Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Звягинцев, О точных неравенствах для производных функций, удовлетворяющих краевым условиям, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 712–724

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:18:00

УДК 517.5

О ТОЧНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ КРАЕВЫМ УСЛОВИЯМ

А. И. Звягинцев

Для функций, удовлетворяющих краевым условиям

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m)}(0) = 0, \quad f(1) = f'(1) = \dots = f^{(l)}(1) = 0,$$

доказывается неравенство с точными константами в аддитивной форме

$$\|f^{(n-1)}\|_{L_q(0,1)} \leq A\|f\|_{L_p(0,1)} + B\|f^{(n)}\|_{L_r(0,1)},$$

где $n \geq 2$, $0 \leq l \leq n-2$, $-1 \leq m \leq l$, $m+l \leq n-3$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$.

Библиография: 22 названия.

1. Задача о точных константах. Пусть функция $f(x)$ одной переменной задана на конечном отрезке и имеет абсолютно непрерывную производную $f^{(n-1)}$ на этом отрезке. Не уменьшая общности, в качестве конечного отрезка возьмем $[0, 1]$. Хорошо известно, что для любых целых k и n , $0 \leq k < n$, и любых $1 \leq p, q, r \leq \infty$ существуют постоянные A и B такие, что

$$\|f^{(k)}\|_q \leq A\|f\|_p + B\|f^{(n)}\|_r, \quad (1)$$

где $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(0,1)}$.

Рассмотрим неравенство (1) для функций, удовлетворяющих краевым условиям

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m)}(0) = 0, \quad (2)$$

$$f(1) = f'(1) = \dots = f^{(l)}(1) = 0, \quad (3)$$

где $-1 \leq m \leq n-1$, $-1 \leq l \leq n-1$, $m+l \leq n-2$ (в случае $m = -1$ или $l = -1$ предполагается отсутствие соответственно условий (2) или (3)).

Положим

$$A_{n,k,m,l}^* \equiv A_{n,k,m,l}^*(p, q, r) = \inf A,$$

где инфимум берется по всем парам (A, B) , для которых имеет место (1), и

$$B_{n,k,m,l}^* \equiv B_{n,k,m,l}^*(p, q, r) = \inf B,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-255.

где инфимум берется уже по парам $(A_{n,k,m,l}^*, B)$, для которых также выполнено (1).

В некоторых частных случаях значения и оценки точных констант $A_{n,k,m,l}^*, B_{n,k,m,l}^*$ получены в работах [1]–[20]. Следует отметить, что наиболее исследованным является случай $m = l = -1$.

Рассмотрим для функций, удовлетворяющих условиям (2) и (3), неравенство

$$\|f^{(n-1)}\|_q \leq A_{n,n-1,m,l}^* \|f\|_p + B_{n,n-1,m,l}^* \|f^{(n)}\|_r. \quad (4)$$

Замена x на $1 - x$ позволяет ограничиться изучением только случая $l \geq m$. В дальнейшем полагаем, что $l \geq m$.

Если $l = m = -1$, то, как показано В. И. Буренковым [1], [2], для $n \geq 1, 1 \leq p, q, r \leq \infty$

$$A_{n,n-1,-1,-1}^* = \frac{(n-1)!}{\|Q_{n-1,p}\|_p}, \quad \frac{1}{2} \left((1+q)^{-1/q} - \frac{1}{n} \right) \leq B_{n,n-1,-1,-1}^* \leq 2^{(1/r-1/q)+-1},$$

где $Q_{n-1,p}(x) = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$ – многочлен, наименее уклоняющийся от нуля в метрике $L_p(0, 1)$, и $c_+ = \max\{c, 0\}$.

Если $l = n - 1$, то из результатов Д. Бойда [11] следует, что для $n \geq 1, 1 \leq p, q, r \leq \infty$

$$A_{n,n-1,-1,n-1}^* = 0, \\ B_{n,n-1,-1,n-1}^* = \left(\frac{rq^q}{(r-1)q} \right)^{1/q} \left(\frac{(r-1)q+r}{(r-1)q} \right)^{1/r-1/q} B^{-1} \left(\frac{1}{q}, 1 - \frac{1}{r} \right),$$

где $B(u, v)$ – бэта-функция.

