$ и рассмотрим подалгебру $[f^2]$. Тогда $A = [f^2]$, и $f = f^2 g$ для подходящего многочлена g от f с действительными коэффициентами. Положив $e = fg \in A$, имеем $Z(e) = Z(f)$ и $e = 1$ на $\text{coz } f$. Следовательно, $e^2 = e$ и $A = e\mathbb{R}$.

ЛЕММА 2. *Для любых различных минимальных подалгебр A и B на X подалгебра $A \vee B$ содержит ровно 3 или 7 минимальных подалгебр из $A(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \neq B$ – минимальные подалгебры на X . По лемме 1 $A = e\mathbb{R}$ и $B = f\mathbb{R}$ для ненулевых идемпотентов $e \neq f$ из $C(X)$. Если $Z(e) \subset Z(f)$, $Z(f) \subset Z(e)$ или $ef = 0$, то $e\mathbb{R} \vee f\mathbb{R}$ содержит в точности 3 минимальные подалгебры: $e\mathbb{R}$, $f\mathbb{R}$ и $(e + f - 2ef)\mathbb{R}$. В противном случае, т.е. когда $\text{coz } e$ и $\text{coz } f$ находятся в общем положении, подалгебра $e\mathbb{R} \vee f\mathbb{R}$ содержит 7 минимальных подалгебр на X , а именно: $e\mathbb{R}$, $f\mathbb{R}$, $ef\mathbb{R}$, $(e - ef)\mathbb{R}$, $(f - ef)\mathbb{R}$, $(e + f - 2ef)\mathbb{R}$ и $(e + f - ef)\mathbb{R}$.

При $x \neq y$ из X обозначим через $A_{x,y}$ подалгебру всех функций $f \in C(X)$, для которых $f(x) = f(y)$. Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 3. *Подалгебры $A_{x,y}$, отличные от $C(X)$, и $\mathbb{R}$ -идеалы кольца $C(X)$ являются максимальными подалгебрами на X .*

ЛЕММА 4. *Для собственной подалгебры A на X*

$$A \vee \mathbb{R} = C(X) \iff A \text{ есть } \mathbb{R}\text{-идеал в } C(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить импликацию ' $\implies$ '. Пусть $A \vee \mathbb{R} = C(X)$. Тогда $A + \mathbb{R} = C(X)$. Если $f \in A$ и $g \in C(X)$, то $g = h + r$ для некоторых $h \in A$ и $r \in \mathbb{R}$ и $fg = fh + fr \in A$. Значит, A – идеал кольца $C(X)$ и $C(X)/A \cong \mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть X – хьюиттовское пространство, M – максимальная подалгебра на X , $e\mathbb{R}$ – минимальная подалгебра на X , по крайней мере одно из множеств $\text{coz } e$ или $Z(e)$ компактно и $M \vee e\mathbb{R} = C(X)$. Тогда $M = M_x$ для некоторой точки $x \in X$, если $1 \notin M$, и $M = A_{x,y}$ для подходящих точек $x \in \text{coz } e$ и $y \in Z(e)$, если $1 \in M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 M имеет вид M_x при $1 \notin M$.

Пусть $1 \in M$, т.е. $\mathbb{R} \subseteq M$. Тогда $M + eM = M + (1 - e)M = C(X)$. Значит,

$$M|_{\text{coz } e} = C(\text{coz } e) \quad \text{и} \quad M|_{Z(e)} = C(Z(e)).$$

Можно считать, что конуль-множество $\text{coz } e$ компактно; иначе вместо идемпотента e надо взять идемпотент $1 - e$. Допустим, что имеет место следующее свойство:

$$(\forall x \in \text{coz } e)(\exists f, g \in M)(f = g \text{ на } Z(e) \text{ и } f(x) \neq g(x)),$$

из которого вытекает свойство

$$(\forall x \in \text{coz } e)(\exists h \in M)(h|_{Z(e)} = \{0\} \text{ и } h(x) = 1).$$

Тогда в силу компактности $\text{coz } e$ очевидно существование функции $f \in M$ такой, что $Z(f) = Z(e)$ и $\text{coz } f = \text{coz } e$. Так как выполнено $M|_{\text{coz } e} = C(\text{coz } e)$, в M найдется функция g , равная f^{-1} на $\text{coz } e$. Но тогда получили бы $e = fg \in M$, что невозможно.

