Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Гришина, О компактности носителя решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка в полуцилиндре, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 700–711

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1657>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:06:35

УДК 517.956

О КОМПАКТНОСТИ НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛУЦИЛИНДРЕ

Г. В. Гришина

В работе изучаются решения уравнений вида

$$\begin{aligned} u_{tt} + Lu + b(x, t)u_t &= a(x, t)|u|^{\sigma-1}u, \\ -u_t + Lu &= a(x, t)|u|^{\sigma-1}u, \end{aligned}$$

где L – равномерно эллиптический оператор. Рассмотрен случай $0 < \sigma < 1$. Найдены условия, при которых решения уравнения в полуцилиндре $\Pi_{0,\infty} = \{(x, t) : x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, t > 0\}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, удовлетворяющие при $x \in \partial\Omega, t > 0$ однородному условию Неймана, имеют компактный носитель. Устанавливаются утверждения типа: если $u(x, t) = o(t^\gamma)$ при $t \rightarrow \infty$, то существует T такое, что при $t > T$ $u(x, t) \equiv 0$. При этом γ зависит от коэффициентов уравнения и степенного показателя σ .

Библиография: 15 названий.

В полуограниченном цилиндре $\Pi_{0,\infty} = \{(x, t) : x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, t > 0\}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{1,1}$, будем рассматривать уравнения вида

$$u_{tt} + Lu + b(x, t)u_t = a(x, t)|u|^{\sigma-1}u, \quad (1)$$

$$u_{tt} + \mathcal{L}u + b(x, t)u_t = a(x, t)|u|^{\sigma-1}u, \quad (2)$$

$$-u_t + Lu = a(x, t)|u|^{\sigma-1}u, \quad (3)$$

$$-u_t + \mathcal{L}u = a(x, t)|u|^{\sigma-1}u, \quad (4)$$

где $0 < \sigma < 1$,

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t)u_{x_i}, \\ \mathcal{L}u &= \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t)u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t)u_{x_i}. \end{aligned}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00504.

– равномерно эллиптические операторы такие, что для любых $(x, t) \in \Pi_{0,\infty}$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \lambda, \Lambda > 0.$$

Коэффициенты $a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t)$, $a_i(x, t)$, $a(x, t)$, $b(x, t)$ – ограниченные, измеримые на любом конечном цилиндре $\Pi_{0,t_0} = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, t_0)\}$, $t_0 > 1$, функции, $a(x, t) \geq a_0(t+1)^{-\varepsilon} > 0$, $|b(x, t)| \leq b_0(t+1)^\alpha$, $a_0, b_0 = \text{const} > 0$, $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$. В операторе L $a_i(x, t) \in L_q(\Pi_{0,t_0})$, $q > n$.

Предполагаем, что на боковой границе цилиндра задано однородное условие Неймана

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)u_{x_j}\nu_i = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (5)$$

где ν – вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$.

Уравнения (1), (2) при $\sigma > 1$ и $0 < \sigma < 1$ имеют различные свойства. Как известно, при $\sigma > 1$ всякое решение уравнения

$$\Delta u + ku_t = |u|^{\sigma-1}u, \quad (6)$$

удовлетворяющее условию (5), стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$ [1]. При этом характер стремления к 0 зависит от знака k , а именно:

$$u = \begin{cases} O(t^{1/(1-\sigma)}) & \text{при } k < 0, \\ O(t^{2/(1-\sigma)}) & \text{при } k = 0, \\ O(e^{-\mu t}) & \text{при } k > 0. \end{cases}$$

(см. [2]).

Если $0 < \sigma < 1$, то уравнение (6) может иметь как растущие при $t \rightarrow \infty$, так и имеющие компактный носитель решения. Например, при $k = 0$ это будут функции

$$u_1 = \left[\frac{(1-\sigma)^2}{2(1+\sigma)} \right]^{1/(1-\sigma)} t^{2/(1-\sigma)},$$

$$u_2 = \begin{cases} \left[\frac{(1-\sigma)^2}{2(1+\sigma)} \right]^{1/(1-\sigma)} (T-t)^{2/(1-\sigma)}, & 1 < t < T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

В связи с этим возникает вопрос о предельном порядке роста решения $u(x, t) = o(t^\gamma)$ при $t \rightarrow \infty$, для которого можно утверждать, что решение имеет компактный носитель. Из настоящей работы следует, в частности, что для $0 < \sigma < 1$ поведение решения уравнения (6) при $t \rightarrow \infty$ в отличие от случая $\sigma > 1$ не зависит от знака k . А именно, при любом k , если $u(x, t) = o(t^{2/(1-\sigma)})$, то существует $T > 1$, для которого $u \equiv 0$ при $t \geq T$. Это означает, что такие уравнения не могут иметь знакопостоянных или осциллирующих решений, стремящихся к 0 при $t \rightarrow \infty$.