Мы рассматриваем случай

$$n \in \{2, 3, \dots\}, \quad 0 \leq l \leq n-2, \quad -1 \leq m \leq l, \quad m+l \leq n-3. \quad (5)$$

Обозначим через $Q_{n-1,p,m,l}(x)$ многочлен степени $n-1$, удовлетворяющий условиям (2), (3) и наименее уклоняющийся от нуля в метрике $L_p(0, 1)$, т.е.

$$Q_{n-1,p,m,l}(x) = \begin{cases} x^{m+1}(x-1)^{l+1} & \text{при } m+l = n-3, \\ x^{m+1}(x-1)^{l+1}(x^{n-m-l-3} + a_{n-m-l-4}x^{n-m-l-4} + \dots + a_0) & \text{при } m+l \leq n-4, \end{cases}$$

причем

$$\|Q_{n-1,p,m,l}\|_p = \inf_{b \in \mathbb{R}^{n-m-l-3}} \Phi_p(b),$$

где $b = (b_0, \dots, b_{n-m-l-4})$ и

$$\Phi_p(b) = \|x^{m+1}(x-1)^{l+1}(x^{n-m-l-3} + b_{n-m-l-4}x^{n-m-l-4} + \dots + b_0)\|_p.$$

Существование $Q_{n-1,p,m,l}$ при $1 \leq p \leq \infty$ следует из того, что функция $\Phi_p(b)$ является выпуклой, непрерывной по b и неограниченно возрастает при $b \rightarrow \infty$.

Отметим, что многочлен $Q_{n-1,p,m,l}$ при $1 \leq p < \infty$ и $m+l \leq n-4$ удовлетворяет системе уравнений

$$\int_0^1 t^{i+m+1}(t-1)^{l+1} |Q_{n-1,p,m,l}(t)|^{p-1} \operatorname{sign} Q_{n-1,p,m,l}(t) dt = 0, \quad i = 0, \dots, n-m-l-4.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$ и выполняются условия (5). Тогда для функций, удовлетворяющих условиям (2) и (3), в неравенстве (4) для точных констант выполнены соотношения

$$A_{n,n-1,m,l}^* = \frac{(n-1)!}{\|Q_{n-1,p,m,l}\|_p}, \quad \frac{1}{2} \left((1+q)^{-1/q} - \frac{1}{n} \right) \leq B_{n,n-1,m,l}^* \leq 1. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для первой константы в неравенстве (4) при $1 \leq p \leq \infty$ справедлива очевидная оценка снизу

$$\frac{(n-1)!}{\|Q_{n-1,p,m,l}\|_p} \leq A_{n,n-1,m,l}^*, \quad (7)$$

так как в противном случае для $f = Q_{n-1,p,m,l}$ в (4) получается противоречие.

Рассмотрим сначала случай $1 < p < \infty$. Воспользуемся интегральным представлением [1], [2]

$$f^{(n-1)}(x) = \int_0^1 \omega(\xi) f^{(n-1)}(\xi) d\xi + \int_0^1 \Lambda(x, \xi) f^{(n)}(\xi) d\xi, \quad (8)$$

где функция $\omega(\xi)$ имеет на $[0, 1]$ абсолютно непрерывную производную $\omega^{(n-1)}(\xi)$ и

$$\omega(0) = \dots = \omega^{(n-m-3)}(0) = 0, \quad (9)$$

$$\omega(1) = \dots = \omega^{(n-l-3)}(1) = 0, \quad (10)$$

$$\int_0^1 \omega(\xi) d\xi = 1, \quad (11)$$

$$\Lambda(x, \xi) = \begin{cases} \int_0^\xi \omega(\eta) d\eta, & 0 \leq \xi \leq x, \\ -\int_\xi^1 \omega(\eta) d\eta, & x < \xi \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

Отметим, что в случае $m = -1$ и $l = n - 2$ условия (10) отсутствуют, а $n - m - 3 \geq 0$ в силу (5).

Интегрируя в (8) по частям с учетом (2), (3), (9), (10), получим

$$f^{(n-1)} = A_\omega f + B_\omega f^{(n)}, \quad (13)$$

где

$$(A_\omega \varphi)(x) = (-1)^{n-1} \int_0^1 \omega^{(n-1)}(\xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (B_\omega \varphi)(x) = \int_0^1 \Lambda(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Из (13) следует, что

$$\|f^{(n-1)}\|_q \leq \|A_\omega\|_{L_p \rightarrow L_q} \|f\|_p + \|B_\omega\|_{L_r \rightarrow L_q} \|f^{(n)}\|_r. \quad (14)$$

Выберем функцию $\omega(\xi)$, удовлетворяющую перечисленным выше условиям так, чтобы норма

$$\|A_\omega\|_{L_p \rightarrow L_q} = \|\omega^{(n-1)}\|_{p'} \quad (15)$$

была минимальна. Для этого, решая уравнение Эйлера в задаче на условный экстремум

$$\int_0^1 |\omega^{(n-1)}(\xi)|^{p'} d\xi \rightarrow \inf, \quad \int_0^1 \omega(\xi) d\xi = 1,$$

получим [1]

$$\omega^{(n-1)}(\xi) = \alpha |P_{n-1}(\xi)|^{p-1} \operatorname{sign} P_{n-1}(\xi), \quad (16)$$

где $\alpha \neq 0$ и $P_{n-1}(\xi)$ — многочлен степени $\leq n-1$.

