Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Брусенцев, Многомерная теорема Г. Вейля и накрывающие семейства, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 38–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 02:33:30

УДК 517.983.53

МНОГОМЕРНАЯ ТЕОРЕМА Г. ВЕЙЛЯ И НАКРЫВАЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА

А. Г. Брусенцев

Получено обобщение на эллиптические операторы второго порядка в $L_2(G)$ ($G \subseteq \mathbb{R}^n$) известной теоремы Г. Вейля о самосопряженности в существенном оператора Штурма–Лиувилля $Lu = -(p(x)u')' + q(x)u$, $D_L = C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ в $L_2(\mathbb{R}^1)$ при $p(x) > 0$, $q(x) \geq \text{const}$. Многомерная теорема Вейля выводится из более общей теоремы, для формулировки и доказательства которой строится особая конструкция накрывающего семейства. Установленные результаты содержат известные многомерные аналоги теоремы Вейля и, в отличие от них, относятся к области G , которая может быть собственным подмножеством $\mathbb{R}^n$.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается вопрос о самосопряженности в существенном эллиптического оператора в $L_2(G)$, имеющего вид

$$Mu = (\nabla - i\vec{b}(x))^*(A(x)(\nabla - i\vec{b}(x))u) + q(x)u, \quad (1)$$

$D_M = C_0^\infty(G)$. Здесь G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $A(x)$ – положительная симметрическая (вещественная) матрица-функция, $\vec{b}(x)$ – n -компонентная вектор-функция с вещественными компонентами, а $q(x)$ – вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$q(x) \geq \text{const}, \quad x \in G. \quad (2)$$

Известная теорема Вейля [1] равносильна тому, что оператор Штурма–Лиувилля

$$Lu = -(p(x)u')' + q(x)u,$$

$D_L = C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ с достаточно гладкими функциями $p(x) > 0$, $q(x) \geq \text{const}$ самосопряжен в существенном в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$. Примеры, построенные в работах [2], [3], показывают, что при $G = \mathbb{R}^n$ и $n \geq 3$ оператор M вида (1), (2) может иметь ненулевые индексы дефекта даже при $\vec{b}(x) = \vec{0}$, $q(x) = \text{const}$. С другой стороны, работы [4], [5] содержат многомерные аналоги теоремы Вейля для матриц $A(x)$ некоторых частных видов. Настоящая работа посвящена расширению класса матриц $A(x)$, для которого справедливо обобщение теоремы Вейля. При этом наш класс матриц не только содержит уже описанные виды, но, в отличие от них, относится к области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, которая может быть собственным подмножеством $\mathbb{R}^n$.

В работе многомерная теорема Вейля (теорема 1) выводится из более общей теоремы 2, для установления которой развит особый метод накрывающих семейств, подсказанный оригинальным приемом работы [4].

Ниже через $(\cdot, \cdot)$, $|\cdot|$ обозначается скалярное произведение и норма в унитарном пространстве E ($\dim E < \infty$), а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\|\cdot\|$ – скалярное произведение и норма в бесконечномерном пространстве.

2. Локальные условия на коэффициенты оператора M . Обозначим через $\text{Lip}_{\alpha \text{ loc}}(G)$ множество функций $f(x)$, определенных в G и удовлетворяющих при некотором $\alpha \in (0; 1]$ условию

$$|f(x_0 + y) - f(x_0)| = O(|y|^\alpha) \quad \text{при } |y| \rightarrow 0$$

для любой точки $x_0 \in G$. При этом константа в $O(\cdot)$, вообще говоря, зависит от x_0 . Ниже через $C^{(1, \alpha)}(G)$ обозначается множество функций из $C^1(G)$, частные производные которых принадлежат $\text{Lip}_{\alpha \text{ loc}}(G)$.