Как будет показано, наличие в уравнениях (1) и (2) членов, содержащих u_t , и поведение при $t \rightarrow \infty$ коэффициентов $a(x, t)$, $b(x, t)$ существенно влияют на условия, при которых решения задач (1), (5); (2), (5); (3), (5); (4), (5) имеют компактный носитель.

Вопрос о “мертвых зонах” для уравнений типа (1), (2) при $0 < \sigma < 1$ рассматривался ранее в работах [3]–[10] при более жестких условиях на коэффициенты. В частности, везде существенно используется отделенность от нуля коэффициента при нелинейном члене уравнения. Обращение этого коэффициента в 0 на множестве положительной меры допускается в работе [11], но при этом изучаются только задачи (2), (5) и (4), (5) для уравнений, не содержащих младших членов, с коэффициентами, не зависящими от t . Эффект локализации решений полулинейных параболических уравнений изучался также в работах [12], [13].

Рассуждения настоящей работы основаны на рассмотрении решений соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y'' \pm b(t+1)^\alpha y' &= a(t+1)^{-\varepsilon} |y|^{\sigma-1} y, \\ -y' &= a(t+1)^{-\varepsilon} |y|^{\sigma-1} y \end{aligned}$$

и применении принципа максимума.

Автор благодарит профессора В. А. Кондратьева за полезные обсуждения.

1. Эллиптические уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Классическим решением* задачи (1), (5) называется функция $u(x, t) \in C^2(\Pi_{0,\infty}) \cap C^1(\overline{\Pi_{0,\infty}})$, удовлетворяющая в $\Pi_{0,\infty}$ уравнению (1) и условию (5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Слабым решением* задачи (2), (5) называется функция $u(x, t) \in W_2^1(\Pi_{0,t_0})$, $t_0 > 0$, такая, что для любой функции $\xi(x, t) \in W_2^1(\Pi_{0,t_0})$, удовлетворяющей условиям $\xi(x, t) \geq 0$, $\xi(x, 0) \equiv 0$, $\xi(x, t) \equiv 0$ при $t \geq t_0$, $x \in \bar{\Omega}$, справедливо тождество

$$Q(x, t) = \int_{\Pi_{0,t_0}} a(x, t) |u|^{\sigma-1} u \xi \, dx \, dt,$$

где

$$Q(x, t) = \int_{\Pi_{0,t_0}} \left[-u_t \xi t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_j} \xi_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} \xi + b(x, t) u_t \xi \right] dx \, dt.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть в уравнении (1) $b(x, t) \geq 0$, $\varepsilon \leq 2$, α – произвольное действительное число и классическое решение задачи (1), (5) $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда найдется $T > 0$ такое, что $u(x, t) \equiv 0$ при $t > T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие $\varepsilon \leq 2$ точное. При $\varepsilon > 2$ уравнение

$$\Delta u = (t+1)^{-\varepsilon} |u|^{\sigma-1} u \tag{7}$$

имеет два знакоопределенных, стремящихся к 0 при $t \rightarrow \infty$ решения

$$u_{1,2} = \pm \left[\frac{(1-\sigma)^2}{(1+\sigma-\varepsilon)(2-\varepsilon)} \right]^{1/(1-\sigma)} (t+1)^{(2-\varepsilon)/(1-\sigma)},$$

удовлетворяющих на боковой поверхности цилиндра однородному условию Неймана.

Тем не менее, утверждение теоремы справедливо и при $\varepsilon > 2$, если дополнительно предположить, что $\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x, 0)|$ достаточно мал, или $u(x, t) \rightarrow 0$ с указанной скоростью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим функцию

$$v(t) = \begin{cases} C(T-t)^{2/(1-\sigma)}, & 0 < t < T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

Очевидно, $v(t) \in C^2(\overline{\Pi_{0,\infty}})$ и удовлетворяет краевому условию (5). Выбирая постоянную C так, чтобы для любого $t \in (0, T)$ выполнялось неравенство

$$v_{tt} + Lv + b(x, t)v_t - a(x, t)|v|^{\sigma-1}v \leq 0, \quad (8)$$

получим

$$C \leq \begin{cases} \left[\frac{a_0(1-\sigma)^2}{2(1+\sigma)} \right]^{1/(1-\sigma)}, & \varepsilon \leq 0, \\ \left[\frac{a_0(1-\sigma)^2}{2(T+1)^\varepsilon(1+\sigma)} \right]^{1/(1-\sigma)}, & \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Теперь, зафиксировав C , определим T из условия

$$M = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x, 0)| < v(0) = CT^{2/(1-\sigma)}.$$