Следовательно, наше допущение неверно. Стало быть, существует точка $x \in \text{coz } e$ такая, что

$$(\forall f, g \in M)(f|_{Z(e)} = g|_{Z(e)} \implies f(x) = g(x)).$$

Рассмотрим гомоморфизм $\alpha: C(Z(e)) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(\varphi) = f(x)$, где $f \in C(X)$ – единственное продолжение функции $\varphi \in C(Z(e))$, лежащее в M . Его ядро $\text{Ker } \alpha$ есть $\mathbb{R}$ -идеал кольца $C(Z(e))$. Пространство $Z(e)$ является хьюиттовским вместе с X . Поэтому $\text{Ker } \alpha = M_y \subseteq C(Z(e))$ для некоторой (единственной) точки $y \in Z(e)$, и α есть вычисление в точке y . Теперь, если $f \in M$, то $f(x) = \alpha(f|_{Z(e)}) = f(y)$. Значит, $M \subseteq A_{x,y}$, откуда $M = A_{x,y}$. Предложение доказано.

Если $p \in X$ – *изолированная точка*, т.е. множество $\{p\}$ открыто-замкнуто, то обозначим через e_p идемпотент из $C(X)$, для которого $Z(e_p) = X \setminus \{p\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть p – изолированная точка хьюиттовского пространства X , $A \in A(X)$ и $A \vee e_p \mathbb{R} = C(X)$. Тогда $A = M_p$ или $A = A_{p,y}$ для некоторой точки $y \in X \setminus \{p\}$.

В самом деле, если $A \neq M_p$, то, как и в предложении 1, получаем $A \subseteq A_{p,y}$ при $y \in X \setminus \{p\}$. А поскольку $A + e_p \mathbb{R} = A \vee e_p \mathbb{R} = C(X)$, то $A = A_{p,y}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X – нульмерный компакт и M – максимальная подалгебра на X . Тогда $M \vee A = C(X)$ для некоторой минимальной подалгебры A на X в том и только том случае, когда $M = M_x$ ($x \in X$) или $M = A_{x,y}$ ($x \neq y$ из X).

Напомним, что *компакт* – это компактное хаусдорфово пространство, а *нульмерные пространства* – это топологические пространства, обладающие базой из открыто-замкнутых множеств.

2. Отмеченные подалгебры. Трехэлементное множество $\{e\mathbb{R}, f\mathbb{R}, g\mathbb{R}\}$ минимальных подалгебр на X назовем *простой тройкой* в решетке $A(X)$, если $e\mathbb{R} \vee f\mathbb{R} \vee g\mathbb{R}$ содержит только 3 эти минимальные подалгебры; в силу леммы 2 это означает выполнение одного из равенств: $e = f + g$ (при $fg = 0$), $f = e + g$ или $g = e + f$.

В этом пункте через $M(X)$ будем обозначать множество всевозможных максимальных подалгебр на X . Для $Z \subseteq X$ положим $M_Z = \{h \in C(X) : Z \subseteq Z(h)\}$.

Элемент $e\mathbb{R}$ простой тройки $\{e\mathbb{R}, f\mathbb{R}, g\mathbb{R}\}$ назовем *отмеченным в этой тройке*, если

$$\begin{aligned} &(\cap\{M \in M(X) : M \vee e\mathbb{R} = C(X) \text{ и } f\mathbb{R} \subseteq M\}) \\ &\vee (\cap\{M \in M(X) : M \vee e\mathbb{R} = C(X) \text{ и } g\mathbb{R} \subseteq M\}) = C(X). \end{aligned}$$

Наконец, минимальную подалгебру на X назовем *отмеченной подалгеброй*, если она является отмеченным элементом некоторой простой тройки в $A(X)$.

Подчеркнем, что понятия простой тройки, отмеченного элемента простой тройки в решетке $A(X)$ и отмеченной подалгебры на X являются чисто решеточными.

