Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Е. Иванов, Седловая точка для дифференциальных игр с сильно выпукло-вогнутым интегрантом, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 725–743

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1659>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:27:51

УДК 517.9

СЕДЛОВАЯ ТОЧКА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С СИЛЬНО ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫМ ИНТЕГРАНТОМ

Г. Е. Иванов

В работе рассматриваются нелинейные дифференциальные игры с нулевой суммой на фиксированном отрезке времени, для которых подынтегральная функция (интегрант) в функционале качества является достаточно сильно выпукло-вогнутой функцией по управлениям игроков. Показано, что в рассматриваемой постановке существует седловая точка в классе программных стратегий и принцип минимакса, аналогичный принципу максимума Понтрягина, является необходимым и достаточным условием оптимальности. Рассмотрен пример, на основе которого проведено сопоставление исследуемого класса игр с двумя известными классами дифференциальных игр.

Библиография: 7 названий.

В теории дифференциальных игр с нулевой суммой рассматривается динамическая система, на которую воздействуют два игрока, имеющие противоположные цели. Общий метод определения оптимальных стратегий игроков [1]–[3] основан на конструкции стабильного моста, которая обобщает метод динамического программирования в оптимальном управлении на задачи теории дифференциальных игр. Методы решения задач оптимального управления можно условно разделить на методы, основанные на принципе динамического программирования Р. Беллмана и методы, основанные на принципе максимума Л. С. Понтрягина. Методы первой группы являются глобальными в том смысле, что они решают задачу оптимального управления сразу для всех значений фазового вектора. Методы второй группы – локальные, они позволяют находить оптимальное управление и оптимальную фазовую траекторию исключительно для заданного начального значения фазового вектора. Естественно, вычислительные алгоритмы, основанные на локальных методах, как правило эффективнее глобальных.

В теории дифференциальных игр локальные методы в общем случае не применимы, так как оптимальное программное управление (программное управление – управление, зависящее от времени и начальной позиции, но не зависящее от текущего значения фазового вектора) одного игрока зависит от управления другого игрока. Если в дифференциальной игре существует седловая точка в классе программных стратегий, то для каждого игрока A существует единая программная стратегия такая, что при любых допустимых действиях другого игрока B игроку A гарантировано некоторое значение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00771а.

функционала качества, которое не может быть улучшено за счет выбора другой (необязательно программной) стратегии игрока A . Программные стратегии игроков, образующие седловую точку, естественно назвать *оптимальными программными управлениями*, а траекторию фазового вектора, получающуюся при таких управлениях, – *оптимальной траекторией*. В этом случае решение дифференциальной игры может быть основано на принципе максимума Понтрягина.

В настоящей работе рассматриваются нелинейные дифференциальные игры с нулевой суммой на фиксированном отрезке времени, функционал качества является суммой интегрального и терминального слагаемых. Основное требование состоит в том, чтобы *интегрант* (подынтегральная функция в интегральном слагаемом функционала качества) был сильно выпуклым по управлению игрока, минимизирующего функционал качества, и сильно вогнутым по управлению игрока-максимизирующего. Причем соответствующие константы сильной выпуклости и вогнутости должны быть не меньше некоторого выражения, зависящего от констант гладкости функций, определяющих правую часть системы дифференциальных уравнений и функционал качества игры. В работе показано, что при этих условиях существует седловая точка в классе программных стратегий и принцип минимакса, аналогичный принципу максимума Понтрягина, является необходимым и достаточным условием оптимальности.

Рассмотрен пример, на основе которого проведено сопоставление исследуемого класса игр с двумя известными классами дифференциальных игр: классом линейно-квадратичных игр и классом игр с чисто геометрическими ограничениями на управления игроков.

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

на отрезке времени $t \in [t_0, T]$, $0 \leq t_0 < T$, с функционалом качества

$$\mathcal{J} = \gamma(x(T)) + \int_{t_0}^T \zeta(t, x(t), u(t), v(t)) dt, \quad (1.2)$$

где $u(t) \in P(t) \subset \mathbb{R}^p$ – управление первого игрока, стремящегося минимизировать функционал $\mathcal{J}$, $v(t) \in Q(t) \subset \mathbb{R}^q$ – управление второго игрока, максимизирующего $\mathcal{J}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы;

$$f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

– заданные функции.

Через $\mathbb{R}^s$ обозначено пространство s -мерных векторов-столбцов, через $\overline{\mathbb{R}}$ – расширенная числовая прямая: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Будем предполагать, что для любых $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \zeta(t, x, u, v) &= +\infty && \text{при } u \in \mathbb{R}^p \setminus P(t), \quad v \in Q(t), \\ \zeta(t, x, u, v) &= -\infty && \text{при } u \in P(t), \quad v \in \mathbb{R}^q \setminus Q(t), \\ \zeta(t, x, u, v) &\in \mathbb{R} && \text{при } u \in P(t), \quad v \in Q(t), \end{aligned}$$

что автоматически учитывает ограничения $u(t) \in P(t)$, $v(t) \in Q(t)$.

Через $\mathcal{L}_s^m$ будем обозначать пространство суммируемых в m -й степени (относительно лебеговой меры) функций $\varphi: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^s$ (если t_0 не определено, то предполагаем $t_0 = 0$).

Предполагаем далее, что для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^q$ функция $f(\cdot, x, u, v)$ измерима на $[0, T]$; для любого $t \in [0, T]$ определено непустое выпуклое открытое множество $X(t)$. Для любого $t \in [0, T]$ функция $f(t, \cdot)$ дифференцируема на множестве $X(t) \times P(t) \times Q(t)$ и выполнено условие продолжимости решений, т.е. для любых $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in X(t_0)$, $u \in \mathcal{L}_p^2$, $v \in \mathcal{L}_q^2$ таких, что $u(t) \in P(t)$, $v(t) \in Q(t)$ при $t \in [t_0, T]$, существует решение в смысле Каратеодори задачи Коши (1.1), причем $x(t) \in X(t)$ для любого $t \in [t_0, T]$. Обозначим это решение через $\chi(t, t_0, x_0, u, v)$.

Договоримся, что при дифференцировании n -мерного столбца по m -мерному столбцу получается $n \times m$ -матрица, при дифференцировании n -мерной строки по m -мерной строке получается $m \times n$ -матрица.

Будем говорить, что матрица-функция $M(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ удовлетворяет условию Липшица с константой L на множестве $\mathcal{T}$, если

$$\forall t_1, t_2 \in \mathcal{T} \quad \|M(t_1) - M(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|.$$

Будем предполагать далее, что для любых $t \in [0, T]$ на множестве $X(t) \times P(t) \times Q(t)$ матрица производных $\partial f(t, x, u, v)/\partial x$ ограничена по норме числом $N_x^f(t)$ и удовлетворяет условию Липшица по x , u , v с константами $L_{xx}^f(t)$, $L_{xu}^f(t)$, $L_{xv}^f(t)$; матрица производных $\partial f(t, x, u, v)/\partial u$ ограничена по норме числом $N_u^f(t)$ и удовлетворяет условию Липшица по u с константой $L_{uu}^f(t)$; матрица производных $\partial f(t, x, u, v)/\partial v$ ограничена по норме числом $N_v^f(t)$ и удовлетворяет условию Липшица по v с константой $L_{vv}^f(t)$; кроме того,

$$|f(t, x, u, v)| \leq M^f(t) + N_x^f(t)|x| + N_u^f(t)|u| + N_v^f(t)|v|. \quad (1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $G \subset \mathbb{R}^s$ – выпуклое множество. Будем говорить, что собственная функция $g: \mathbb{R}^s \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ слабо выпукла на G с константой R , если функция $x \mapsto g(x) + \frac{1}{2}R|x|^2$ выпукла на G .