Учитывая оценки для C , получим

$$M < \begin{cases} \left[\frac{a_0(1-\sigma)^2}{2(1+\sigma)} \right]^{1/(1-\sigma)} T^{2/(1-\sigma)}, & \varepsilon \leq 0, \\ \left[\frac{a_0(1-\sigma)^2}{2(T+1)^\varepsilon(1+\sigma)} \right]^{1/(1-\sigma)} T^{2/(1-\sigma)}, & \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Первое неравенство всегда разрешимо относительно T , а второе разрешимо при любом M только для $\varepsilon < 2$. Если $\varepsilon = 2$, правая часть второго неравенства в (9) монотонно возрастает при $T \rightarrow \infty$, причем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{(1-\sigma)^2}{2(T+1)^2(1+\sigma)} \right]^{1/(1-\sigma)} T^{2/(1-\sigma)} = \left[\frac{a_0(1-\sigma)}{2(1+\sigma)} \right]^{1/(1-\sigma)} = M_a.$$

Следовательно, если $M < M_a$, то T может быть найдено.

Пусть теперь $\varepsilon = 2$, $M \geq M_a$. В этом случае рассмотрим функцию $v(t)$ при $t \geq T_0 > 0$. Тогда T нужно выбирать из условия

$$M_{T_0} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x, T_0)| < v(T_0) = C(T - T_0)^{2/(1-\sigma)} < M_a \left[\frac{T - T_0}{T + 1} \right]^{2/(1-\sigma)}. \quad (10)$$

Так как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{T - T_0}{T + 1} \right]^{2/(1-\sigma)} = 1 \quad \forall T_0 \geq 0$$

и $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, найдется $T_0 \geq 0$ такое, что $M_{T_0} < M_a$, а значит, можно подобрать $T > T_0$, при котором справедливо неравенство (10).

Итак, пусть выбраны C , $T_0 \geq 0$, T . Тогда для функции v выполняется неравенство (8). Рассмотрим функцию $w(x, t) = v(t) - u(x, t)$. При $t = T_0 \geq 0$ функция $w > 0$ и $w \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Покажем, что $w \geq 0$ в $\Pi_{T_0, \infty}$. Если предположить, что последнее неравенство нарушается, то функция w должна иметь отрицательный минимум

$$\min_{\Pi_{T_0, \infty}} w(x, t) = -\delta.$$

Так как $w \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, найдется $T_1 > T$ такое, что $|w| \leq \delta/2$ при $t \geq T_1$, но тогда

$$\min_{\Pi_{T_0, T_1}} w(x, t) = -\delta.$$

Заметим, что минимум не может достигаться при $t = T_0$ и $t = T_1$. Кроме того, учитывая (8), имеем

$$w_{tt} + Lw + b(x, t)w_t \leq a(x, t)(|v|^{\sigma-1}v - |u|^{\sigma-1}u).$$

Если $u \neq v$, то правая часть этого неравенства имеет тот же знак, что и w . Поэтому из принципа максимума [14] следует, что отрицательный минимум не может достигаться ни внутри цилиндра Π_{T_0, T_1} , ни на его боковой поверхности.

Таким образом, $w \geq 0$ в Π_{T_0, T_1} . Устремляя T_1 к бесконечности, получим, что $v \geq u$ в $\Pi_{T_0, \infty}$. Проводя аналогичные рассуждения для $-u$, получим, что $u \geq -v$. Но $v \equiv 0$ при $t \geq T$, а следовательно, $u \equiv 0$ при $t \geq T$.

Теорема доказана.