У всякой функции $f(x) \in \text{Lip}_{1 \text{ loc}}(G)$ ($\alpha = 1$) почти всюду в G существуют частные производные первого порядка (см. [6, с. 295]). Поэтому оператор M можно считать корректно определенным на $C_0^\infty(G)$ при условиях

$$a_{ij}(x), b_j(x) \in \text{Lip}_{1 \text{ loc}}(G), \quad q(x) \in L_{2 \text{ loc}}(G). \quad (3)$$

Обозначим через $D_{\text{loc}}(M^*)$ множество функций $u \in L_{2 \text{ loc}}(G)$, для каждой из которых найдется такая функция $g \in L_{2 \text{ loc}}(G)$, что и при всех $\phi \in C_0^\infty(G)$ справедливо равенство

$$\langle u, M\phi \rangle = \langle g, \phi \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\text{supp } \phi)$. В частности,

$$D_{M^*} \subset D_{\text{loc}}(M^*).$$

В дальнейшем мы предполагаем коэффициенты выражения M имеющими такие локальные свойства, что выполнено

УСЛОВИЕ А. Для всякой функции $u \in D_{\text{loc}}(M^*)$ и любой ограниченной области $\Omega(\bar{\Omega} \subset G)$ существует последовательность $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ функций из $C^2(G)$, для которой $u_m \rightarrow u$ в $L_2(\Omega)$ и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{Re} \langle \psi M u_m, u_m \rangle_{L_2(\Omega)} = \text{Re} \langle \psi g, u \rangle_{L_2(\Omega)}$$

при любой вещественной функции $\psi \in C_0(\Omega)$.

Приведем явные достаточные условия реализации условия А.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть в операторе M вида (1)

$$a_{ij}(x) \in C^{(1, \alpha)}(G), \quad b_j(x) \in C^1(G), \quad \alpha \in (0, 1],$$

а функция $q(x) \in L_{2 \text{ loc}}(G)$ и, вместо (2), локально ограничена снизу. Тогда условие А выполнено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По оператору M и ограниченной области Ω построим оператор M_Θ , действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Пусть Ω_0, Ω_1 – такие ограниченные открытые множества, что

$$\overline{\Omega} \subset \Omega_0, \quad \overline{\Omega}_0 \subset \overline{\Omega}_1, \quad \overline{\Omega}_1 \subset G.$$

Обозначим через $A_1(x), \vec{b}_1(x), q_1(x)$ функции, определенные в $\mathbb{R}^n$, совпадающие с $A(x), \vec{b}(x)$ и $q(x)$ на Ω_1 и равные нулю вне Ω_1 . Пусть $0 \leq \Theta(x) \leq 1$ – функция из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\Theta(x) \equiv 1$ при $x \in \Omega_0$, $\Theta(x) \equiv 0$ при $x \notin \Omega_1$. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор

$$M_\Theta u = (\nabla - i\Theta \vec{b}_1(x))^* (A_\Theta(x)(\nabla - i\Theta \vec{b}_1(x))u) + \Theta q_1(x)u,$$

$D_{M_\Theta} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Здесь $A_\Theta(x) = \Theta(x)A_1(x) + (1 - \Theta(x))I_n$, I_n – единичная $n \times n$ матрица; M_Θ – эллиптический оператор, удовлетворяющий всем условиям теоремы 1 из работы [4]. В силу этой теоремы он является самосопряженным в существенном. Пусть $u(x) \in D_{\text{loc}}(M^*)$. Тогда при $x \in \Omega$ $g = Mu = M_\Theta u$. Пусть функция $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi(x) \equiv 1$ при $x \in \Omega$ и $\phi(x) \equiv 0$ при $x \notin \Omega_0$. Если $u_1 = u$ при $x \in \Omega_0$ и $u_1 \equiv 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_0$, то функция $\phi u_1 \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Воспользовавшись адаптацией метода Като [7], получаем, что $\phi u_1 \in D_{M_\Theta^*} = D_{M_\Theta}$. Поэтому существует последовательность $\{u_m\}$ элементов $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $u_m \rightarrow \phi u_1$ и $M_\Theta u_m \rightarrow M_\Theta(\phi u_1)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Поскольку при $x \in \Omega$

$$M_\Theta(\phi u_1) = Mu = g, \quad M_\Theta u_m = Mu_m,$$

получаем $u_m \rightarrow u$, $Mu_m \rightarrow g$ в $L_2(\Omega)$. Отсюда следует справедливость условия А. Предложение доказано.

3. Теорема Вейля для многомерного случая. Рассмотрим область вида

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k, \quad k \geq 1, \quad (4)$$

где открытые множества $G_j \subseteq \mathbb{R}^{n_j}$ ($\sum n_j = n$). При $x \in G$ будем писать $x = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$, где $\vec{x}_j \in G_j$. Основные ограничения относятся к множеству $G \setminus Q$, где область

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_k, \quad (5)$$

а Q_j – ограниченные открытые множества в $\mathbb{R}^{n_j}$ такие, что $\overline{Q}_j \subset G_j$.