Функция g называется *сильно выпуклой с константой $R > 0$* , если она слабо выпукла с константой $-R$ на $\mathbb{R}^s$.

Функция g называется *слабо (сильно) вогнутой с константой R* , если $-g$ слабо (сильно) выпукла с той же константой R .

Предполагаем далее, что функция γ дифференцируема, слабо выпукла с константой $R^{+\gamma} \geq 0$ и слабо вогнута с константой $R^{-\gamma} \geq 0$ на множестве $X(T)$. Определим константу $N^\gamma \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$N^\gamma = \sup_{x \in X(T)} \left| \frac{d\gamma(x)}{dx} \right|.$$

Будем предполагать далее, что функция $\zeta: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ борелевская; для любых $t \in [0, T]$, $x \in X(t)$, $u \in P(t)$, $v \in Q(t)$ функция $\zeta(t, x, u, v)$ сильно выпукла с константой $R_u^\zeta(t)$ и полунепрерывна снизу по $u \in \mathbb{R}^p$, сильно вогнута с константой $R_v^\zeta(t)$ и полунепрерывна сверху по $v \in \mathbb{R}^q$, причем

$$R_u^\zeta(t) \geq R_{u, \min}^\zeta > 0, \quad R_v^\zeta(t) \geq R_{v, \min}^\zeta > 0; \quad (1.4)$$

для любых $t \in [0, T]$, $u \in P(t)$, $v \in Q(t)$ функция $\zeta(t, \cdot, u, v)$ дифференцируема на $X(t)$, градиент $\partial\zeta(t, x, u, v)/\partial x$ удовлетворяет условию Липшица по u, v с константами $L_{xu}^\zeta(t)$, $L_{xv}^\zeta(t)$; функция ζ слабо выпукла и слабо вогнута по x с константами $R_x^{+\zeta}(t)$, $R_x^{-\zeta}(t) \geq 0$ на $X(t)$;

$$\forall t \in [0, T], \quad x \in X(t), \quad u \in P(t), \quad v \in Q(t)$$

$$\left\| \frac{\partial\zeta(t, x, u, v)}{\partial x} \right\| \leq M_x^\zeta(t) + L_{xx}^\zeta(t)|x| + L_{xu}^\zeta(t)|u| + L_{xv}^\zeta(t)|v|. \quad (1.5)$$

Определим функцию $N_x^\zeta: [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$N_x^\zeta(t) = \sup_{x \in X(t), u \in P(t), v \in Q(t)} \left\| \frac{\partial\zeta(t, x, u, v)}{\partial x} \right\|.$$

Пусть $t \in [0, T]$, $x \in X(t)$, $u \in P(t)$, $v \in Q(t)$. Определим

$$u_0(t, x, v) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^p} \zeta(t, x, u, v), \quad v_0(t, x, u) = \arg \max_{v \in \mathbb{R}^q} \zeta(t, x, u, v). \quad (1.6)$$

Будем предполагать, что для любых $t \in [0, T]$, $x \in X(t)$, $u \in P(t)$, $v \in Q(t)$

$$|u_0(t, x, v)| \leq M^u(t) + M_v^u(t)|v| + M_x^u(t)|x|, \quad |v_0(t, x, u)| \leq M^v(t) + M_u^v(t)|u| + M_x^v(t)|x|. \quad (1.7)$$

Зафиксируем произвольную непрерывную функцию $x^0: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такую, что $x^0(t) \in X(t)$ для любого $t \in [0, T]$. Обозначим через $u_s^0(t)$, $v_s^0(t)$ седловую точку функции $\zeta(t, x^0(t), \cdot, \cdot)$:

$$\forall u \in \mathbb{R}^p, \quad v \in \mathbb{R}^q \quad \zeta(t, x^0(t), u_s^0(t), v) \leq \zeta(t, x^0(t), u_s^0(t), v_s^0(t)) \leq \zeta(t, x^0(t), u, v_s^0(t)).$$

Будем предполагать, что функция $t \rightarrow \zeta(t, x^0(t), u_s^0(t), v_s^0(t))$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^1$, а также $u_s^0 \in \mathcal{L}_p^2$, $v_s^0 \in \mathcal{L}_q^2$,

$$\begin{aligned} M^f, N_x^f, L_{xx}^f, R_x^{+\zeta}, R_x^{-\zeta}, M_x^\zeta, L_{xx}^\zeta &\in \mathcal{L}_1^1, \\ N_u^f, N_v^f, L_{xu}^f, L_{xv}^f, L_{xu}^\zeta, L_{xv}^\zeta, M^u, M^v, M_x^u, M_x^v &\in \mathcal{L}_1^2, \\ R_u^\zeta, R_v^\zeta, L_{uu}^f, L_{vv}^f, M_u^u, M_v^v &\in \mathcal{L}_1^\infty. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Определим множества допустимых стратегий первого и второго игроков:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \left\{ u \in \mathcal{L}_p^2 : \int_{t_0}^T \left(\max_{v \in \mathbb{R}^q} \zeta(t, x^0(t), u(t), v) \right) dt < +\infty \right\}, \\ \mathcal{V} &= \left\{ v \in \mathcal{L}_q^2 : \int_{t_0}^T \left(\min_{u \in \mathbb{R}^p} \zeta(t, x^0(t), u, v(t)) \right) dt > -\infty \right\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Заметим, что $u_s^0 \in \mathcal{U}$, $v_s^0 \in \mathcal{V}$, следовательно, множества допустимых стратегий непусты. В силу (1.5) множества $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ не зависят от выбора непрерывной функции $x^0(t) \in X(t)$.

Определим функцию

$$e(t) = \exp\left(\int_t^T N_x^f(\tau) d\tau\right)$$

и числа

$$\begin{aligned} K_{uu}^f &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \frac{L_{uu}^f(t)e(t)}{R_u^\zeta(t)}, & K_{vv}^f &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \frac{L_{vv}^f(t)e(t)}{R_v^\zeta(t)}, \\ K_u^f &= \int_0^T \frac{(N_u^f(t)e(t))^2}{R_u^\zeta(t)} dt, & K_v^f &= \int_0^T \frac{(N_v^f(t)e(t))^2}{R_v^\zeta(t)} dt, \\ K_{xu}^f &= \int_0^T \frac{(L_{xu}^f(t)e(t))^2}{R_u^\zeta(t)} dt, & K_{xv}^f &= \int_0^T \frac{(L_{xv}^f(t)e(t))^2}{R_v^\zeta(t)} dt, \\ K_{xu}^\zeta &= \int_0^T \frac{(L_{xu}^\zeta(t))^2}{R_u^\zeta(t)} dt, & K_{xv}^\zeta &= \int_0^T \frac{(L_{xv}^\zeta(t))^2}{R_v^\zeta(t)} dt, \\ K_{xx}^f &= \int_0^T L_{xx}^f(t)e(t) dt, & K_{xx}^{+\zeta} &= \int_0^T R_x^{+\zeta}(t) dt, & K_{xx}^{-\zeta} &= \int_0^T R_x^{-\zeta}(t) dt, \end{aligned}$$

определим константу $K^\gamma \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$K^\gamma = N^\gamma + \int_0^T N_x^\zeta(t) dt.$$

Будем предполагать, что либо динамика системы (1.1) линейна:

$$f(t, x, u, v) = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad (1.10)$$

либо $K^\gamma < +\infty$.