Пусть теперь $\varepsilon > 2$. Тогда правая часть неравенства (9) принимает максимальное значение при $T = 2/(\varepsilon - 2) > 1$. Значит, подходящее T может быть найдено, если

$$M < \left[\frac{a_0(1-\sigma)^2(\varepsilon-2)^{\varepsilon-2}}{2(1+\sigma)\varepsilon^\varepsilon} \right]^{1/(1-\sigma)}.$$

В противном случае рассмотрим при $\varepsilon > 2$ функцию $v(t)$ при $t \geq T_0 = T/2 > 0$ и придем к необходимости выполнения условия

$$M_{T_0} < M_a \left[\frac{(\varepsilon-2)^{\varepsilon-2}}{\varepsilon^\varepsilon} \right]^{1/(1-\sigma)} (2T_0 + 1)^{(2-\varepsilon)/(1-\sigma)}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к 0 при $\varepsilon > 2$, $T_0 \rightarrow \infty$. Следовательно, оно может быть выполнено при некотором T_0 , если, например, задана скорость стремления к 0 решения $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Это может быть условие типа

$$u(x, t) = o(t^{(2-\varepsilon)/(1-\sigma)}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть в уравнении (1) $b(x, t) \geq 0$, $\varepsilon > 2$, α – произвольное действительное число, $u(x, t)$ – классическое решение задачи (1), (5). Тогда, если

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, 0)| < \left[\frac{a_0(1-\sigma)^2(\varepsilon-2)^{\varepsilon-2}}{2(1+\sigma)\varepsilon^\varepsilon} \right]^{1/(1-\sigma)}, \quad u(x, t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

или выполнено (11), то найдется $T > 0$ такое, что $u(x, t) \equiv 0$ при $t \geq T$.

Рассмотрим теперь задачу (2), (5) в $\Pi_{0,\infty}$. Всюду в дальнейшем, где речь идет о слабых решениях, можно считать, что $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

Заметим, что если функция $v(t)$ удовлетворяет неравенству (8) п.в. в $\Pi_{0,\infty}$ и имеет непрерывную первую производную, то для нее это неравенство справедливо и в слабом смысле, т.е.

$$Q(x, t) \leq \int_{\Pi_{0,\infty}} a(x, t) |v|^{\sigma-1} v \xi \, dx \, dt$$

для любой $\xi(x, t)$, описанной в определении 2. Таким образом, повторяя для слабых решений задачи (2), (5), стремящихся к 0 при $t \rightarrow \infty$, рассуждения, приведенные в доказательствах теорем 1 и 2, придем к рассмотрению функции w , для которой справедлива оценка

$$Q(x, t) \leq \int_{\Pi_{0,\infty}} a(x, t) (|v|^{\sigma-1} v - |u|^{\sigma-1} u) \xi \, dx \, dt. \quad (12)$$

По принципу максимума для уравнений в дивергентной форме [8] w не может иметь отрицательного минимума во внутренних точках $\Pi_{0,\infty}$. Очевидно, он не может достигаться при $t = 0$. Покажем, что никакая точка (x_0, t_0) на боковой поверхности $\Pi_{0,\infty}$ не может быть точкой отрицательного минимума функции w . Действительно, после локального распрямления границы цилиндра в окрестности точки (x_0, t_0) с помощью липшицева преобразования и продолжения решения $u(x, t)$ уравнения (2) через распрямленный участок границы с учетом условия (5) четным образом получим функцию, принадлежащую в окрестности (x_0, t_0) тому же классу, что и $u(x, t)$, и удовлетворяющую уравнению той же структуры, что и (2), но точка (x_0, t_0) уже будет внутренней для этой окрестности. Свойство точки (x_0, t_0) быть точкой минимума для $u(x, t)$ сохраняется и для продолженной четным образом функции. При этом остается верным и неравенство (12) для продолженной через границу функции w . Применяя принцип максимума, приходим к противоречию.

Итак, утверждения теорем 1 и 2 имеют место и для слабых решений задачи (2), (5), стремящихся к 0 при $t \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Значение параметра $\varepsilon = 2$ является критическим при рассмотрении стремящихся к 0 при $t \rightarrow \infty$ решений. В то же время, зависимость от t коэффициента при нелинейном члене уравнения существенно влияет на поведение решения при $t \rightarrow \infty$. Действительно, в работе [11] показано, что если решение уравнения

$$u_{tt} + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} = a(x) |u|^{\sigma-1} u$$

в $\Pi_{0,\infty}$, удовлетворяющее условию (5), где $a(x) \geq 0$, таково, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \|u(x, t)\|_{L_1(\Omega)} = 0,$$

то существуют $C, \mu > 0$, для которых при достаточно больших t справедлива оценка $|u(x, t)| \leq Ce^{-\mu t}$. Если же $a(x) \geq a_0 > 0$, то такие решения имеют компактный носитель.

Из доказанных теорем следует, что уравнение

$$\Delta u = (1+t)^{-\varepsilon} |u|^{\sigma-1} u$$

вообще не имеет экспоненциально убывающих решений, а условия на рост решения при $t \rightarrow \infty$, достаточные для компактности носителя, зависят от ε .