Ниже для функции $f(\vec{x}_j)$, определенной в $G_j \setminus Q_j$, условие $f(\vec{x}_j) \rightarrow \infty$ при $\vec{x}_j \rightarrow \partial G_j$ означает, что для любого $N > 0$ в G_j существует такой компакт $R_N(\overline{Q}_j \subseteq R_N)$, что при $\vec{x}_j \in G_j \setminus R_N$ выполнено неравенство $|f(\vec{x}_j)| > N$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для определенной в G вида (4) симметрической позитивной матрицы-функции $A(x)$ найдется такая область Q вида (5), что при $x \in G \setminus Q$ $A(x)$ имеет блочно-диагональный вид

$$A(x) = \text{diag}\{a_j(\mu_j(\vec{x}_j))B_j(\vec{x}_j)\}_{j=1}^k, \quad (6)$$

где $\vec{x}_j \in G_j \setminus Q_j$, $a_j(\cdot)$ – определенные в $\mathbb{R}^1$ положительные функции из $C^1(\mathbb{R}^1)$, $\mu_j(\vec{x}_j)$ – такие функции из $C^{(1,1)}(G_j \setminus Q_j)$, что $|\nabla \mu_j| > 0$ и

$$\mu_j^2(\vec{x}_j) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \vec{x}_j \rightarrow \partial G_j, \quad (7)$$

а $B_j(\vec{x}_j)$ – матрицы-функции размера $n_j \times n_j$ с элементами из $\text{Lip}_{1\text{loc}}(G_j \setminus Q_j)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\nabla(B_j \nabla \mu_j^2) \geq 0 \quad \text{почти всюду в } G_j \setminus Q_j, \quad (8)$$

$$(B_j \nabla \mu_j, \nabla \mu_j) \leq \text{const}, \quad \vec{x}_j \in G_j \setminus Q_j. \quad (9)$$

Тогда при выполнении условий (3) и условия А оператор M вида (1), (2) с такой матрицей $A(x)$ самосопряжен в существенном в пространстве $L_2(G)$.

Отложив доказательство теоремы 1 до п. 4, рассмотрим простейшие следствия из нее.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $G = \mathbb{R}^n$. Если в операторе M матрица $A(x)$ при $|x| \geq N > 0$ имеет вид

$$A(x) = \text{diag}\{a_1(x_1), a_2(x_2), \dots, a_n(x_n)\},$$

где $a_j(\cdot)$ – положительные функции одной переменной из $C^1(\mathbb{R}^1)$, то при выполнении условий (3) и условия А оператор M (1), (2) самосопряжен в существенном.

Доказательство состоит в непосредственной проверке условий теоремы 1 с $G_j = \mathbb{R}^1$ ($n_j = 1$) и функциями $\mu_j(x_j) = x_j$, а также (1×1) -матрицами $B_j(x_j) = 1$.

Отметим, что частный случай следствия 1 с четными функциями $a_j(\cdot)$ и с условиями гладкости предложения из п. 2 сформулирован без доказательства в работе [4]. В этой же работе при тех же условиях гладкости установлена самосопряженность в существенном оператора M (1), (2) с матрицами следующих двух видов:

$$A(x) = a(|x|)B_0, \quad A(x) = a(|x|)\beta\left(\frac{x}{|x|}\right)I_n,$$

где $a(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ – положительные функции соответственно на $[0, \infty)$ и единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, а B_0 – постоянная симметрическая положительная матрица. Этот результат является частным случаем теоремы 1 при $k = 1$, $G_1 = G = \mathbb{R}^n$ с $\mu_1(\vec{x}_1) = \mu(x) = |x|$, $B_1(\vec{x}_1) = B(x) = B_0$ в первом случае и $B(x) = \beta(x/|x|)I_n$ – во втором. Действительно,

$$\nabla(B_0 \cdot \nabla |x|^2) = 2 \text{Sp } B_0 > 0,$$

$$\nabla\left(\beta\left(\frac{x}{|x|}\right)I_n \cdot \nabla |x|^2\right) = 2(\nabla \beta, x) + 2n\beta = 2n\beta\left(\frac{x}{|x|}\right) > 0.$$

Поэтому в обоих случаях выполнено (8). Условие же (9) в обоих случаях очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $G = \mathbb{R}^n$. Если матрица $A(x)$ в операторе M при $|x| \geq N > 0$ имеет вид

$$A(x) = a(\mu(x))I_n,$$

где $0 < a(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, функция $\mu(x) \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{x: |x| < N\})$ такова, что $\mu^2(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ и

$$\Delta \mu^2(x) \geq 0, \quad 0 < |\nabla \mu| \leq \text{const},$$

то при выполнении условий (3) и условия А оператор M (1) (2) самосопряжен в существенном.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является непосредственной проверкой условий теоремы 1 с $k = 1$, $B(x) = I_n$.