Определим константы

$$\begin{aligned} K_{uu}^J &= K^\gamma (K_{uu}^f + 2(K_{xu}^f K_u^f)^{1/2} + K_{xx}^f K_u^f) + 2(K_{xu}^\zeta K_u^f)^{1/2} + K_{xx}^{+\zeta} K_u^f + R^{+\gamma} K_u^f, \\ K_{vv}^J &= K^\gamma (K_{vv}^f + 2(K_{xv}^f K_v^f)^{1/2} + K_{xx}^f K_v^f) + 2(K_{xv}^\zeta K_v^f)^{1/2} + K_{xx}^{-\zeta} K_v^f + R^{-\gamma} K_v^f. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Положим по определению $+\infty \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = 0$. Поэтому в случае линейной динамики (1.10) первые слагаемые в (1.11) равны 0 даже в том случае, когда $K^\gamma = +\infty$.

Наконец, будем предполагать, что

$$K_{uu}^J < 1, \quad K_{vv}^J < 1. \quad (1.12)$$

Заметим, что для любых функций $N_x^f, N_u^f, N_v^f, L_{xx}^f, L_{xu}^f, L_{xv}^f, L_{uu}^f, L_{vv}^f, L_{xu}^\zeta, L_{xv}^\zeta, R_x^{+\zeta}, R_x^{-\zeta}$ классов (1.8) найдутся достаточно большие числа $R_{u,\min}^\zeta, R_{v,\min}^\zeta$ (1.4) такие, что выполнены неравенства (1.12).

2. Вспомогательные результаты. Через $\mathbb{R}^{s*}$ будем обозначать пространство s -мерных вектор-строк, через $\mathcal{L}_{s*}^m$ – пространство суммируемых в m -й степени функций $\varphi: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{s*}$.

Пусть собственная функция $g: \mathbb{R}^s \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ дифференцируема в точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ по любому направлению, т.е.

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \exists g'(\bar{x}, y) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} (g(\bar{x} + ty) - g(\bar{x})) \in \overline{\mathbb{R}},$$

тогда *субдифференциалом* функции g в точке $\bar{x}$ называется множество

$$\partial g(\bar{x}) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n*} : \xi y \leq g'(\bar{x}, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

В дальнейшем будем использовать следующую простую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть собственная функция $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ слабо выпукла с константой R на выпуклом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in X$, $\xi \in \partial g(\bar{x})$. Тогда

$$\forall x \in X \quad g(x) \geq g(\bar{x}) + \xi(x - \bar{x}) - \frac{1}{2}R|x - \bar{x}|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию

$$g_0(x) = g(x) - g(\bar{x}) - \xi(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}R|x - \bar{x}|^2.$$

Заметим, что функция g_0 выпукла и $0 \in \partial g_0(\bar{x})$, следовательно, для любого $x \in X$ $g_0(x) \geq g_0(\bar{x}) = 0$.

Пусть $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in X(t_0)$, $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$. Определим функционал качества игры:

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, u, v) = \gamma(\chi(T, t_0, x_0, u, v)) + \int_{t_0}^T \zeta(t, \chi(t, t_0, x_0, u, v), u(t), v(t)) dt. \quad (2.1)$$

Определим вспомогательный функционал $\rho: \mathcal{L}_p^2 \rightarrow \mathbb{R}$, который в силу неравенства (1.4) и включения $R_u^\zeta \in \mathcal{L}_1^\infty$ эквивалентен норме пространства $\mathcal{L}_p^2$:

$$\rho(u) = \left(\int_{t_0}^T R_u^\zeta(t) |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Зафиксируем произвольные $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in X(t_0)$, $\bar{u} \in \mathcal{U}$, $\bar{v} \in \mathcal{V}$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \chi(t, t_0, x_0, \bar{u}, \bar{v}), & \zeta_x(t) &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)), \\ f_x(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)), & f_u(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для любых $\eta \in X(t_0)$, $u \in \mathcal{U}$ определим

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{J}(\eta, u) &= \gamma(\chi(T, t_0, \eta, u, \bar{v}) - \gamma(\bar{x}(T))) \\ &+ \int_{t_0}^T (\zeta(t, \chi(t, t_0, \eta, u, \bar{v}), u(t), \bar{v}(t)) - \zeta(t, \bar{x}(t), u(t), \bar{v}(t))) dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Определим $n \times n$ -матрицу $\Phi(t, \tau)$ как решение линейной системы

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = -\Phi(t, \tau) f_x(t)$$

с начальным условием $\Phi(\tau, \tau) = E$.

Определим строку $d \in \mathbb{R}^{n*}$:

$$d = \frac{d\gamma}{dx}(\bar{x}(T)) \Phi(t_0, T) + \int_{t_0}^T \zeta_x(\tau) \Phi(t_0, \tau) d\tau, \quad (2.5)$$

функцию-строку $\mathcal{D} \in \mathcal{L}_{p*}^2$:

$$\mathcal{D}(t) = \frac{d\gamma}{dx}(\bar{x}(T)) \Phi(t, T) f_u(t) + \left(\int_t^T \zeta_x(\tau) \Phi(t, \tau) d\tau \right) f_u(t), \quad (2.6)$$

а также константы

$$\begin{aligned} K_{u\eta}^J &= e(0) (K^\gamma (K_{xx}^f (K_u^f)^{1/2} + (K_{xu}^f)^{1/2}) + (R^{+\gamma} + K_{xx}^{+\zeta}) (K_u^f)^{1/2} + K_{xu}^\zeta), \\ K_{\eta\eta}^{+J} &= (e(0))^2 (K^\gamma K_{xx}^f + R^{+\gamma} + K_{xx}^{+\zeta}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для доказательства выпуклости и полунепрерывности снизу функционала (2.1) по $u \in \mathcal{U}$ понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2. Для любых $\eta \in X(t_0)$, $u \in \mathcal{U}$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{J}(\eta, u) &\geq \int_{t_0}^T \mathcal{D}(t) \Delta u(t) dt + d \Delta \eta \\ &- \frac{1}{2} K_{uu}^J \rho^2(\Delta u) - K_{u\eta}^J \rho(\Delta u) |\Delta \eta| - \frac{1}{2} K_{\eta\eta}^{+J} |\Delta \eta|^2, \end{aligned}$$

где $\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$, $\Delta \eta = \eta - x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$x(t) = \chi(t, t_0, \eta, u, \bar{v}), \quad \Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t).$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt} \Delta x(t) = f(t, x(t), u(t), \bar{v}(t)) - f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)),$$

следовательно,

$$\frac{d}{dt} |x(t)| \leq N_x^f(t) |\Delta x(t)| + N_u^f(t) |\Delta u(t)|,$$

поэтому $|\Delta x(t)| \leq \widehat{\Delta x}$, где

$$\widehat{\Delta x} = |\Delta \eta|e(0) + (K_u^f)^{1/2}\rho(\Delta u). \quad (2.8)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} \Delta x(t) - f_x(t) \Delta x(t) - f_u(t) \Delta u(t) \right| \\ & \leq \frac{1}{2} L_{xx}^f(t) (\widehat{\Delta x})^2 + L_{xu}^f(t) \widehat{\Delta x} |\Delta u(t)| + \frac{1}{2} L_{uu}^f(t) |\Delta u(t)|^2, \\ & \|\Phi(t, \tau)\| \leq e(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq \tau \leq T. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} (\Phi(t, \tau) \Delta x(t)) - \Phi(t, \tau) f_x(t) \Delta x(t) - \Phi(t, \tau) f_u(t) \Delta u(t) \right| \\ & \leq e(t) \left(\frac{1}{2} L_{xx}^f(t) (\widehat{\Delta x})^2 + L_{xu}^f(t) \widehat{\Delta x} |\Delta u(t)| + \frac{1}{2} L_{uu}^f(t) |\Delta u(t)|^2 \right), \end{aligned}$$