ТЕОРЕМА 3. Пусть в уравнениях (2) и (1) $b(x, t) \geq -B_1(t+1)^\alpha$, где $B_1 > 0$, $u(x, t)$ – решение задачи (1), (5) или (2), (5) в $\Pi_{0,\infty}$, причем $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда найдется $T > 0$ такое, что $u(x, t) \equiv 0$ при $t \geq T$, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\varepsilon \leq 0, \alpha < 1$;
- 2) $0 \leq \varepsilon \leq 1, \alpha \leq 1 - \varepsilon$;
- 3) $\varepsilon \leq 0, \alpha > 1, u(x, t) = o(t^{(1-\alpha)/(1-\sigma)}), t \rightarrow \infty$;
- 4) $\varepsilon > 1, \alpha \leq 0, u(x, t) = o(t^{(1-\varepsilon)/(1-\sigma)}), t \rightarrow \infty$;
- 5) $\varepsilon > 0, \alpha > \max\{0, 1 - \varepsilon\}, u(x, t) = o(t^{(1-\alpha-\varepsilon)/(1-\sigma)}), t \rightarrow \infty$.

Доказательство этой теоремы также основано на построении барьерной функции

$$v(t) = \begin{cases} C(T-t)^{2/(1-\sigma)}, & t \in (T_0, T), \\ 0, & t \geq T, \end{cases}$$

удовлетворяющей неравенству (8), и применении принципа максимума. Отличие состоит в том, что постоянную C необходимо выбирать согласно оценке

$$C \leq \left[\frac{1}{a}(t+1)^\varepsilon \left(\frac{2(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2} + \frac{2B_1}{1-\sigma}(t+1)^\alpha(T-t) \right) \right]^{1/(\sigma-1)},$$

которая должна быть справедлива для всех $t \in (0, T)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как и в теореме 2, можно указать постоянные M_1, M_2, M_3 , для которых из условия $\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x, t)| \leq M_i, i = 1, 2, 3$, если $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, следует, что решение имеет компактный носитель, когда выполнены соотношения между ε и α из условий 3)–5) соответственно.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1), (5) или (2), (5) в $\Pi_{0,\infty}$, причем $-B_1(T+1)^\alpha \leq b(x, t) \leq B_2(T+1)^\alpha$, где $B_1, B_2 \geq 0$. Тогда найдется $T > 0$ такое, что $u(x, t) \equiv 0$ при $t \geq T$, если

- 1) $u(x, t) = o(t^{(2-\varepsilon)/(1-\sigma)}), t \rightarrow \infty, \varepsilon \leq 2\sigma$ в случае задачи (1), (5) или $\varepsilon \leq 1 + \sigma$ в случае задачи (2), (5), и выполнено одно из следующих условий:
а) $B_1 = 0, B_2 = 0$;

- б) $B_1 > 0, B_2 > 0, \alpha \leq -1, \varepsilon \leq 1$;
 в) $B_1 = 0, B_2 > 0, \alpha \leq -1$;
 г) $B_1 > 0, B_2 = 0, \varepsilon \leq 0, \alpha \leq 1$ или $0 \leq \varepsilon \leq 1, \alpha \leq 1 - \varepsilon$;
 или
 2) $u = o(t^{(1-\alpha-\varepsilon)/(1-\sigma)}), t \rightarrow \infty, 1 + \alpha + \varepsilon \leq 2\sigma$ в случае задачи (1), (5) или $\alpha + \varepsilon \leq \sigma$ в случае задачи (2), (5), и выполнено одно из следующих условий:
 д) $B_1 = 0, B_2 > 0, \alpha \geq -1$;
 е) $B_1 > 0, B_2 > 0, -1 \leq \alpha \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие $B_2 > 0$ имеет смысл, когда $\text{mes}\{(x, t) \in \Pi_{0, \infty} : b(x, t) > 0\} > 0$ для всех $t_0 > 0$. В противном случае можно считать, что $B_2 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Условия $\varepsilon \leq 2\sigma$ или $\varepsilon \leq 1 + \sigma$ и $1 + \alpha + \varepsilon \leq 2\sigma$ или $\alpha + \varepsilon \leq \sigma$ продиктованы методом доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Покажем, что $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Предположим, что это не так. Тогда найдется $\delta > 0$ и последовательность $\{T_k\} \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, такая, что

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, T_k)| > 2\delta > 0 \quad \forall k \geq k_0.$$

Пусть для определенности

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, T_k)| = u(x^{(k)}, T_k) > 2\delta,$$