По формуле Тейлора с учетом (9) имеем

$$\omega(t) = \frac{1}{(n-m-3)!} \int_0^t (t-\eta)^{n-m-3} \omega^{(n-m-2)}(\eta) d\eta. \quad (17)$$

При $0 \leq l \leq n-3$ (т.е. исключается случай $m = -1, l = n-2$) в силу (10) и (17) получаем

$$\int_0^1 (1-\eta)^{n-m-3-j} \omega^{(n-m-2)}(\eta) d\eta = 0, \quad j = 0, \dots, n-l-3. \quad (18)$$

Если $n-l-4-j \geq 0$, то на основании формулы интегрирования по частям из (18) следуют равенства

$$\int_0^1 \eta(1-\eta)^{n-m-3-j} \omega^{(n-m-1)}(\eta) d\eta = 0, \quad j = 0, \dots, n-l-4.$$

В случае $n-m-l-3 \geq 0$ аналогичным образом последовательно получаются равенства

$$\int_0^1 \eta^s (1-\eta)^{n-m-3-j} \omega^{(n-m-2+s)}(\eta) d\eta = 0, \quad s = 0, \dots, m_1, \quad j = 0, \dots, n-l-3-s, \quad (19)$$

где

$$m_1 = \begin{cases} m, & \text{если } n-m-l-3 = 0, \\ m+1, & \text{если } n-m-l-4 \geq 0. \end{cases}$$

В частности, при $n-m-l-4 \geq 0$ в силу (19) справедливы равенства

$$\int_0^1 \eta^{m+1} (1-\eta)^{l+1+i} \omega^{(n-1)}(\eta) d\eta = 0, \quad i = 0, \dots, n-m-l-4,$$

из которых следует, что

$$\int_0^1 \eta^{m+1+i} (\eta-1)^{l+1} \omega^{(n-1)}(\eta) d\eta = 0, \quad i = 0, \dots, n-m-l-4, \quad (20)$$

или с учетом (16)

$$\int_0^1 \eta^{m+1+i} (\eta-1)^{l+1} |P_{n-1}(\eta)|^{p-1} \operatorname{sign} P_{n-1}(\eta) d\eta = 0, \quad i = 0, \dots, n-m-l-4. \quad (21)$$

Поскольку условия (21) для $1 < p < \infty$ однозначно [21, с. 50] определяют многочлен $Q_{n-1,p,m,l}(x)$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике $L_p(0, 1)$, то в силу (16)

$$\omega^{(n-1)}(\xi) = \alpha |Q_{n-1,p,m,l}(\xi)|^{p-1} \operatorname{sign} Q_{n-1,p,m,l}(\xi). \quad (22)$$

Для определения коэффициента α воспользуемся условием (11).

Из (11) и (17) после перестановки порядка интегрирования имеем

$$1 = \int_0^1 \omega(t) dt = \frac{1}{(n-m-2)!} \int_0^1 (1-\eta)^{n-m-2} \omega^{(n-m-2)}(\eta) d\eta. \quad (23)$$

Используя формулу интегрирования по частям и (19), для $m \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} (n-m-1+i) \int_0^1 \eta^i (1-\eta)^{n-m-2} \omega^{(n-m-2+i)}(\eta) d\eta \\ = - \int_0^1 \eta^{i+1} (1-\eta)^{n-m-2} \omega^{(n-m-1+i)}(\eta) d\eta, \quad i = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (20)–(24) следует, что

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 \eta^{m+1} (\eta-1)^{n-m-2} \omega^{(n-1)}(\eta) d\eta \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \alpha}{(n-1)!} \int_0^1 \eta^{n-l-2} (\eta-1)^{l+1} |Q_{n-1,p,m,l}(\eta)|^{p-1} \operatorname{sign} Q_{n-1,p,m,l}(\eta) d\eta \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \alpha}{(n-1)!} \int_0^1 Q_{n-1,p,m,l}(\eta) |Q_{n-1,p,m,l}(\eta)|^{p-1} \operatorname{sign} Q_{n-1,p,m,l}(\eta) d\eta \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \alpha}{(n-1)!} \int_0^1 |Q_{n-1,p,m,l}(\eta)|^p d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда, выражая α , на основании (22) получаем

$$\omega^{(n-1)}(\xi) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! |Q_{n-1,p,m,l}(\xi)|^{p-1} \operatorname{sign} Q_{n-1,p,m,l}(\xi)}{\int_0^1 |Q_{n-1,p,m,l}(\eta)|^p d\eta} \quad (25)$$

и

$$\|\omega^{(n-1)}\|_{p'} = \frac{(n-1)!}{\|Q_{n-1,p,m,l}\|_p}. \quad (26)$$

В силу (14) и (15) заключаем, что

$$A_{n,n-1,m,l}^* \leq \|\omega^{(n-1)}\|_{p'}.$$

Отсюда с учетом (7) и (26) получаем

$$A_{n,n-1,m,l}^* = \frac{(n-1)!}{\|Q_{n-1,p,m,l}\|_p}. \quad (27)$$

Отметим, что в случае $n-m-l-3 = 0$ (в частности, при $m = -1$, $l = n-2$) доказательство равенства (27) значительно упрощается.