откуда с учетом $\Phi(\tau, \tau) = E$ получаем

$$\left| \Delta x(\tau) - \Phi(t_0, \tau) \Delta \eta - \int_{t_0}^{\tau} \Phi(\xi, \tau) f_u(\xi) \Delta u(\xi) d\xi \right| \leq K_1, \quad (2.9)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{2} K_{xx}^f (\widehat{\Delta x})^2 + (K_{xu}^f)^{1/2} \widehat{\Delta x} \rho(\Delta u) + \frac{1}{2} K_{uu}^f \rho^2(\Delta u). \quad (2.10)$$

Заметим, что в силу леммы 1

$$\begin{aligned} & \zeta(t, x(t), u(t), \bar{v}(t)) - \zeta(t, \bar{x}(t), u(t), \bar{v}(t)) \\ & \geq \zeta_x(t) \Delta x(t) - \frac{1}{2} R_x^+ \zeta(t) |\Delta x(t)|^2 - L_{xu}^\zeta(t) |\Delta x(t)| \cdot |\Delta u(t)|, \\ & \gamma(x(T)) - \gamma(\bar{x}(T)) \geq \frac{d\gamma}{dx}(\bar{x}(T)) \Delta x(T) - \frac{1}{2} R^{+\gamma} |\Delta x(T)|^2, \end{aligned}$$

откуда и из (2.4) получаем

$$\Delta \mathcal{J}(\eta, u) \geq \int_{t_0}^T \zeta_x(\tau) \Delta x(\tau) d\tau + \frac{d\gamma}{dx}(\bar{x}(T)) \Delta x(T) - K_2, \quad (2.11)$$

где

$$K_2 = \frac{1}{2} R^{+\gamma} (\widehat{\Delta x})^2 + \frac{1}{2} K_{xx}^{+\zeta} (\widehat{\Delta x})^2 + (K_{xu}^\zeta)^{1/2} \widehat{\Delta x} \rho(\Delta u). \quad (2.12)$$

Заметим, что по теореме Фубини

$$\int_{t_0}^T \zeta_x(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} \Phi(\xi, \tau) f_u(\xi) \Delta u(\xi) d\xi \right) d\tau = \int_{t_0}^T \left(\int_t^T \zeta_x(\tau) \Phi(t, \tau) d\tau \right) f_u(t) \Delta u(t) dt,$$

откуда и из (2.5), (2.6), (2.9), (2.11) получаем

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{J}(\eta, u) &\geq \int_{t_0}^T \left(\int_t^T \zeta_x(\tau) \Phi(t, \tau) d\tau \right) f_u(t) \Delta u(t) dt + \left(\int_{t_0}^T \zeta_x(t) \Phi(t_0, t) dt \right) \Delta \eta \\ &\quad + \frac{d\gamma}{dx}(\bar{x}(T)) \left(\Phi(t_0, T) \Delta \eta + \int_{t_0}^T \Phi(t, T) f_u(t) \Delta u(t) dt \right) - K^\gamma K_1 - K_2 \\ &= \int_{t_0}^T \mathcal{D}(t) \Delta u(t) dt + d\Delta \eta - K^\gamma K_1 - K_2,\end{aligned}$$

причем в случае линейной динамики (1.10) $K_1 = 0$, и даже в случае $K^\gamma = +\infty$ следует положить $K^\gamma K_1 = 0$, что оправдывает соглашение $+\infty \cdot 0 = 0$.

Последнее неравенство с учетом (1.11), (2.7), (2.8), (2.10), (2.12) дает требуемое утверждение.

ЛЕММА 3. Для любых $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in X(t_0)$, $\bar{v} \in \mathcal{V}$ функционал $\mathcal{J}(t_0, x_0, \cdot, \bar{v})$, определенный (2.1), полунепрерывен снизу в смысле слабой топологии пространства $\mathcal{L}_p^2$.

ПОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{u_i\}$ – последовательность функций из $\mathcal{L}_p^2$, слабо в $\mathcal{L}_p^2$ сходящаяся к функции $\bar{u} \in \mathcal{L}_p^2$.

Из формул (2.1), (2.4) следует, что

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t_0, x_0, u_i, \bar{v}) - \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}, \bar{v}) \\ = \Delta \mathcal{J}(x_0, u_i) + \int_{t_0}^T (\zeta(t, \bar{x}(t), u_i(t), \bar{v}(t)) - \zeta(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))) dt.\end{aligned}\quad (2.13)$$

В силу леммы 2, неравенства (1.12), формулы (2.2) и включений $\mathcal{D}, \bar{u}^T \in \mathcal{L}_{p*}^2, R_u^\zeta \in \mathcal{L}_1^\infty$ имеем

$$\Delta \mathcal{J}(x_0, u_i) + \frac{1}{2} \rho^2(u_i) - \frac{1}{2} \rho^2(\bar{u}) \geq \int_{t_0}^T (\mathcal{D}(t) + R_u^\zeta(t) \bar{u}^T(t)) (u_i(t) - \bar{u}(t)) dt \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \quad (2.14)$$

Определим функцию

$$\varphi(t, u) = \zeta(t, \bar{x}(t), u, \bar{v}(t)) - \frac{1}{2} R_u^\zeta(t) |u|^2. \quad (2.15)$$

В силу принятых предположений о функции ζ функция φ является выпуклым нормальным интегрантом [4], [5].

Пусть функция $u_0(t, x, v)$ определена формулой (1.6). Определим

$$\bar{u}_0(t) = u_0(t, \bar{x}(t), \bar{v}(t)), \quad \xi(t) = -R_u^\zeta(t) \bar{u}_0^T(t).$$

Тогда в силу (1.3), (1.7), (1.9) $\bar{u}_0 \in \mathcal{L}_{p*}^2, \xi \in \mathcal{L}_{p*}^2, \xi(t) \in \partial_u \varphi(t, \bar{u}_0(t))$, следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi^*(t, \xi(t)) &= \sup_{u \in \mathbb{R}^p} (\xi(t)u - \varphi(t, u)) = \xi(t) \bar{u}_0(t) - \varphi(t, \bar{u}_0(t)) \\ &= -R_u^\zeta(t) |\bar{u}_0(t)|^2 - \varphi(t, \bar{u}_0(t)) \leq -\zeta(t, \bar{x}(t), \bar{u}_0(t), \bar{v}(t)).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Заметим, что из условия $\bar{v} \in \mathcal{V}$ и из определения множества $\mathcal{V}$ (1.9) следует

$$\int_{t_0}^T \zeta(t, x^0(t), \bar{u}_0(t), \bar{v}(t)) dt > -\infty,$$

что в силу (1.5) и включений $\bar{x} - x^0 \in \mathcal{L}_n^\infty$, $\bar{u} \in \mathcal{L}_p^2$, $M_x^\zeta, L_{xx}^\zeta \in \mathcal{L}_1^1$, $L_{xu}^\zeta, L_{xv}^\zeta \in \mathcal{L}_1^2$ дает

$$\int_{t_0}^T \zeta(t, \bar{x}(t), \bar{u}_0(t), \bar{v}(t)) dt > -\infty,$$

откуда и из (2.16) получаем

$$\int_{t_0}^T \varphi^*(t, \xi(t)) dt < +\infty.$$

При этих условиях, как показано в работе Рокафеллара [4, с. 188, следствие 3D], функционал

$$u \rightarrow \int_{t_0}^T \varphi(t, u(t)) dt$$

полу непрерывен снизу в слабой топологии $\mathcal{L}_p^2$, следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T (\varphi(t, u_i(t)) - \varphi(t, \bar{u}(t))) dt \geq 0.$$