В леммах 5 и 6 пространство X предполагается хьюиттовским.

ЛЕММА 5. Минимальная подалгебра $e\mathbb{R}$ является отмеченным элементом в данной простой тройке $\{e\mathbb{R}, f\mathbb{R}, g\mathbb{R}\}$ решетки $A(X)$ тогда и только тогда, когда $e = 1$ или $e = e_p$ для некоторой изолированной точки $p \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned} A &= \cap\{M \in M(X) : M \vee e\mathbb{R} = C(X) \text{ и } M \ni f\}, \\ B &= \cap\{M \in M(X) : M \vee e\mathbb{R} = C(X) \text{ и } M \ni g\}. \end{aligned}$$

Проверим сначала отмеченность $e\mathbb{R}$ в случаях $e = 1$ и $e = e_p$. Пусть $e = 1$. Тогда $g = 1 - f$. По лемме 4

$$A = \cap\{M_x : x \in Z(f)\} = M_{Z(f)}, \quad B = \cap\{M_x : x \in Z(g)\} = M_{\text{coz } f}.$$

Откуда $A \vee B = M_{Z(f)} + M_{\text{coz } f} = C(X)$.

Пусть $e = e_p$ и, скажем, $g = e_p + f$. По следствию 1

$$A = M_p \cap (\cap\{A_{p,x} : x \in Z(f)\}) = M_{Z(f)}, \quad B = \cap\{A_{p,x} : x \in \text{coz } g\} = M_{\text{coz } g} + \mathbb{R}.$$

Значит, $A \vee B = M_{Z(f)} + M_{\text{coz } g} + \mathbb{R} = M_p + \mathbb{R} = C(X)$.

Покажем, что в остальных случаях $e\mathbb{R}$ не является отмеченным элементом простой тройки $\{e\mathbb{R}, f\mathbb{R}, g\mathbb{R}\}$. Это случаи: $e = f + g \neq 1$ и $g = e + f$ при $|\text{coz } e| \geq 2$.

Пусть сначала $e = f + g \neq 1$. Тогда по лемме 3 $A \subseteq \cap \{M \in M(X) : M = M_x \text{ при } x \in \text{coz } g \text{ или } M = A_{y,z} \text{ при } y \in \text{coz } g, z \in Z(e)\} = M_{Z(f)}$. Аналогично, $B \subseteq M_{Z(g)}$. Поэтому

$$A \vee B \subseteq M_{Z(f)} + M_{Z(g)} = M_{Z(e)} \neq C(X).$$

Наконец, пусть $g = e + f$ и $|\text{coz } e| \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} A &\subseteq (\cap \{M_x : x \in \text{coz } e\}) \cap (\cap \{A_{y,z} : y \in \text{coz } e, z \in Z(g)\}) = M_{Z(f)}, \\ B &\subseteq \cap \{A_{x,y} : x \in \text{coz } e, y \in \text{coz } f\} = M_{\text{coz } g} + \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Все функции из $A \vee B$ являются константами на множестве $\text{coz } e$, содержащем по крайней мере две точки. Значит, $A \vee B \neq C(X)$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для всякого $\mathbb{R}$ -отделимого пространства X справедливы следующие утверждения:

а) эквивалентны условия:

X связно;

на X существует единственная минимальная подалгебра $\mathbb{R}$;

на X нет отмеченных подалгебр;

б) если X несвязно, то отмеченными подалгебрами на X служат в точности подалгебры $\mathbb{R}$ и $e_p\mathbb{R}$ для изолированных точек p пространства X ;

в) если X несвязно, то оно имеет хотя бы одну изолированную точку тогда и только тогда, когда на X существует более одной отмеченной подалгебры;

г) существование в решетке $A(X)$ простой тройки, все элементы которой отмеченные, равносильно тому, что X – несвязное двосточие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 2 сразу следует из леммы 5. Только надо учесть, что операции тихоновизации τ и хьюиттского расширения ν , о которых говорилось во введении, последовательно примененные к $\mathbb{R}$ -отделимому пространству, сохраняют его связность и изолированные точки (в обе стороны).