Согласно теореме Ролля из условий (9), (10) следует, что $\omega^{(n-1)}(\xi)$ существует не менее $n - m - l - 3$ различных нулей на $(0, 1)$. С другой стороны, из (25) вытекает, что $\omega^{(n-1)}(\xi)$ имеет на $(0, 1)$ не более $n - m - l - 3$ различных нулей. Отсюда заключаем, что $\omega(\xi) \neq 0$ на $(0, 1)$, и в силу (11), (12) $|\Lambda(x, \xi)| \leq 1$. Тогда на основании (14) получаем для $B_{n,n-1,m,l}^*$ оценку сверху

$$B_{n,n-1,m,l}^* \leq \|B_\omega\|_{L_r \rightarrow L_q} \leq 1. \quad (28)$$

Для получения нижней оценки воспользуемся очевидными неравенствами

$$\|Q_{n,p,m,l}\|_p \leq \left\| \left(x - \frac{1}{2} \right) Q_{n-1,p,m,l}(x) \right\|_p \leq \frac{1}{2} \|Q_{n-1,p,m,l}\|_p, \quad (29)$$

$$\|Q_{n,p,m,l}^{(n-1)}\|_q = n! \left\| x + \frac{a_{n-m-l-3}}{n} \right\|_q \geq n! \|Q_{1,q}\|_q = \frac{n!}{2(1+q)^{1/q}}. \quad (30)$$

Полагая $f(x) = Q_{n,p,m,l}(x)$ в неравенстве (4), из (27), (29) и (30) получаем, что

$$\frac{n!}{2(1+q)^{1/q}} \leq \frac{(n-1)!}{2} + n! B_{n,n-1,m,l}^*.$$

Отсюда следует неравенство

$$B_{n,n-1,m,l}^* \geq \frac{1}{2} \left((1+q)^{-1/q} - \frac{1}{n} \right). \quad (31)$$

Тем самым, теорема доказана при $1 < p < \infty$.

Рассмотрим теперь крайние случаи $p = 1$ и $p = \infty$. Поскольку (см. [22, с. 128]) для $\delta \in \{1; \infty\}$

$$\lim_{p \rightarrow \delta} \|Q_{n-1,p,m,l}\|_p = \|Q_{n-1,\delta,m,l}\|_\delta,$$

то, совершая предельный переход в (27), (28) и (31), получаем (6) и для случая $p = \delta$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$ и выполняются условия (5). Тогда

$$A_{n,n-1,n-l-3,l}^* = \begin{cases} (n-1)! (B(p(n-l-2)+1, p(l+1)+1))^{-1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ (n-1)! (n-1)^{n-1} (n-l-2)^{2+l-n} (l+1)^{-l-1}, & p = \infty, \end{cases}$$

где $B(u, v)$ – бэ́та-функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что при $n - m - l - 3 = 0$

$$Q_{n-1,p,n-l-3,l}(x) = x^{n-l-2} (x-1)^{l+1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $q = \infty$, $r = 1$, $m = -1$ и выполняются условия (5). Тогда

$$B_{n,n-1,-1,l}^*(p, \infty, 1) = 1. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $q = \infty$, $r = 1$, $k > n$ подставим в неравенство (4) функцию $f(x) = (x - 1)^k$ и перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$. Тогда получим $B_{n,n-1,-1,l}^* \geq 1$, что в совокупности с (6) приводит к (32).

2. Наименее уклоняющиеся от нуля многочлены.

ТЕОРЕМА 2. Если $p = \infty$, то в случае $n \geq 2$, $m = -1$, $l = 0$

$$Q_{n-1,\infty,-1,0}(x) = \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{4(n-1)}\right)^{1-n} T_{n-1} \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{4(n-1)} x - 1\right),$$

$$\|Q_{n-1,\infty,-1,0}\|_{\infty} = 2 \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{4(n-1)}\right)^{1-n},$$

а в случае $n \geq 3$, $m = l = 0$

$$Q_{n-1,\infty,0,0}(x) = \left(2 \cos \frac{\pi}{2(n-1)}\right)^{1-n} T_{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{2(n-1)} (2x - 1)\right),$$

$$\|Q_{n-1,\infty,0,0}\|_{\infty} = 2 \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{2(n-1)}\right)^{1-n},$$

где $T_{n-1}(x) = 2^{2-n} \cos(n-1) \arccos x$ — многочлен Чебышева первого рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство только первого утверждения теоремы (для второго утверждения доказательство аналогично).