где $x^{(k)} \in \Omega$. Построим семейство функций

$$v_k(t) = \begin{cases} C_k^{(1)}[(T_k - t)^{2/(1-\sigma)} + \delta_1], & 1 < t < T_k, \\ C_k^{(2)}[(T_k - t)^\gamma + \delta_1], & t > T_k, \end{cases}$$

где $\gamma = (2 - \varepsilon)/(1 - \sigma)$ или $\gamma = (1 - \alpha - \varepsilon)/(1 - \sigma)$, если выполнены условия 1) или 2) соответственно, а

$$\delta_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon \leq 0, \\ \delta & \text{при } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

При $\delta_1 = 0$ постоянные $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ могут быть выбраны независимо друг от друга. Постоянная $C_k^{(1)}$ выбирается так, чтобы

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, 0)| < v_k(0) = C_k^{(1)}[T_k^{2/(1-\sigma)} + \delta_1] \quad (13)$$

и выполнялось неравенство (8). Из доказательств теорем 1 и 2 следует, что при $\varepsilon \leq 0$ неравенство (8) для $v_k(t)$ на $(0, T_k)$ эквивалентно условию $C_k^{(1)} \leq C = \text{const}$, а при $\varepsilon > 0$ – условию $C_k^{(1)} \leq C_1(T_k)$, где $C_1(T_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Оценка (13) накладывает ограничения на скорость стремления к 0 последовательности $C_1(T_k)$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому выберем $C_k^{(1)}$ из условий

$$\rho_1 C_1(T_k) \leq C_k^{(1)} \leq \begin{cases} \min\{1, C\}, & \varepsilon \leq 0, \\ \min\{1, C_1(T_k)\}, & \varepsilon > 0, \end{cases}$$

где $\rho_1 = \text{const} > 0$. Неравенство (8) для $v_k(t)$ при $t \geq T_0$ дает оценку

$$C_k^{(2)} \leq \left[\frac{2^{\sigma-1} a_0 [(t - T_k)^{\gamma\sigma} + \delta_1^\sigma]}{\gamma(t+1)^\varepsilon (t - T_k)^{\gamma-2} [\gamma - 1 + B_2(t+1)^\alpha (t - T_k)]} \right]^{1/(1-\sigma)}, \quad t \geq T_k.$$

Анализируя эту оценку, получим, что при $\varepsilon \leq 0$ $C_k^{(2)} \leq C_0$, где $C_0 = \text{const}$, не зависящая от k , а при $\varepsilon > 0$ $C_k^{(2)} \leq C^{(2)}(T_k, \delta_1)$, где $\rho_2 C_1(T_k) \leq C^{(2)}(T_k, \delta_1)$, $\rho_2 = \text{const} > 0$. Поскольку других ограничений на $C_k^{(2)}$ нет, можно взять $C_k = C_k^{(1)} = C_k^{(2)}$ так, что

$$\min\{\rho_1, \rho_2\} C_1(T_k) \leq C_k \leq \begin{cases} \min\{1, C, C_0\}, & \varepsilon \leq 0, \\ \min\{1, C_1(T_k), \rho_2 C_1(T_k)\}, & \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь функцию $w_k(x, t) = v_k(t) - u(x, t)$. Из сказанного выше следует, что $w_k(x, 0) > 0$, $w_k(x^{(k)}, T_k) < 0$, $w_k(x, t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$, и следовательно, в некотором цилиндре Π_{0, T'_k} , где $T'_k > T_k$, функция $w_k(x, t)$ имеет отрицательный минимум. Но это противоречит принципу максимума. Значит, $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда утверждение теоремы следует из теорем 1 и 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из доказательства следует, что размер носителя (величина T) определяется максимумом модуля решения при $t = 0$.

Суммируя полученные результаты, сформулируем некоторые следствия из них.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $u(x, t)$ – решение в $\Pi_{0, \infty}$ уравнения (7), удовлетворяющее условию (5). Если выполнено условие

- 1) $\varepsilon \leq 1 + \sigma$ или $\varepsilon > 2$, $u(x, t) = o(t^{(2-\varepsilon)/(1-\sigma)})$ при $t \rightarrow \infty$, или
- 2) $1 + \sigma < \varepsilon \leq 2$, $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$,

то решение имеет компактный носитель.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $u(x, t)$ – решение в $\Pi_{0, \infty}$ уравнения

$$\Delta u + k u_t = (t+1)^{-\varepsilon} |u|^{\sigma-1} u, \quad k > 0, \quad (14)$$

удовлетворяющее условию (5). Если выполнено одно из условий:

- 1) $\varepsilon \leq \sigma$, $u(x, t) = o(t^{(1-\varepsilon)/(1-\sigma)})$, $t \rightarrow \infty$,
- 2) $\sigma < \varepsilon \leq 2$, $u(x, t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$,
- 3) $\varepsilon > 2$, $u(x, t) = o(t^{(2-\varepsilon)/(1-\sigma)})$, $t \rightarrow \infty$,

то решение имеет компактный носитель.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $u(x, t)$ – решение в $\Pi_{0, \infty}$ уравнения

$$\Delta u - k u_t = (t+1)^{-\varepsilon} |u|^{\sigma-1} u, \quad k > 0, \quad (15)$$

удовлетворяющее условию (5). Если выполнено условие

- 1) $\varepsilon \leq 1$, $u(x, t) = o(t^{(2-\varepsilon)/(1-\sigma)})$, $t \rightarrow \infty$, или
- 2) $1 < \varepsilon$, $u(x, t) = o(t^{(1-\varepsilon)/(1-\sigma)})$, $t \rightarrow \infty$,

то решение имеет компактный носитель.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. При $\varepsilon = 0$ решения уравнений (14) и (15) имеют компактный носитель, если $u(x, t) = o(t^{1/(1-\sigma)})$ и $u(x, t) = o(t^{2/(1-\sigma)})$ при $t \rightarrow \infty$ соответственно. В отличие от случая $\sigma > 1$ оба уравнения не имеют знакоопределенных или осциллирующих решений таких, что $|u(x, t)| \leq Ct$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $u(x, t)$ – решение в $\Pi_{0,\infty}$ уравнения

$$\Delta u + k(t+1)^\alpha u_t = |u|^{\sigma-1}u, \quad k > 0, \quad (16)$$

удовлетворяющее условию (5). Если выполнено одно из условий:

- 1) $\alpha \leq -1$, $u(x, t) = o(t^{2/(1-\sigma)})$, $t \rightarrow \infty$,
- 2) $-1 < \alpha \leq \sigma$, $u(x, t) = o(t^{(1-\alpha)/(1-\sigma)})$, $t \rightarrow \infty$,
- 3) $\sigma < \alpha$, $u(x, t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$,

то решение имеет компактный носитель.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $u(x, t)$ – решение в $\Pi_{0,\infty}$ уравнения

$$\Delta u - k(t+1)^\alpha u_t = |u|^{\sigma-1}u, \quad k > 0, \quad (17)$$

удовлетворяющее условию (5). Если выполнено одно из условий:

- 1) $\alpha \leq 1$, $u(x, t) = o(t^{2/(1-\sigma)})$, $t \rightarrow \infty$,
- 2) $\alpha > 1$, $u(x, t) = o(t^{(1-\alpha)/(1-\sigma)})$, $t \rightarrow \infty$,

то решение имеет компактный носитель.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Условия на рост решения при $t \rightarrow \infty$ различаются для уравнений (16) и (17), если $-1 < \alpha \leq 1$. Например, уравнение (16) при $\alpha = \sigma$ имеет решение $u(x, t) = \pm k^{1/(\sigma-1)}(t+1)$, в то время, как всякое решение уравнения (17), удовлетворяющее условию $u(x, t) = o(t^{2/(1-\sigma)})$, $2/(1-\sigma) > 2$, имеет компактный носитель.

2. Параболические уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Классическим решением задачи (3), (5) называется функция $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\Pi_{0,\infty}) \cap C_{x,t}^{1,0}(\overline{\Pi_{0,\infty}})$, удовлетворяющая в $\Pi_{0,\infty}$ уравнению (3) и условию (5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Слабым решением задачи (4), (5) называется функция $u(x, t) \in W_2^1(\Pi_{0,t_0})$, $t_0 > 0$, такая, что для любой функции $\xi(x, t) \in W_2^1(\Pi_{0,t_0})$, удовлетворяющей условиям $\xi(x, t) \geq 0$, $\xi(x, 0) \equiv 0$, $\xi(x, t) \equiv 0$ при $t \geq t_0$, $x \in \bar{\Omega}$, справедливо тождество

$$\int_{\Pi_{0,t_0}} \left[-u\xi_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)u_{x_j}\xi_{x_i} - \sum_{i,j=1}^n a_i(x, t)u_{x_i}\xi + a(x, t)|u|^{\sigma-1}u\xi \right] dx dt = 0.$$

Из принципа максимума [15] следует, что всякое решение задачи (3), (5) или (4), (5) – ограниченная функция.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-y' = a(t+1)^{-\varepsilon}|y|^{\sigma-1}y, \quad a > 0.$$