Пусть связная область $G \subseteq \mathbb{R}^n$ является полным римановым многообразием с метрическим тензором $B^{-1}(x)$, где симметрическая матрица-функция $B(x) > 0$. Рассмотрим семейство геодезических, проходящих через некоторую точку x_0 . Пусть эти геодезические не имеют точек пересечения (кроме x_0). Они покрывают область G (см. [8, с. 167, теорема 4.2]). Если s – канонический параметр на геодезической, то в области G можно определить векторное поле

$$\vec{p}(x) = \dot{x}_s|_{x(s)=x},$$

где $x(s)$ – геодезическая семейства, проходящая через точку x . Это векторное поле будем называть *центральной геодезическим потоком*, исходящим из точки x_0 . Обозначим также через $r(x)$ расстояние точки x до x_0 в метрике риманова многообразия.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть связная область G является полным римановым многообразием с метрическим тензором $B^{-1}(x)$, где позитивная матрица-функция $B(x) \in C^1(G)$. Пусть также существует исходящий из некоторой точки x_0 центральный геодезический поток $\vec{p}(x) \in C^1(G)$, удовлетворяющий неравенству

$$\nabla \vec{p}(x) \geq -\frac{1}{r(x)}, \quad x \in G \setminus \{x_0\}. \quad (10)$$

Если в операторе M матрица $A(x)$ при $r(x) \geq N > 0$ имеет вид

$$A(x) = a(r(x))B(x),$$

где $0 < a(\cdot) \in C^1([0; \infty))$, то при выполнении условий (3) и условия A оператор M (1) (2) самосопряжен в существенном.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $(B^{-1}\vec{p}, \vec{p}) = 1$, а также то, что выражение $(B^{-1}\vec{p}, \vec{dx})$, где $\vec{dx} = \{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$, является полным дифференциалом функции $r(x)$ (см. [9, с. 29–51]). Воспользуемся частным случаем теоремы 1 при $k = 1$, $\mu_1(x) = \mu(x) = r(x)$, $B_1(x) = B(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} B\nabla\mu^2 &= B\nabla r^2 = 2r \cdot B\nabla r = 2rB \cdot B^{-1}\vec{p} = 2r\vec{p}, \\ \nabla(B\nabla\mu^2) &= 2\nabla(r\vec{p}) = 2(\nabla r, \vec{p}) + 2r\nabla\vec{p} = 2(B^{-1}\vec{p}, \vec{p}) + 2r\nabla\vec{p} = 2(1 + r\nabla\vec{p}). \end{aligned}$$

В силу условия (10) выполнено условие (8) теоремы 1. Далее,

$$(B\nabla\mu, \nabla\mu) = (B\nabla r, \nabla r) = (B^{-1}\vec{p}, \vec{p}) = 1.$$

Поэтому и условие (9) тоже выполнено. Следствие 3 доказано.

Поскольку условие (10) является трудно проверяемым, вопрос о том, содержит ли следствие 3 случай $G \neq \mathbb{R}^n$ без дополнительных рассмотрений решить нельзя. Следующий простой пример показывает, что в теореме 1 этот случай содержится.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть область G является полосой в $\mathbb{R}^2$:

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2; -\infty < x_1 < \infty; -h < x_2 < h\},$$

в которой задана функция $\mu(x) = \sqrt{x_1^2 - h^2 \ln(1 - x_2^2/h^2)^\alpha}$ с константой $\alpha \in (0, 1/2]$. Если при $\mu(x) \geq N > 0$ матрица $A(x)$ в операторе M имеет вид

$$A(x) = a(\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - x_2^2/h^2)^2 \end{pmatrix},$$

где $0 < a(\cdot) \in C^1([0, \infty))$, то при выполнении условий (3) и условия A оператора M (1), (2) самосопряжен в существенном.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим выполнение условий (8), (9) теоремы 1 с $k = 1$, $\mu_1(x) = \mu(x)$,

$$B_1(x) = B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - x_2^2/h^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\nabla(B\nabla\mu^2) = 2(1 + \alpha) - 6\alpha \frac{x_2^2}{h^2} \geq 2 - 4\alpha \geq 0,$$