ЛЕММА 6. Пусть $\{\mathbb{R}, e_p\mathbb{R}, (1 - e_p)\mathbb{R}\}$ – простая тройка в $A(X)$ с отмеченными элементами $e_p\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$. Тогда $(1 - e_p)\mathbb{R} \subseteq M_p$ и M_p – единственный элемент решетки $A(X)$, являющийся дополнением и $\mathbb{R}$, и $e_p\mathbb{R}$.

Лемма 6 вытекает из леммы 4 и следствия 1.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть для произвольных хьюиттовских пространств X и Y дан изоморфизм α решетки $A(X)$ на решетку $A(Y)$. Рассмотрим $\alpha(\mathbb{R})$. На основании утверждений а) и б) предложения 2 имеем $\alpha(\mathbb{R}) = e\mathbb{R}$, где $e = 1$ или $e = e_q$ для некоторой изолированной точки $q \in Y$. Разберем эти случаи.

Первый случай: $e = 1$. По лемме 4 дополнениями $\mathbb{R}$ в решетке $A(X)$ (в $A(Y)$) являются в точности фиксированные максимальные идеалы кольца $C(X)$ ($C(Y)$). Поэтому изоморфизмы α и α^{-1} сохраняют фиксированные максимальные идеалы. Полагая для любых $x \in X$ и $y \in Y$

$$\varphi(x) = y \iff \alpha(M_x) = M_y,$$

получаем биекцию φ пространства X на пространство Y .

Покажем, что φ – гомеоморфизм. Для этой цели возьмем произвольную функцию $f \in C(X)$ и подалгебру $[f] \in A(X)$. Подалгебра $\alpha([f]) \in A(Y)$ порождена некоторым конечным числом функций $g_1, \dots, g_n \in C(Y)$. Действительно, конечная порожденность произвольной подалгебры $A \in A(Z)$ является решеточным свойством: A – компактный элемент решетки $A(Z)$ [3, с. 243]. Имеем, далее,

$$\begin{aligned}\varphi(Z(f)) &= \varphi(\{x \in X : [f] \subseteq M_x\}) = \{y \in Y : \alpha([f]) \subseteq M_y\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{y \in Y : g_i \in M_y\} = \bigcap_{i=1}^n Z(g_i) = Z\left(\sum_{i=1}^n g_i^2\right).\end{aligned}$$

Итак, φ сохраняет нуль-множества. Конечно, φ^{-1} также сохраняет нуль-множества. Поскольку нуль-множества образуют базу замкнутых множеств в любом тихоновском пространстве, то биекция φ осуществляет гомеоморфность пространств X и Y .

Второй случай: $e = e_q$. В силу утверждения б) предложения 2 $\alpha^{-1}(\mathbb{R}) = e_p\mathbb{R}$ для подходящей изолированной точки $p \in X$. Простая тройка $\{\mathbb{R}, e_p\mathbb{R}, (1 - e_p)\mathbb{R}\}$ в $A(X)$ переводится изоморфизмом α в простую тройку $\{e_q\mathbb{R}, \mathbb{R}, (1 - e_q)\mathbb{R}\}$ решетки $A(Y)$. Поэтому $\alpha((1 - e_p)\mathbb{R}) = (1 - e_q)\mathbb{R}$. По лемме 6 $\alpha(M_p) = M_q$. Заметим, что подрешетка в $A(X)$, составленная из подалгебр на X , содержащихся в M_p , изоморфна решетке $A(X \setminus \{p\})$ при сужении функций из M_p на хьюиттовское пространство $X \setminus \{p\}$. При этом подалгебре $(1 - e_p)\mathbb{R}$ на X отвечает подалгебра $\mathbb{R}$ на $X \setminus \{p\}$. Аналогично, подалгебры в M_q образуют решетку, канонически изоморфную $A(Y \setminus \{q\})$. Следовательно, можно считать, что α осуществляет изоморфизм решетки $A(X \setminus \{p\})$ на решетку $A(Y \setminus \{q\})$, причем переводит $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Согласно первому случаю подпространство $X \setminus \{p\}$ пространства X гомеоморфно подпространству $Y \setminus \{q\}$ пространства Y . Очевидно, что тогда и $X \approx Y$.