Откуда и из (2.13)–(2.15) получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in X(t_0)$, $\bar{v} \in \mathcal{V}$, $C \in \mathbb{R}$. Тогда лебегово множество

$$\mathcal{U}_C = \{u \in \mathcal{U} : \mathcal{J}(t_0, x_0, u, \bar{v}) \leq C\}$$

либо пусто, либо предкомпактно в смысле слабой топологии пространства $\mathcal{L}_p^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $u_0(t, x, v)$ определена формулой (1.6). Обозначим $\bar{f}(t, x) = f(t, x, u_0(t, x, \bar{v}(t)), \bar{v}(t))$. Заметим, что в силу сильной выпуклости функции ζ по u и липшицевости градиента $\partial \zeta(t, x, u, v)/\partial x$ по u функция u_0 липшицева по x , а значит, и функция $\bar{f}$ липшицева по x . Кроме того, из условий (1.3), (1.7) следует, что $|\bar{f}(t, x)| \leq C^f(t) + C_x^f(t)|x|$, где $C^f, C_x^f \in \mathcal{L}_1^1$.

Таким образом, существует решение задачи Коши $\dot{x}(t) = \bar{f}(t, x(t))$, $t \in [t_0, T]$, $x(t_0) = x_0$, которое мы обозначим $\bar{x}(t)$.

Определим $\bar{u}(t) = u_0(t, \bar{x}(t), \bar{v}(t))$. Применяя лемму 2, получим

$$\Delta \mathcal{J}(x_0, u) \geq -K^\mathcal{D} \rho(\Delta u) - \frac{1}{2} K_{uu}^J \rho^2(\Delta u), \quad (2.17)$$

где

$$K^\mathcal{D} = \left(\int_{t_0}^T \frac{\mathcal{G}^2(t)}{R_u^\zeta(t)} dt \right)^{1/2}, \quad \Delta u = u - \bar{u}.$$

Из леммы 1 с учетом условия $0 \in \partial_u \zeta(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))$, получаем

$$\zeta(t, \bar{x}(t), u(t), \bar{v}(t)) - \zeta(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \geq \frac{1}{2} R_u^\zeta(t) |u(t) - \bar{u}(t)|^2,$$

что с учетом (2.1), (2.2), (2.4), (2.17) дает

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, u, \bar{v}) - \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}, \bar{v}) \geq \frac{1}{2}(1 - K_{uu}^J)\rho^2(\Delta u) - K^{\mathcal{D}}\rho(\Delta u),$$

следовательно,

$$\rho(\Delta u) \leq \frac{K^{\mathcal{D}}}{1 - K_{uu}^J} + \left(\left(\frac{K^{\mathcal{D}}}{1 - K_{uu}^J} \right)^2 + 2 \frac{\mathcal{J}(t_0, x_0, u, \bar{v}) - \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}, \bar{v})}{1 - K_{uu}^J} \right)^{1/2},$$

откуда с учетом (2.2) получаем, что если $u \in \mathcal{U}_C$, то

$$\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{L}_p^2} \leq \frac{1}{R_{u, \min}^\zeta} \left(\frac{K^{\mathcal{D}}}{1 - K_{uu}^J} + \left(\left(\frac{K^{\mathcal{D}}}{1 - K_{uu}^J} \right)^2 + 2 \frac{C - \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}, \bar{v})}{1 - K_{uu}^J} \right)^{1/2} \right),$$

следовательно, множество $\mathcal{U}_C$ ограничено по норме $\mathcal{L}_p^2$ и (см. [6, с. 234]) предкомпактно в смысле слабой топологии пространства $\mathcal{L}_p^2$.

Пусть константы K_{vv}^J , K_{uu}^J , $K_{u\eta}^J$, $K_{\eta\eta}^{+J}$ определены формулами (1.11), (2.7), а константы $K_{v\eta}^J$, $K_{\eta\eta}^{-J}$ — формулами, аналогичными (2.7). Определим константы

$$R_x^{+\Upsilon} = \frac{(K_{u\eta}^J)^2}{1 - K_{uu}^J} + K_{\eta\eta}^{+J}, \quad R_x^{-\Upsilon} = \frac{(K_{v\eta}^J)^2}{1 - K_{vv}^J} + K_{\eta\eta}^{-J}. \quad (2.18)$$

ЛЕММА 5. Для любых $\eta_1, \eta_2 \in X(t_0)$, $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$, $\bar{v} \in \mathcal{V}$, $\lambda \in [0, 1]$ верно неравенство

$$\delta \mathcal{J} \leq \frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda)R_x^{+\Upsilon}|\eta_2 - \eta_1|^2,$$

где

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J} &= \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}, \bar{v}) - \lambda \mathcal{J}(t_0, \eta_2, u_2, \bar{v}) - (1 - \lambda) \mathcal{J}(t_0, \eta_1, u_1, \bar{v}), \\ x_0 &= \lambda \eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2, \quad \bar{u}(t) = \lambda u_1(t) + (1 - \lambda)u_2(t). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 2 для $\eta = \eta_i$, $u = u_i$, $i = 1, 2$, с учетом формул (2.1), (2.4) получим

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}, \bar{v}) - \mathcal{J}(t_0, \eta_i, u_i, \bar{v}) \\ &\leq \int_{t_0}^T \mathcal{D}(t)(\bar{u}(t) - u_i(t)) dt + d(x_0 - \eta_i) \\ &\quad + \int_{t_0}^T (\zeta(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) - \zeta(t, \bar{x}(t), u_i(t), \bar{v}(t))) dt \\ &\quad - \frac{1}{2}K_{uu}^J\rho^2(\bar{u} - u_i) - K_{u\eta}^J\rho(\bar{u} - u_i)|x_0 - \eta_i| - \frac{1}{2}K_{\eta\eta}^{+J}|x_0 - \eta_i|^2. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства с весами λ и $1 - \lambda$, с учетом сильной выпуклости функции ζ по u с константой $R_u^\zeta(t)$ и формулы (2.2) получим

$$\delta \mathcal{J} \leq \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} ((K_{uu}^J - 1)\rho^2(u_2 - u_1) + 2K_{u\eta}^J\rho(u_2 - u_1)|\eta_2 - \eta_1| + K_{\eta\eta}^{+J}|\eta_2 - \eta_1|^2).$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $\rho(u_2 - u_1)$ с учетом формул (1.12), (2.18), получим утверждение леммы.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Для дифференциальной игры (1.1), (1.2) существует седловая точка в классе программных стратегий:*

$$\forall t_0 \in [0, T], \quad x_0 \in X(t_0) \quad \exists \hat{u} \in \mathcal{U}, \quad \hat{v} \in \mathcal{V} : \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad v \in \mathcal{V} \\ \mathcal{J}(t_0, x_0, \hat{u}, v) \leq \mathcal{J}(t_0, x_0, \hat{u}, \hat{v}) \leq \mathcal{J}(t_0, x_0, u, \hat{v}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 3–5 следует, что функционал $\mathcal{J}(t_0, x_0, \cdot, v)$ выпуклый, полунепрерывный снизу и его лебеговы множества $\mathcal{U}_C$ предкомпактны в смысле слабой топологии пространства $\mathcal{L}_p^2$. Аналогично, функционал $\mathcal{J}(t_0, x_0, u, \cdot)$ вогнут, полунепрерывен сверху и его лебеговы множества $\mathcal{V}_C = \{v \in \mathcal{V} : \mathcal{J}(t_0, x_0, u, v) \geq C\}$ предкомпактны в смысле слабой топологии пространства $\mathcal{L}_q^2$. Применяя теорему фон Неймана [7], получаем требуемое утверждение.