т.е. условие (8) выполняется. Далее,

$$(B\nabla\mu, \nabla\mu) = \frac{x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}{x_1^2 - h^2 \ln(1 - x_2^2/h^2)^\alpha}.$$

Поскольку при $0 \leq t < 1$

$$-\ln(1 - t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots \geq t,$$

получаем

$$(B\nabla\mu, \nabla\mu) \leq \frac{x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}{x_1^2 + \alpha x_2^2} \leq 1.$$

То есть условие (9) тоже выполняется. Следствие 4 доказано.

4. Накрывающие семейства и самосопряженность в существенном оператора M . Назовем семейство функций $\psi(x, \tau)$, определенных в G , с параметром $\tau \in [\tau_0, \infty)$, *накрывающим область G* , если оно удовлетворяет следующим условиям:

1с) $0 \leq \psi(x, \tau) \in C(G \times [\tau_0, \infty))$ и при любом $\tau \in [\tau_0, \infty)$

$$\psi(x, \tau) \in C_0(G) \cap C^{(1,1)}(\text{supp } \psi);$$

2с) открытые множества $\Omega_\tau = \text{Int supp } \psi(x, \tau)$ ($\overline{\Omega}_\tau = \text{supp } \psi$) расширяются с ростом τ , т.е. $\tau_2 > \tau_1 \Rightarrow \overline{\Omega}_{\tau_1} \subset \Omega_{\tau_2}$. При этом для любого компакта $R \subset G$ при достаточно больших τ $R \subset \Omega_\tau$;

3с) при любом $\tau \in [\tau_0, \infty)$ $\partial\Omega_\tau$ состоит из конечного числа кусочно гладких замкнутых гиперповерхностей, причем для любой точки $x \in G \setminus \Omega_{\tau_0}$ существует единственное значение τ , при котором $x \in \partial\Omega_\tau$;

4с) условие 3с) определяет функцию

$$\tau = \rho(x) \in \text{Lip}_{1\text{loc}}(G \setminus \Omega_{\tau_0});$$

5с) при каждом $x \in G$

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \psi(x, \tau) d\tau = \infty.$$

В дальнейшем используется вектор-функция $(\nabla_x \psi)|_{\tau=\rho(x)}$, которая понимается в смысле предельных значений $\nabla_x \phi$ на $\partial\Omega_\tau$ из внутренности области Ω_τ .

Основным результатом является

ТЕОРЕМА 2. Пусть для оператора M выполнены условия (3) и условие A , а также существует накрывающее область G семейство, с которым матрица $A(x)$ старших коэффициентов оператора M удовлетворяет неравенствам

$$\nabla_x (A \nabla_x \psi) \leq C \psi \quad \text{почти всюду в } \Omega_\tau \quad (\tau \geq \tau_0), \quad (11)$$

$$(A(\nabla_x \psi)|_{\tau=\rho(x)}, \nabla \rho) \geq -C \quad \text{почти всюду в } G \setminus \Omega_{\tau_0} \quad (12)$$

с некоторой константой $C > 0$. Тогда оператор M вида (1), (2) самосопряжен в существенном.

Для доказательства теоремы 2 потребуются две леммы о свойствах накрывающих семейств.

ЛЕММА 1. Для любого компакта $R \subset G$ и любого числа $N > 0$ найдется такое $\tau_N > 0$, для которого при всех $x \in R \setminus \Omega_{\tau_0}$ выполнено неравенство

$$\int_{\rho(x)}^{\tau_N} \psi(x, \tau) d\tau \geq N. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 5с) следует, что для всякой точки $x_0 \in G \setminus \Omega_{\tau_0}$ и любого $N > 0$ найдется $\tau_N^0 > 0$, для которого

$$\int_{\rho(x_0)}^{\tau_N^0} \psi(x_0, \tau) d\tau \geq N + 2.$$

В силу условия 1с) $\psi(x, \tau)$ равномерно непрерывна в каждом цилиндре $Z_\varepsilon = \overline{U}_\varepsilon \times [\tau_0; \tau_N^0]$, где U_ε – окрестность точки x_0 ($\overline{U}_\varepsilon \subset G$) радиуса $\varepsilon > 0$. Поэтому в силу условия 4с) можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы при $y \in U_\varepsilon \setminus \Omega_{\tau_0}$ были справедливы неравенства

$$\max_{(x, \tau) \in Z_\varepsilon} \psi(x, \tau) \cdot |\rho(y) - \rho(x_0)| \leq 1, \quad \psi(y, \tau) \geq \psi(x_0, \tau) - \frac{1}{\tau_N^0}, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_N^0].$$