4. О свойствах решетки $A(X)$. Будет показано, что решетка $A(X)$, как правило, немодулярна.

Пусть X – произвольное $\mathbb{R}$ -отделимое пространство. В зависимости от мощности $|X|$ пространства X рассмотрим четыре случая.

1. При $|X| = 1$ получаем цепь $A(X) = \{0, \mathbb{R}\}$.

2. Пусть $|X| = 2$. Тогда $X = \{x, y\}$ – дискретное двоеточие. Получаем модулярную, но не дистрибутивную решетку $A(X) = \{0, \mathbb{R}, e_x\mathbb{R}, e_y\mathbb{R}, C(X)\}$.

3. Пусть $|X| = 3$. Тогда $X = \{x, y, z\}$ – дискретное трехэлементное пространство. Решетка $A(X)$ немодулярна, ибо содержит немодулярную пятиэлементную подрешетку $\{0, (1 - e_z)\mathbb{R}, (1 - e_x)\mathbb{R}, A_{y,z}, C(X)\}$. Имеем $|A(X)| = 15$.

4. Пусть $|X| \geq 4$. Выберем в X попарно различные точки x_1, x_2, y_1, y_2 . Возьмем функцию $f \in C(X)$ так, чтобы $f(x_1) = f(x_2) = 1$ и $f(y_1) = f(y_2) = 0$. Рассмотрим подалгебры $[f]$ и $A = A_{x_1, y_1} \cap A_{x_2, y_2}$. Ясно, что

$$A \cap [f] = \left\{ r_n f^n + \dots + r_1 f : r_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n r_i = 0 \right\} = A_{x_1, y_1} \cap [f].$$

Докажем равенство $A \vee [f] = C(X)$. Достаточно показать, что $A_{x_1, y_1} \subseteq A \vee [f]$. Возьмем $g \in A_{x_1, y_1}$. Так как $\mathbb{R} \subseteq A$, можно считать, что $g(x_1) = g(y_1) = 0$. В силу

$\mathbb{R}$ -отделимости пространства X существует функция $\varphi \in A$ такая, что $\varphi(x_1) = \varphi(y_1) = 0$ и $\varphi(x_2) = \varphi(y_2) = g(x_2) - g(y_2)$. Для $h = g - f\varphi$ имеем

$$h(x_1) = h(y_1) = 0, \quad h(x_2) = g(x_2) - (g(x_2) - g(y_2)) = g(y_2) = h(y_2).$$

Значит, $h \in A$ и $g = f\varphi + h \in A \vee [f]$. В результате получаем в $A(X)$ немодулярную подрешетку $\{A \cap [f], [f], A, A_{x_1, y_1}, C(X)\}$.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. *Для любого $\mathbb{R}$ -отделимого пространства X имеют место утверждения:*

- а) *решетка $A(X)$ модулярна $\iff |X| \leq 2$;*
- б) *решетка $A(X)$ дистрибутивна $\iff |X| = 1$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо $\mathbb{R}$ можно брать различные топологические поля E , скажем, локально компактные поля (см. [2, § 2]). Для них верны все результаты работы (с очевидными изменениями). Основной результат звучит так:

любое E -компактное пространство X определяется решеткой всех подалгебр E -алгебры $C(X, E)$ всех непрерывных E -значных функций на X .

В связи с изложенным естественно возникает следующая

ПРОБЛЕМА. *Дать описание всех максимальных подалгебр на хьюиттовских пространствах. В частности, не исчерпываются ли подалгебрами вида M_x и $A_{x, y}$ все максимальные подалгебры в $C(X)$ для компактов X ? Отметим, что по теореме Стоуна–Вейерштрасса среди замкнутых в равномерной топологии (а также в топологии поточечной сходимости) других максимальных подалгебр на компактах нет.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gillman L., Jerison M. Rings of Continuous Functions. New York: Springer, 1976.
- [2] Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1990. С. 3–46.
- [3] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.

Вятский государственный педагогический университет

Поступило
15.02.96