Теорема 1 показывает, что для рассматриваемых дифференциальных игр, если один из игроков управляет оптимально, то другой игрок ничего не проиграет, если будет выбирать свое управление заранее на всем отрезке времени $[t_0, T]$, информация о состоянии фазового вектора системы в текущие моменты времени $t > t_0$ для него бесполезна. Однако, если один из игроков выберет неоптимальное управление, то другой игрок может этим воспользоваться, измерив значение фазового вектора в текущий момент времени и найдя оптимальное управление для дифференциальной игры (1.1), (1.2) на отрезке времени $[t, T]$.

Из теоремы 1 следует, что функция цены игры (см. [3, с. 78]) Υ может быть определена по следующей формуле:

$$\Upsilon(t_0, x_0) = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{J}(t_0, x_0, u, v) = \max_{v \in \mathcal{V}} \min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t_0, x_0, u, v). \quad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 2. *Функция цены игры слабо выпукла с константой $R_x^{+\Upsilon}$ из (2.18) и слабо вогнута с константой $R_x^{-\Upsilon}$ по начальной позиции $x_0 \in X(t_0)$ для любого $t_0 \in [0, T]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные $t_0 \in [0, T]$, $\eta_1, \eta_2 \in X(t_0)$, $\lambda \in [0, 1]$. Обозначим $\bar{\eta} = \lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2$. В силу теоремы 1 существуют функция $\hat{v} \in \mathcal{V}$ и функции $u_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2$:

$$\Upsilon(t_0, \bar{\eta}) = \min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t_0, \bar{\eta}, u, \hat{v}), \quad \Upsilon(t_0, \eta_i) = \max_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{J}(t_0, \eta_i, u_i, v). \quad (3.2)$$

Определим $\bar{u}(t) = \lambda u_1(t) + (1 - \lambda)u_2(t)$. Тогда из (3.2) следует

$$\Upsilon(t_0, \bar{\eta}) \leq \mathcal{J}(t_0, \bar{\eta}, \bar{u}, \hat{v}), \quad \Upsilon(t_0, \eta_i) \geq \mathcal{J}(t_0, \eta_i, u_i, \hat{v}). \quad (3.3)$$

Из леммы 5 получаем

$$\lambda \mathcal{J}(t_0, \eta_2, u_2, \hat{v}) + (1 - \lambda) \mathcal{J}(t_0, \eta_1, u_1, \hat{v}) - \mathcal{J}(t_0, \bar{\eta}, \bar{u}, \hat{v}) \geq -\frac{1}{2} \lambda(1 - \lambda) R_x^{+\Upsilon} |\eta_2 - \eta_1|^2,$$

что вместе с (3.3) дает

$$\lambda \Upsilon(t_0, \eta_2) + (1 - \lambda) \Upsilon(t_0, \eta_1) - \Upsilon(t_0, \bar{\eta}) \geq -\frac{1}{2} \lambda(1 - \lambda) R_x^{+\Upsilon} |\eta_2 - \eta_1|^2.$$

Обобщенная вогнутость функции $\Upsilon(t_0, \cdot)$ доказывается аналогично.

Сформулируем принцип минимакса, аналогичный принципу максимума Понтрягина.

Определим функцию Понтрягина $\mathcal{H} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n*} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{H}(t, x, u, v, \psi) = \psi f(t, x, u, v) + \zeta(t, x, u, v).$$

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы управления $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{v} \in \mathcal{V}$ были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы существовала абсолютно непрерывная функция $\psi: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n^*}$ такая, что почти всюду на отрезке $t \in [t_0, T]$ выполнено

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t), \psi(t)), \quad \psi(T) = \frac{d\gamma}{dx}(\hat{x}(T)), \quad (3.4)$$

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t), \psi(t)), \quad \hat{x}(t_0) = x_0, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), v, \psi(t)) \leq \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t), \psi(t)) \leq \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), u, \hat{v}(t), \psi(t)) \quad (3.6)$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^p, \quad v \in \mathbb{R}^q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $\hat{u}(t)$, $\hat{v}(t)$ – оптимальные программные стратегии первого и второго игроков, $\hat{x}(t) = \chi(t, t_0, x_0, \hat{u}, \hat{v})$ – решение системы (1.1) при этих управлениях, следовательно, имеет место (3.5). Как следует из теоремы 1, оптимальное управление первого игрока $\hat{u}(t)$ является решением задачи оптимального управления (1.1), (1.2), $J \rightarrow \min$, где в качестве управления $v(t)$ подставлено оптимальное управление $\hat{v}(t)$. Пользуясь принципом максимума Понтрягина для этой задачи оптимального управления, получим, что существует абсолютно непрерывная функция $\psi: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n^*}$, для которой имеет место формула (3.4) и правая часть неравенства (3.6). Аналогично, фиксируя управление первого игрока $\hat{u}(t)$ и рассматривая задачу максимизации функционала $\mathcal{J}$ по $v(t)$, получим существование функции $\tilde{\psi}$, для которой выполнена формула (3.4) и левая часть неравенства (3.6), следовательно, функции ψ и $\tilde{\psi}$ совпадают и выполнены формулы (3.4)–(3.6).

Достаточность. Пусть функции $\hat{x}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$, ψ удовлетворяют условиям (3.4)–(3.6). Обозначим $\bar{u} = \hat{u}$, $\bar{v} = \hat{v}$, $\bar{x} = \hat{x}$ и определим f_x , ζ_x по формулам (2.3). Из (3.4) имеем

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t)f_x(t) - \zeta_x(t), \quad \psi(T) = \frac{d\gamma}{dx}(\hat{x}(T)),$$

следовательно,

$$\psi(t) = \frac{d\gamma}{dx}(\hat{x}(T))\Phi(t, T) + \int_t^T \zeta_x(\tau)\Phi(t, \tau) d\tau.$$

Откуда и из (2.6) получаем $\mathcal{D}(t) = \psi(t)f_u(t)$.

Из правой части неравенства (3.6) следует, что $0 \in \partial_u \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t), \psi(t))$, поэтому $\mathcal{D}(t) \in -\partial_u \zeta(t, \hat{x}(t), \hat{v}(t), \hat{u}(t))$, откуда в силу (2.2) и леммы 1 для любого $u \in \mathcal{U}$ получаем

$$\int_{t_0}^T (\zeta(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{v}(t)) - \zeta(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t))) dt \geq - \int_{t_0}^T \mathcal{D}(t)(u(t) - \hat{u}(t)) dt + \frac{1}{2}\rho^2(u - \hat{u}).$$

Откуда в силу леммы 2 и неравенства (1.12) имеем

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}(t_0, x_0, \hat{u}, \hat{v}) - \mathcal{J}(t_0, x_0, u, \hat{v}) \\ & \leq \Delta \mathcal{J}(x_0, u) + \int_{t_0}^T (\zeta(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{v}(t)) - \zeta(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t))) dt \leq 0. \end{aligned}$$

Аналогично, для любого $v \in \mathcal{V}$ $\mathcal{J}(t_0, x_0, \hat{u}, \hat{v}) \geq \mathcal{J}(t_0, x_0, \hat{u}, v)$, т.е. управления $\hat{u}$, $\hat{v}$ являются оптимальными программными стратегиями.