Отсюда следует, что при $x \in U_\varepsilon \setminus \Omega_{\tau_0}$

$$\begin{aligned} \int_{\rho(x)}^{\tau_N^0} \psi(x, \tau) d\tau &\geq \int_{\rho(x_0)}^{\tau_N^0} \psi(x, \tau) d\tau - \left| \int_{\rho(x_0)}^{\rho(x)} \psi(x, \tau) d\tau \right| \\ &\geq \int_{\rho(x_0)}^{\tau_N^0} \psi(x_0, \tau) d\tau - \frac{\tau_N^0 - \rho(x_0)}{\tau_N^0} - 1 \geq N. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой точки x_0 найдется окрестность U_ε и число $\tau_N^0 > 0$, для которого

$$\int_{\rho(x)}^{\tau_N^0} \psi(x, \tau) d\tau \geq N, \quad x \in U_\varepsilon \setminus \Omega_{\tau_0}.$$

Если для каждой точки множества $R \setminus \Omega_{\tau_0}$ взять такую окрестность, то они составят покрытие, из которого можно выделить конечное. Это даст нам числа τ_{Nj}^0 ($j = 1, 2, \dots, k$). Очевидно, что при $\tau_N = \max_j \tau_{Nj}^0$ выполнено неравенство (13). Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть оператор M вида (1) удовлетворяет условию А, а $\psi = \psi(x, \tau)$ — накрывающее область G семейство. Тогда для любого $u \in D_{\text{loc}}(M^*)$ и любого $t > \tau_0$ найдется такая последовательность $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ функций из $C^2(G)$, что $u_m \rightarrow u$ в $L_2(\Omega_t)$, а последовательность функций $C_m(\tau) = \text{Re}\langle \psi M u_m, u_m \rangle_{L_2(\Omega_\tau)}$ сходится к функции $C(\tau) = \text{Re}\langle \psi g, u \rangle_{L_2(\Omega_\tau)}$ равномерно по $\tau \in [\tau_0, t]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ограниченная область Ω такова, что $\bar{\Omega}_t \subset \Omega$. Согласно условию А должна существовать последовательность функций $u_m \in C^2(G)$, сходящаяся к u в $L_2(\Omega)$, а значит и в $L_2(\Omega_t)$. Нужно доказать, что последовательность функций $C_m(\tau) = \text{Re}\langle \psi M u_m, u_m \rangle$ сходится к функции $C(\tau) = \text{Re}\langle \psi g, u \rangle$ равномерно по $\tau \in [\tau_0, t]$. Для этого заметим, что

$$J_m[\phi] = \text{Re}\langle \phi M u_m, u_m \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad J[\phi] = \text{Re}\langle \phi g, u \rangle_{L_2(\Omega)}$$

являются ограниченными линейными функционалами в вещественном банаховом пространстве $C_0(\Omega)$ с нормой

$$\|\phi\|_{C_0(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |\phi(x)|.$$

Поскольку при каждом $\phi \in C_0(\Omega)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_m[\phi] = J[\phi],$$

по теореме Банаха–Штейнхауза последовательность норм функционалов $J_m[\phi]$ ограничена, т.е. при некоторой константе $K > 0$

$$|J[\phi]|, |J_m[\phi]| \leq K \|\phi\|_{C_0(\Omega)}$$

для любой функции $\phi \in C_0(\Omega)$. В силу равномерной непрерывности $\psi(x, \tau)$ на $\bar{\Omega} \times [\tau_0, t]$ при любом $\varepsilon > 0$ для $\tau' \in [\tau_0, t]$ найдется такая окрестность $V_{\tau'}$, что при $x \in \Omega$

$$|\delta\psi| = |\psi(x, \tau') - \psi(x, \tau)| < \frac{\varepsilon}{3K}, \quad \tau \in V_{\tau'} \cap [\tau_0, t].$$