Предположим, что многочлен

$$P_{n-1}(x) = \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{4(n-1)}\right)^{1-n} T_{n-1} \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{4(n-1)} x - 1\right)$$

не является многочленом наименьшего уклонения от нуля в метрике $L_{\infty}(0, 1)$, т.е. $\|Q_{n-1,\infty,-1,0}\|_{\infty} < \|P_{n-1}\|_{\infty}$. Тогда разность многочленов $P_{n-1}(x) - Q_{n-1,\infty,-1,0}(x)$ на отрезке $[0, 1]$ имеет по крайней мере $n-1$ различных нулей, так как $Q_{n-1,\infty,-1,0}(1) = P_{n-1}(1) = 0$, и в силу свойств многочлена Чебышева первого рода функция $P_{n-1}(x)$ на $[0, 1]$ имеет $n-1$ точек альтернанса, в которых $P_{n-1}(x)$ принимает значение $\|P_{n-1}\|_{\infty}$ с чередующимися знаками. Но это противоречит тому, что разность $P_{n-1} - Q_{n-1,\infty,-1,0}$ является полиномом степени не выше $n-2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любых $1 \leq q, r \leq \infty$ в случае $n \geq 2$

$$A_{n,n-1,-1,0}^*(\infty, q, r) = \frac{(n-1)!}{2} \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{4(n-1)}\right)^{n-1},$$

а в случае $n \geq 3$

$$A_{n,n-1,0,0}^*(\infty, q, r) = \frac{(n-1)!}{2} \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{2(n-1)}\right)^{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m \in \{-1, 0\}$ утверждения следствия вытекают из теорем 1 и 2.

ТЕОРЕМА 3. Если $p = 2$, $n \geq 3$ и $-1 \leq m + l \leq n - 4$, то

$$Q_{n-1,2,m,l}(x) = \frac{(n+m+l+1)!(x^{n+m-l-1}(x-1)^{n+l-m-1})^{(n-m-l-3)}}{(2n-2)!x^{m+1}(x-1)^{l+1}}, \quad (33)$$

$$\|Q_{n-1,2,m,l}\|_2 = \sqrt{\frac{(n+m+l+1)!(n-m-l-3)!(n+m-l-1)!(n+l-m-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\Phi_2(b)$ является дифференцируемой и выпуклой. Следовательно, в экстремальной задаче $\Phi_2(b) \rightarrow \inf$ необходимым и достаточным условием минимума [21, с. 50] являются соотношения

$$\int_0^1 x^{i+m+1}(x-1)^{l+1}Q_{n-1,2,m,l}(x)dx = 0, \quad i = 0, \dots, n-m-l-4. \quad (34)$$

Легко проверить, что соотношения (34) выполняются для многочлена $Q_{n-1,2,m,l}(x)$, определенного в (33).

Используя (34) и формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \|Q_{n-1,2,m,l}\|_2^2 &= \int_0^1 x^{n-l-2}(x-1)^{l+1}Q_{n-1,2,m,l}(x)dx \\ &= \frac{(n+m+l+1)!}{(2n-2)!}(n+m-l-3)!B(n+m-l, n+l-m). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любых $1 \leq q, r \leq \infty$ в случае $n \geq 3$ и $-1 \leq m + l \leq n - 4$

$$\begin{aligned} A_{n,n-1,m,l}^*(2, q, r) \\ = (n-1)! \sqrt{\frac{(2n-2)!(2n-1)!}{(n+m+l+1)!(n-m-l-3)!(n+m-l-1)!(n+l-m-1)!}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании теорем 1 и 3 получаем утверждение следствия.

ЛЕММА. Пусть

$$B_c(a, b) = \int_c^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt,$$

где $b > 0$, $a + b \neq 1$ и $a > 0$ при $c = 0$ или $a \neq 0$ при $0 < c \leq 1$. Тогда

$$(a+b-1)B_c(a, b) = -c^a(1-c)^{b-1} + (b-1)B_c(a, b-1), \quad (35)$$

$$(a+b-1)B_c(a, b) = c^{a-1}(1-c)^b + (a-1)B_c(a-1, b). \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя тождество

$$t^a(1-t)^{b-2} = t^{a-1}(1-t)^{b-2} - t^{a-1}(1-t)^{b-1}$$

и формулу интегрирования по частям, получаем

$$B_c(a, b) = -a^{-1}(c^a(1-c)^{b-1} - (b-1)B_c(a, b-1) + (b-1)B_c(a, b)).$$

Отсюда следует (35).