4. Пример. В данном пункте на простом примере сравнивается рассматриваемая формализация дифференциальных игр с сильно выпукло-вогнутым интегрантом с другими классами дифференциальных игр.

Пусть динамика управляемого объекта определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u, & x_1(0) &= x_1^0, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + v, & x_2(0) &= x_2^0, \end{aligned} \quad x_1, x_2, u, v \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

функционал качества имеет вид

$$\mathcal{J} = \frac{x_1^2(2\pi)}{2} + 2 \int_0^{2\pi} u^2(t) dt - 2b \int_0^{2\pi} v^2(t) dt,$$

на управление игрока v наложено геометрическое ограничение $|v(t)| \leq c$, где $b, c > 0$ – заданные константы.

Как известно, линейную систему с помощью линейного преобразования фазового вектора можно свести к системе, правая часть которой не зависит от фазового вектора. Обозначим $y(t) = x_2(t) \sin t - x_1(t) \cos t$, $y_0 = -x_1^0$. Тогда

$$\dot{y} = v \sin t - u \cos t, \quad y(0) = y_0, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{J} = \frac{y^2(2\pi)}{2} + 2 \int_0^{2\pi} u^2(t) dt - 2b \int_0^{2\pi} v^2(t) dt. \quad (4.2)$$

Проверим выполнение предположений п. 1.

В данном примере $\gamma(x) = \frac{1}{2}x^2$, поэтому $R^{+\gamma} = 0$, $R^{-\gamma} = 1$, $K_{uu}^J = 0 < 1$, $K_{vv}^J = K_v^f$. Далее замечаем, что $e(t) = 1$, $N_v^f(t) = \sin t$, $R_v^\zeta(t) = 4b$, следовательно, $K_{vv}^J = \pi/(4b)$ и условие $K_{vv}^J < 1$ выполняется при $b > \pi/4$.

Для построения оптимальных стратегий воспользуемся принципом минимакса (теорема 3). Функция Понтрягина в нашем примере имеет вид

$$\mathcal{H}(t, x, u, v, \psi) = \begin{cases} \psi v \sin t - \psi u \cos t + 2u^2 - 2bv^2, & |v| \leq c, \\ +\infty, & |v| > c. \end{cases}$$

Так как $\partial \mathcal{H} / \partial x = 0$, то

$$\psi(t) \equiv \psi = \hat{y}(2\pi), \quad (4.3)$$

и оптимальные программные стратегии имеют вид

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{4}\psi \cos t, \quad (4.4)$$

$$\hat{v}(t) = \begin{cases} \frac{\psi \sin t}{4b}, & |\psi \sin t| \leq 4bc, \\ c \operatorname{sgn}(\psi \sin t), & |\psi \sin t| > 4bc. \end{cases} \quad (4.5)$$

Подставляя оптимальные стратегии в уравнение динамики (4.1), находим оптимальную траекторию $\hat{y}(t)$:

$$\hat{y}(t) = y_0 - \frac{\psi}{8} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + \begin{cases} \frac{\psi}{8b} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right), & |\psi| \leq 4bc, \\ \bar{y}(t) \operatorname{sgn} \psi, & |\psi| > 4bc, \end{cases} \quad (4.6)$$

где

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} \frac{|\psi|}{8b} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right), & t \in [0, t_\psi], \\ \frac{|\psi|}{8b} t_\psi + \frac{c}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{4bc}{\psi} \right)^2} - c \cos t, & t \in [t_\psi, \pi - t_\psi], \\ \frac{|\psi|}{8b} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} - \pi + 2t_\psi \right) + c \sqrt{1 - \left(\frac{4bc}{\psi} \right)^2}, & t \in [\pi - t_\psi, \pi + t_\psi], \\ \frac{3|\psi|}{8b} t_\psi + \frac{3c}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{4bc}{\psi} \right)^2} + c \cos t, & t \in [\pi + t_\psi, 2\pi - t_\psi], \\ \frac{|\psi|}{8b} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} - 2\pi + 4t_\psi \right) + 2c \sqrt{1 - \left(\frac{4bc}{\psi} \right)^2}, & t \in [2\pi - t_\psi, 2\pi], \end{cases}$$

$$t_\psi = \arcsin \frac{4bc}{|\psi|}.$$

Откуда и из (4.3) получаем уравнение для определения ψ

$$y_0 = \begin{cases} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4b} \right) \psi, & |\psi| \leq 4bc, \\ \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \psi - \frac{\psi}{2b} \arcsin \frac{4bc}{|\psi|} - 2c \sqrt{1 - \left(\frac{4bc}{\psi} \right)^2} \operatorname{sgn} \psi, & |\psi| > 4bc. \end{cases} \quad (4.7)$$

Из формул (4.2), (4.4), (4.5) определим функцию цены игры $\Upsilon(0, y_0) = \mathcal{J}(0, y_0, \hat{u}, \hat{v})$ (3.1):

$$\Upsilon(0, y_0) = \begin{cases} \psi^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8b} \right), & |\psi| \leq 4bc, \\ \frac{(4 + \pi)\psi^2}{8} + c|\psi| \sqrt{1 - \left(\frac{4bc}{\psi} \right)^2} - \arcsin \frac{4bc}{|\psi|} \left(\frac{\psi^2}{4b} - 8bc^2 \right) - 4\pi bc^2, & |\psi| > 4bc. \end{cases} \quad (4.8)$$

Как следует из теоремы 1, в случае $b > \pi/4$ оптимальные программные стратегии игроков, оптимальная траектория и функция цены игры определяются формулами (4.4)–(4.6), (4.8), где вектор ψ определяется по начальной позиции фазового вектора y_0 из уравнения (4.7).

В предельном случае $b = 1$, $c = +\infty$ получаем линейно-квадратичную дифференциальную игру, решение которой может быть получено как по формулам (4.4)–(4.8), так и с помощью известного алгоритма, основанного на решении матричного дифференциального уравнения Риккати [3, с. 160]. Линейно-квадратичная формализация, как известно, не позволяет учитывать геометрические ограничения на управления, так как при достаточно большом значении фазового вектора управления игроков будут сколь

Рис. 1. Оптимальные программные управления для игр с начальным условием $y_0 = 12$

Рис. 2. Траектории, полученные из принципа минимакса, для игр с начальными условиями $y_0 = 0, 4, 8, 12$. Траектория для игры с параметрами $y_0 = 0, b = 0, c = 1$ не является оптимальной, остальные – оптимальные

угодно большими. На рис. 1–3 изображены оптимальные программные стратегии игроков, оптимальные траектории и функция цены игры. Графики, относящиеся к игре с параметрами $b = 1, c = +\infty$, т.е. к линейно-квадратичной игре, показаны пунктиром.