В зависимости от ε свойства решений различны. Так, например, при $\varepsilon \leq 1$ все решения имеют компактный носитель. Это будут функции

$$y(t) = \begin{cases} \pm \left[T - \frac{a(1-\sigma)}{1-\varepsilon} (t+1)^{1-\varepsilon} \right]^{1/(1-\sigma)}, & 0 < t < \frac{T(1-\varepsilon)}{a(1-\sigma)} - 1, \\ 0, & t \geq \frac{T(1-\varepsilon)}{a(1-\sigma)} - 1, \end{cases}$$

если $\varepsilon < 1$, и

$$y(t) = \begin{cases} \pm [T - a(1-\sigma) \ln(t+1)]^{1/(1-\sigma)}, & 0 < t < e^{T/(a(1-\sigma))} - 1, \\ 0, & t \geq e^{T/(a(1-\sigma))} - 1, \end{cases}$$

при $\varepsilon = 1$. При $\varepsilon > 1$ можно указать знакопостоянные решения, стремящиеся к любому действительному числу при $t \rightarrow \infty$:

$$y(t) = \pm \left[\frac{a(1-\sigma)}{(\varepsilon-1)(t+1)^{\varepsilon-1}} + T \right]^{1/(1-\sigma)} \rightarrow T^{1/(1-\sigma)}, \quad t \rightarrow \infty.$$

В частности,

$$y(t) = \pm \left[\frac{a(1-\sigma)}{\varepsilon-1} \right]^{1/(1-\sigma)} (t+1)^{(1-\varepsilon)/(1-\sigma)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Используя в качестве барьеров функции

$$v(t) = \begin{cases} C[T - \ln(t+1)]^{1/(1-\sigma)}, & 0 < t < e^T - 1, \\ 0, & t \geq e^T - 1, \end{cases}$$

при $\varepsilon = 1$ и

$$v(t) = \begin{cases} C(T-t)^{1/(1-\varepsilon)}, & 0 < t < T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases}$$

при $\varepsilon \neq 1$, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (3), (5) или (4), (5) в $\Pi_{0,\infty}$. Если $\varepsilon \leq 1$, то любое решение имеет компактный носитель. Если $\varepsilon > 1$ и

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, 0)| \leq \left[\frac{a_0(1-\sigma)(\varepsilon-1)^{\varepsilon-1}}{\varepsilon^\varepsilon} \right]^{1/(1-\sigma)}$$

или $u(x, t) = o(t^{(1-\varepsilon)/(1-\sigma)})$ при $t \rightarrow \infty$, то решение имеет компактный носитель.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kondratiev V. A., Oleinik O. A. On asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear elliptic equations in unbounded domains // Partial Differential Equations and Related Subjects. Pitman Res. Notes Math. Ser. V. 269. Harlow: Longman Sci. Tech., 1992. P. 163–195.
- [2] Кондратьев В. А., Олейник О. А. О поведении на бесконечности решений одного класса нелинейных эллиптических уравнений в цилиндрической области // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 4. С. 446–449.
- [3] Diaz J. I. Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas semilineares. Madrid: Editorial Univ. Complutense Madrid, 1976.
- [4] Veron L. Equations d'évolution semi-linéaires du second ordre dans L^1 // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1982. V. 27. № 1. P. 95–123.
- [5] Diaz J. I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries. 1. Pitman Res. Notes Math. Ser. V. 106. Harlow: Longman Sci. Tech., 1985.
- [6] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 135 (177). № 3. С. 346–360.
- [7] Landis E. M. Some properties of the solution of degenerating semilinear elliptic inequalities // Russian J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 4. P. 483–494.
- [8] Ландис Е. М. О “мертвой зоне” для полулинейных вырождающихся эллиптических неравенств // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 3. С. 414–423.
- [9] Калашников А. С. О возмущении критических показателей в некоторых нелинейных задачах математической физики // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 320–322.
- [10] Чечкин Ф. А. Об асимптотике решений одного класса нелинейных эллиптических уравнений в цилиндрической области // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 181–182.
- [11] Kondratiev V. A., Veron L. Asymptotic homogenisation of solution of some nonlinear parabolic and elliptic equations. Preprint № 76/94. France: Univ. de Tours, 1994.
- [12] Антонцев С. Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986.
- [13] Чистяков В. В. О свойствах решений полулинейных параболических уравнений второго порядка // Тр. семинара И. Г. Петровского. 1991. Т. 15. С. 70–107.
- [14] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
- [15] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
19.02.96
Исправленный вариант
23.04.97