Используя тождество

$$t^{a-2}(1-t)^b = (1-t)^{b-1}t^{a-2} - (1-t)^{b-1}t^{a-1}$$

и формулу интегрирования по частям, получаем

$$B_c(a, b) = b^{-1}(c^{a-1}(1-c)^b + (a-1)B_c(a-1, b) + (a-1)B_c(a, b)).$$

Отсюда следует (36). Лемма доказана.

Отметим, что $B_0(a, b)$ является обычной бэта-функцией $B(a, b)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $n \geq 3$, $m = -1$ и $l = n - 3$. Тогда

$$Q_{n-1,p,-1,n-3}(x) = (x-1)^{n-2}(x-1+a_p),$$

$$\|Q_{n-1,p,-1,n-3}\|_p = (1-a_p)(1+(n-1)p)^{-1/p},$$

где $a_p \in (0, 1)$ является единственным корнем уравнения

$$B_{a_p}(p(1-n), p) - B(p(n-2)+1, p) = 0, \quad \text{если } 1 \leq p < \infty,$$

$$(n-2)^{n-2}(n-1)^{1-n}a_p^{n-1} + a_p - 1 = 0, \quad \text{если } p = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем сначала случай $1 \leq p < \infty$. Поскольку функция

$$F(a) = \int_0^1 |(x-1)^{n-2}(x-1+a)|^p dx = \int_0^1 |x^{n-2}(x-a)|^p dx$$

дифференцируема, то для многочлена $Q_{n-1,p,-1,n-3}(x) = (x-1)^{n-2}(x-1+a_p)$, наименее уклоняющегося от нуля в метрике $L_p(0, 1)$, коэффициент a_p необходимо является корнем уравнения $F'(a_p) = 0$, что эквивалентно

$$\int_0^1 x^{n-2}|x^{n-1} - a_p x^{n-2}|^{p-1} \operatorname{sign}(x^{n-1} - a_p x^{n-2}) dx = 0. \quad (37)$$

Из (37) следует, что $0 < a_p < 1$. Равенство (37) эквивалентно равенству

$$\int_{a_p}^1 x^{p(n-2)}(x-a_p)^{p-1} dx - \int_0^{a_p} x^{p(n-2)}(a_p-x)^{p-1} dx = 0$$

или после несложных преобразований

$$B_{a_p}(p(1-n), p) - B(p(n-2) + 1, p) = 0. \quad (38)$$

Единственность a_p следует из того, что левая часть равенства (38) монотонно убывает по a_p на интервале $(0, 1)$.

При вычислении нормы аналогично получаем

$$\|Q_{n-1,p,-1,n-3}\|_p^p = a_p^{p(n-1)+1} (B(p(n-2) + 1, p+1) + B_{a_p}(p(1-n) - 1, p+1)).$$

Отсюда, используя лемму и (38), имеем

$$\begin{aligned} \|Q_{n-1,p,-1,n-3}\|_p^p &= \frac{a_p^{p(n-1)+1}}{1+p(n-1)} (a_p^{p(1-n)}(1-a_p)^p + a_p^{p(1-n)-1}(1-a_p)^{p+1} \\ &\quad + p(B(p(n-2) + 1, p) - B_{a_p}(p(1-n), p))) \\ &= \frac{(1-a_p)^p}{1+p(n-1)}. \end{aligned}$$

В случае $p = \infty$ уравнение

$$(n-2)^{n-2}(n-1)^{1-n}a_p^{n-1} = 1 - a_p$$

имеет единственный корень $a_p \in (0, 1)$, для которого многочлен

$$P_{n-1}(x) = (x-1)^{n-2}(x-1+a_p)$$

в точках $x = 0$ и $x = 1 - (n-2)(n-1)^{-1}a_p$ принимает значение $\|P_{n-1}\|_\infty = 1 - a_p$ с противоположными знаками. Если предположить, что $P_{n-1}(x)$ не является наименее уклоняющимся от нуля многочленом, то $\|P_{n-1}\|_\infty > \|Q_{n-1,\infty,-1,n-3}\|_\infty$ и разность $P_{n-1}(x) - Q_{n-1,\infty,-1,n-3}(x)$ имеет нуль на отрезке $[0, 1 - (n-2)(n-1)^{-1}a_p]$, что невозможно, так как $P_{n-1}(x) - Q_{n-1,\infty,-1,n-3}(x) = c(x-1)^{n-2}$. Следовательно, $P_{n-1}(x) \equiv Q_{n-1,\infty,-1,n-3}(x)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для любых $1 \leq p, q, r \leq \infty$ в случае $n \geq 3$, $m = -1$ и $0 \leq l \leq n-3$