Поскольку $C_m(\tau) \rightarrow C(\tau)$ поточечно, найдется такой номер $m_\varepsilon(\tau')$, что при $m \geq m_\varepsilon(\tau')$, $\tau \in V_{\tau'} \cap [\tau_0, t]$

$$\begin{aligned} |C_m(\tau) - C(\tau)| &\leq |C_m(\tau) - C_m(\tau')| + |C(\tau') - C(\tau)| + |C_m(\tau') - C(\tau')| \\ &\leq |J_m[\delta\psi]| + |J[\delta\psi]| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Если для каждой точки $\tau' \in [\tau_0, t]$ взять окрестность $V_{\tau'}$ и выбрать из этого покрытия конечное, то получим конечное число номеров $m_\varepsilon(\tau'_j)$. При $m \geq m_\varepsilon = \max_j m_\varepsilon(\tau'_j)$

$$|C_m(\tau) - C(\tau)| < \varepsilon, \quad \tau \in [\tau_0, t].$$

Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Не ограничивая общности можно считать, что при $x \in G$

$$q(x) \geq \frac{1}{2}C + 1, \quad (14)$$

где C – константа в условиях (11), (12). Достаточно показать, что при условии (14)

$$M^*u = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0 \quad \text{при } x \in G \setminus \Omega_{\tau_0}. \quad (15)$$

Действительно, с помощью интегрирования по частям нетрудно установить, что для вещественной функции $\phi(x) \in C_0^\infty(G)$ и любой функции $v(x) \in C^2(G)$ справедливо равенство

$$\langle M(\phi v), \phi v \rangle_{L_2(G)} = \int_G (A \nabla \phi, \nabla \phi) |v|^2 dx + \operatorname{Re} \langle \phi^2 M v, v \rangle_{L_2(G)}.$$

Откуда, учитывая (14), получаем

$$\|\phi v\|_{L_2(G)}^2 \leq \int_G (A \nabla \phi, \nabla \phi) |v|^2 dx + \operatorname{Re} \langle \phi^2 M v, v \rangle_{L_2(G)}.$$

Выбирая в этом неравенстве $v = u_m(x)$, где $\{u_m\}$ – последовательность из условия А, отвечающая области Ω_τ такой, что $\operatorname{supp} \phi \subset \Omega_\tau$, и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$\|\phi u\|^2 \leq \int_G (A \nabla \phi, \nabla \phi) |u|^2 dx.$$

Если $u(x) \equiv 0$ при $x \in G \setminus \Omega_{\tau_0}$, а функция $\phi(x) \equiv 1$ при $x \in \Omega_{\tau_0}$, то $u(x) \equiv 0$ при $x \in G$. Последнее влечет самосопряженность оператора $\overline{M}$.

Для доказательства справедливости утверждения (15) рассмотрим получаемое интегрированием по частям равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau} \psi (A(\nabla - i\vec{b})v, (\nabla - i\vec{b})v) dx + \int_{\Omega_\tau} \psi q |v|^2 dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega_\tau} \psi \bar{v} M v dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} (A \nabla \psi, \nabla |v|^2) dx, \end{aligned}$$

где $\psi = \psi(x, \tau)$ – функция накрывающего семейства, а $v(x)$ – произвольная функция из $C^2(G)$. Учитывая равенство

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} (A \nabla \psi, \nabla |v|^2) dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} \nabla (A \nabla \psi) \cdot |v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_\tau} |v|^2 (A \nabla \psi, \vec{dS}),$$

а также позитивность матрицы $A(x)$, получим неравенство

$$\int_{\Omega_\tau} \psi q |v|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} \nabla (A \nabla \psi) \cdot |v|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_\tau} |v|^2 (A \nabla \psi, \vec{dS}) + \operatorname{Re} \int_{\Omega_\tau} \psi \bar{v} M v dx.$$

Отсюда в силу условия (11) и неравенства (14) следует неравенство

$$\int_{\Omega_\tau} \psi |v|^2 dx \leq -\frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_\tau} |v|^2 (A \nabla \psi, \vec{dS}) + \operatorname{Re} \int_{\Omega_\tau} \psi \bar{v} M v dx.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по τ в пределах от τ_0 до t , учитывая, что $\overrightarrow{dS} d\tau = \nabla \rho dx$. Получим неравенство

$$\int_{\Omega_t \setminus \Omega_{\tau_0}} \left(\int_{\rho(x)}^t \psi(x, \tau) d\tau \right) |v|^2 dx \leq -\frac{1}{2} \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{\tau_0}} (A(\nabla \psi)|_{\tau=\rho(x)}, \nabla \rho) |v|^2 dx \\ + \int_{\tau_0}^t \left(\operatorname{Re} \int_{\Omega_\tau} \psi \bar{v} M v dx \right) d\tau.$$

Поскольку условие А считается выполненным, в последнем неравенстве в качестве v можно взять элементы последовательности $\{u_m\}$, соответствующей $u \in L_2(G)$ такому, что $M^*u = 0$.