В случае $b = 0, c = 1$ на управление игрока v наложено лишь геометрическое ограничение. В этом случае предположение п. 1 о сильной выпукло-вогнутости интегранта не выполнено. Если все же седловая точка в классе программных стратегий существует, то имеет место принцип минимакса (теорема 3). Тогда оптимальные стратегии,

Рис. 3. Функции цен дифференциальных игр

оптимальная траектория и функция цены игры определяются формулами

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= \frac{1}{4}\psi \cos t, & \hat{v}(t) &= \operatorname{sgn}(\psi \sin t), \\ \hat{y}(t) &= y_0 - \frac{\psi}{8} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + \operatorname{sgn} \psi \cdot \begin{cases} 1 - \cos t, & t \in [0, \pi], \\ 3 + \cos t, & t \in [\pi, 2\pi], \end{cases}\end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{|y_0| + 4}{1 + \pi/4} \operatorname{sgn} y_0, & \hat{u}(t) &= \frac{|y_0| + 4}{4 + \pi} \cos t \operatorname{sgn} y_0, & \hat{v}(t) &= \operatorname{sgn}(y_0 \sin t), \\ \hat{y}(t) &= y_0 - \frac{|y_0| + 4}{8 + 2\pi} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \operatorname{sgn} y_0 + \operatorname{sgn} y_0 \cdot \begin{cases} 1 - \cos t, & t \in [0, \pi], \\ 3 + \cos t, & t \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \\ \Upsilon(0, y_0) &= \frac{2(|y_0| + 4)^2}{4 + \pi}.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Седловая точка в классе программных стратегий существует тогда и только тогда, когда

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \max_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{J}(0, y_0, u, v) = \max_{v \in \mathcal{V}} \min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(0, y_0, u, v).$$

Найдем $\max_{v \in \mathcal{V}} \min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(0, y_0, u, v)$. При фиксированном программном управлении $v \in \mathcal{V}$ минимум $\mathcal{J}(0, y_0, u, v)$ по u в силу принципа максимума Понтрягина достигается на функции $u(t) = \frac{1}{4}\psi \cos t$, где

$$\psi = y(2\pi) = y_0 - \frac{\pi}{4}\psi + \int_0^{2\pi} v(t) \sin t \, dt,$$

поэтому

$$\begin{aligned}\min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(0, y_0, u, v) &= \frac{4 + \pi}{8} \psi^2 = \frac{2}{4 + \pi} \left(y_0 + \int_0^{2\pi} v(t) \sin t \, dt \right)^2, \\ \max_{v \in \mathcal{V}} \min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(0, y_0, u, v) &= \max_{|V| \leq 4} \frac{2(y_0 + V)^2}{4 + \pi} = \frac{2(|y_0| + 4)^2}{4 + \pi}.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Найдем $\min_{u \in \mathcal{U}} \max_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{J}(0, y_0, u, v)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\max}(y_0, u) &\equiv \max_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{J}(0, y_0, u, v) \\ &= \frac{1}{2} \max_{|V| \leq 4} \left(y_0 - \int_0^{2\pi} u(t) \cos t \, dt + V \right)^2 + 2 \int_0^{2\pi} u^2(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\left| y_0 - \int_0^{2\pi} u(t) \cos t \, dt \right| + 4 \right)^2 + 2 \int_0^{2\pi} u^2(t) \, dt.\end{aligned}$$

Для определения $u_{\min \max}$ – функции, на которой достигается минимум по $u \in \mathcal{U}$ функционала $\mathcal{J}_{\max}(y_0, u)$ – рассмотрим два случая:

$$1) \int_0^{2\pi} u_{\min \max}(t) \cos t \, dt = y_0; \quad 2) \int_0^{2\pi} u_{\min \max}(t) \cos t \, dt \neq y_0.$$

В случае 1) согласно принципу максимума Понтрягина

$$u_{\min \max}(t) = \frac{y_0 \cos t}{\pi}, \quad \min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_{\max}(y_0, u) = 8 + \frac{2y_0^2}{\pi} \equiv \widehat{\mathcal{J}}_1(y_0).$$

В случае 2)

$$\begin{aligned}u_{\min \max}(t) &= \frac{|y_0| + 4}{4 + \pi} \cos t \operatorname{sgn} y_0, \\ \min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_{\max}(y_0, u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{4||y_0| - \pi|}{4 + \pi} + 4 \right)^2 + \frac{2\pi(|y_0| + 4)^2}{(4 + \pi)^2} \equiv \widehat{\mathcal{J}}_2(y_0).\end{aligned}$$

Так как при $|y_0| < \pi$ выполнено неравенство $\widehat{\mathcal{J}}_1(y_0) < \widehat{\mathcal{J}}_2(y_0)$, а при $|y_0| > \pi$ – неравенство $\widehat{\mathcal{J}}_1(y_0) > \widehat{\mathcal{J}}_2(y_0)$, то при $|y_0| < \pi$ реализуется случай 1), а при $|y_0| > \pi$ – случай 2). Следовательно,

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \max_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{J}(0, y_0, u, v) = \begin{cases} 8 + \frac{2}{\pi} y_0^2, & |y_0| < \pi, \\ \frac{2(|y_0| + 4)^2}{4 + \pi}, & |y_0| \geq \pi. \end{cases}\quad (4.11)$$

Из формул (4.10), (4.11) следует, что седловая точка в классе программных стратегий для игры с параметрами $b = 0$, $c = 1$ существует только при $|y_0| \geq \pi$.

Графики, относящиеся к дифференциальной игре с параметрами $b = 0$, $c = 1$, т.е. с чисто геометрическими ограничениями на управление игрока v , показаны на рис. 1–3 линиями из точек.

На рис. 1 изображены оптимальные программные управления игроков для игры с начальным условием $y_0 = 12$. Оптимальная программная стратегия игрока v имеет разрыв в точке $t = \pi$. На рис. 2 изображены траектории фазового вектора, полученные из принципа минимакса по формуле (4.9) для игр с начальными условиями $y_0 = 0, 4, 8, 12$. Траектория, соответствующая $y_0 = 0$, не является оптимальной (при $|y_0| < \pi$ оптимальных траекторий не существует), а остальные траектории – оптимальные. На рис. 3 изображены графики функций

$$\max_{v \in \mathcal{V}} \min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(0, y_0, u, v) \quad \text{и} \quad \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{J}(0, y_0, u, v). \quad (4.12)$$

При $|y_0| \geq \pi$ значения этих функций совпадают со значением цены игры. При $|y_0| < \pi$ значение цены игры [3, с. 78] лежит между значениями (4.12).

Сплошной линией на рис. 1–3 изображены оптимальные программные стратегии игроков, оптимальные фазовые траектории и функция цены для игры с параметрами $b = 1$, $c = 1$, полученные по формулам (4.4)–(4.6), (4.8). Для такой формализации дифференциальной игры, с одной стороны, явно учтены геометрические ограничения на управление игрока v , а с другой стороны, выполнены условия сильной выпукло-вогнутости интегранта, что позволяет применить принцип минимакса Понтрягина.

Как видно из рассмотренного примера, линейная дифференциальная игра с сильно выпукло-вогнутым интегрантом при малых значениях фазового вектора близка к линейно-квадратичной игре, а при больших значениях фазового вектора – к игре с чисто геометрическими ограничениями на управление.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [2] Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
- [3] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [4] Rockafellar R. T. Integral functionals, normal integrands and measurable selections // Lecture Notes in Math. 1976. V. 543. P. 157–207.
- [5] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
- [6] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
- [7] Нейман Дж. фон. К теории стратегических игр // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 173–204.

Московский физико-технический институт

Поступило

07.02.95

Исправленный вариант

02.07.97