$$A_{n,n-1,-1,n-3}^* = (n-1)!(1-a_p)^{-1}(1+(n-1)p)^{1/p},$$

где a_p определяется как в теореме 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следствия вытекает из теорем 1 и 4.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$ и выполняются условия (5). Тогда

$$\frac{(n-1)!(n-1)^{n-1}}{(n-l-2)^{n-l-2}(l+1)^{l+1}} \leq A_{n,n-1,m,l}^* \leq (n-1)!4^{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки для $A_{n,n-1,m,l}^*$ следуют из теоремы 1, следствия 1 и очевидных неравенств

$$\begin{aligned} \|Q_{n-1,1}\|_1 &= \|Q_{n-1,1,-1,-1}\|_1 \leq \|Q_{n-1,1,m,l}\|_1 \leq \|Q_{n-1,p,m,l}\|_1 \leq \|Q_{n-1,p,m,l}\|_p \\ &\leq \|Q_{n-1,p,n-l-3,l}\|_p \leq \|Q_{n-1,\infty,n-l-3,l}\|_p \leq \|Q_{n-1,\infty,n-l-3,l}\|_\infty, \end{aligned}$$

где $Q_{n-1,1}(x) = 2^{1-n}U_{n-1}(2x-1)$, $U_{n-1}(x) = 2^{1-n}(1-x^2)^{-1/2} \sin n \arccos x$ — многочлен Чебышева второго рода.

3. Неравенство с двумя точными константами.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $n \in \{3, 4, \dots\}$, $m \in \{0, \dots, n-3\}$, $1 \leq p \leq \infty$, $M_0, M_{n-1}, M_n \geq 0$. Тогда для того чтобы существовала функция f такая, что

$$\begin{aligned} f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m)}(0) &= 0, \\ \|f\|_p = M_0, \quad \|f^{(n-1)}\|_\infty &= M_{n-1}, \quad \|f^{(n)}\|_1 = M_n, \end{aligned} \quad (39)$$

необходимо и достаточно, чтобы

- 1) если $M_0 = 0$, то $M_{n-1} = M_n = 0$;
- 2) если $M_0 > 0$ и $M_{n-1} = 0$, то $M_n = 0$;
- 3) если $M_0 > 0$, $M_{n-1} > 0$ и $M_n = 0$, то

$$M_{n-1} \leq (n-1)! \|Q_{n-1,p,m,-1}\|_p^{-1} M_0; \quad (40)$$

- 4) если $M_0 > 0$, $M_{n-1} > 0$, $M_n > 0$, то

$$M_{n-1} < (n-1)! \|Q_{n-1,p,m,-1}\|_p^{-1} M_0 + M_n. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случаи 1) и 2) очевидны. В случае 3) необходимость следует из теоремы 1. Для доказательства достаточности условия (40) рассмотрим функцию

$$f_c(x) = \frac{M_{n-1}}{(n-1)!} Q_{n-1,p,m,-1}(x) + cx^{n-2},$$

которая при произвольном $c \geq 0$ удовлетворяет равенствам (39) и

$$\|f_c^{(n-1)}\|_\infty = M_{n-1}, \quad \|f_c^{(n)}\|_1 = 0.$$

Поскольку в силу (40) $\|f_0\|_p \leq M_0$, а $\|f_c\|_p$ непрерывно зависит от $c \geq 0$ и неограниченно возрастает при $c \rightarrow \infty$, то существует c_0 , для которого $\|f_{c_0}\|_p = M_0$.

В случае 4) необходимость следует из теоремы 1 и следствия 2, если дополнительно учесть [2, с. 46], что

$$\left\| \int_0^1 f^{(n)}(\xi) \Lambda(x, \xi) d\xi \right\|_\infty < \|f^{(n)}\|_1,$$

когда $\|f^{(n)}\|_1 > 0$.

Для доказательства достаточности в случае 4) исследуем сначала частный подслучай $M_n \leq M_{n-1}$. Определим функцию

$$f_c(x) = \frac{M_{n-1} - M_n}{(n-1)!} Q_{n-1,p,m,-1}(x) + cx^{n-2} + \frac{1}{(n-2)!} \int_0^1 (x-t)_+^{n-2} w_\varepsilon(t) dt,$$

где $\varepsilon = \min\{c, 1/2\}$, $c > 0$ и

$$w_\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} M_n (\varepsilon - t), & 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon < t \leq 1. \end{cases}$$

Для любого $c > 0$ функция $f_c(x)$ удовлетворяет условиям (39), $f_c^{(n-1)}(x) = M_{n-1} - M_n + w_\varepsilon(x)$ и

$$\|f_c^{(n-1)}\|_\infty = M_{n-1}, \quad \|f_c^{(n)}\|_1 = M_n.$$

Поскольку

$$\left| \int_0^1 (x-t)_+^{n-2} w_\varepsilon(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} M_n,$$

то с учетом (41)

$$\lim_{c \rightarrow +0} \|f_c\|_p = \frac{M_{n-1} - M_n}{(n-1)!} \|Q_{n-1,p,m,-1}\|_p < M_0.$$

Тогда в силу непрерывной зависимости $\|f_c\|_p$ от $c > 0$ и свойства

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \|f_c\|_p = +\infty$$

найдется c_0 такое, что $\|f_{c_0}\|_p = M_0$.

В подслучае $M_{n-1} \leq M_n$ воспользуемся построенной Буренковым [2, с. 46] функцией $\varphi(x) \geq 0$, для которой справедливы свойства

$$\int_0^1 \varphi(x) dx < M_0, \quad \|\varphi\|_\infty = M_{n-1}, \quad \|\varphi'\|_1 = M_n.$$

Рассмотрим удовлетворяющую условиям (39) функцию

$$f_c(x) = cx^{n-2} + \frac{1}{(n-2)!} \int_0^1 (x-t)_+^{n-2} \varphi(t) dt,$$

для которой при любом $c \geq 0$

$$\|f_c^{(n-1)}\|_\infty = \|\varphi\|_\infty = M_{n-1}, \quad \|f_c^{(n)}\|_1 = \|\varphi'\|_1 = M_n.$$

Кроме того,

$$\|f_0\|_p \leq \|f_0\|_\infty \leq \frac{1}{(n-2)!} \int_0^1 \varphi(t) dt < M_0, \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} \|f_c\|_p = +\infty.$$

Следовательно, можно подобрать c_0 так, что $\|f_{c_0}\|_p = M_0$. Теорема доказана.

Выражаю благодарность профессору В.И. Буренкову за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Буренков В. И. О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Тр. МИАН. 1980. Т. 156. С. 22–29.
- [2] Буренков В. И. О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. II // Тр. МИАН. 1986. Т. 173. С. 38–49.
- [3] Landau E. Einige Ungleichungen für zweimal differetierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. 1913. V. 13. P. 43–49.
- [4] Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1914. V. 41. P. 68–72.
- [5] Звягинцев А. И. Некоторые оценки для норм функции и ее производных на конечном интервале // Латвийский матем. ежегодник. 1985. № 29. С. 198–210.
- [6] Звягинцев А. И. Оценки для промежуточной производной функции // Латвийский матем. ежегодник. 1988. № 32. С. 183–186.
- [7] Гусаков В. А. Неравенства с точными постоянными для норм промежуточных производных. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: Университет Дружбы народов, 1990.
- [8] Kallioniemi H. The Landau problem on compact intervals and optimal numerical differentiation // J. Approx. Theory. 1990. V. 63. P. 72–91.
- [9] Шадрин А. Ю. О точных постоянных в неравенствах между L_∞ -нормами производных на конечном отрезке // Докл. РАН. 1992. Т. 326. № 1. С. 50–53.
- [10] Шадрин А. Ю. Интерполяция многочленами Лагранжа, точные постоянные в неравенствах между нормами производных на конечном отрезке // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 5. С. 129–143.
- [11] Boyd D. Best constants in a class of integral inequalities // Pacific J. Math. 1969. V. 30. № 2. P. 367–383.
- [12] Bohl P. Über Differentialungleichungen // J. Reine Angew. Math. 1913. V. 144. P. 284–313.
- [13] Tumura M. Kōkai zōyōbibunhōteisiki ni tuite // Kansū Hōteisiki. 1941. V. 30. P. 20–35.
- [14] Fan K., Taussky O., Todd J. Discrete analogs of inequalities of Wirtinger // Monatsh. Math. 1955. V. 59. № 2. P. 73–90.
- [15] Hukuhara M. On the zeros of solutions of linear ordinary differential equations // Sugaku. 1963. V. 15. P. 108–109.
- [16] Brink J. Inequalities involving $\|f\|_p$ and $\|f^{(n)}\|_q$ for f with n zeros // Pacific J. Math. 1972. V. 42. № 2. P. 289–311.
- [17] Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1975.
- [18] Габущин В. Н. Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \leq \infty$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 4. С. 869–892.
- [19] Буслаев А. П. О точных константах и экстремальных функциях в неравенствах для производных // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 2. С. 159–174.
- [20] Айунц С. А. Совершенные Γ_0 -сплайны и точечная задача Колмогорова–Ландау. Деп. АрмНИИНТИ 23.05.89. № 23-Ар89. Ереван: ЕГУ, 1989.
- [21] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [22] Никольский С. М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1974.

Высшая административная школа при мэрии Санкт-Петербурга

Поступило

26.03.96

Исправленный вариант

08.04.96