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ и учитывая лемму 2, получим

$$\int_{\Omega_t \setminus \Omega_{\tau_0}} \left(\int_{\rho(x)}^t \psi(x, \tau) d\tau \right) |u|^2 dx \leq -\frac{1}{2} \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{\tau_0}} (A(\nabla \psi)|_{\tau=\rho(x)}, \nabla \rho) |u|^2 dx.$$

В силу условия (12) выполнено неравенство

$$\int_{\Omega_t \setminus \Omega_{\tau_0}} \left(\int_{\rho(x)}^t \psi(x, \tau) d\tau \right) |u|^2 dx \leq \frac{C}{2} \|u\|_{L_2(G)}^2.$$

Отсюда в силу леммы 1 заключаем, что справедливо утверждение (15). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для построения накрывающего семейства при условиях теоремы 1 рассмотрим интегралы

$$f_j^\pm(z) = \int_0^z \Theta(t) a_j^{-1}(\pm\sqrt{t}) dt,$$

где функция $\Theta(t) \in C^2([0, \infty))$ такова, что $\Theta(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq \tau_0 - 1$, $\Theta(t) \equiv 1$ при $t \geq \tau_0 > 1$, $\Theta'(t) \geq 0$. Введем функции двух переменных ($j = 1, \dots, k$)

$$\psi_j(s, \tau) = \begin{cases} 1 - \frac{f_j^+(s^2)}{f_j^+(\tau)}, & s \in (0, \tau^{1/2}], \\ 1 - \frac{f_j^-(s^2)}{f_j^-(\tau)}, & s \in [-\tau^{1/2}, 0], \\ 0, & s \notin [-\tau^{1/2}, \tau^{1/2}]. \end{cases}$$

Эти функции определены при $\tau \in [\tau_0, \infty)$, $s \in \mathbb{R}^1$.

Пусть

$$\psi(x, \tau) = \frac{1}{\tau} \prod_{j=1}^n \psi_j(\mu_j(\vec{x}_j, \tau)).$$

Нетрудно проверить, что это семейство функций удовлетворяет всем условиям накрывающего область G семейства, причем

$$\Omega_\tau = \left\{ x: \max_j \mu_j^2(\vec{x}_j) < \tau \right\}, \quad \rho(x) = \max_j \mu_j^2(\vec{x}_j) \in \operatorname{Lip}_{1 \operatorname{loc}}(G \setminus \Omega_{\tau_0}).$$

Отметим, что число τ_0 можно выбрать столь большим, чтобы при каждом $j = 1, 2, \dots, k$

$$Q_j \subset \{\vec{x}_j: \mu_j^2(\vec{x}_j) < \tau_0 - 1\}.$$

Поэтому при $x \in Q$, $\tau \geq \tau_0$ $\psi(x, \tau) \equiv 1$, что означает справедливость условий теоремы 2 при $x \in Q$. Если же $\vec{x}_j \in G_j \setminus Q_j$, то

$$\begin{aligned} a_j(\mu_j)B_j(\vec{x}_j)\nabla f_j^\pm(\mu_j^2(\vec{x}_j)) &= \Theta(\mu_j^2(\vec{x}_j)) \cdot B_j(\vec{x}_j)\nabla\mu_j^2(\vec{x}_j), \\ \nabla(a_j(\mu_j)B_j\nabla f_j^\pm(\mu_j^2(\vec{x}_j))) &= \Theta'(\mu_j^2(\vec{x}_j)) \cdot (B_j(\vec{x}_j)\nabla\mu_j^2, \nabla\mu_j^2) \\ &\quad + \Theta(\mu_j^2(\vec{x}_j)) \cdot \nabla(B_j(\vec{x}_j)\nabla\mu_j^2(\vec{x}_j)) \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\nabla(a_j(\mu_j)B_j(\vec{x}_j) \cdot \nabla\psi_j(\mu_j, \tau)) \leq 0.$$

Последнее, очевидно, влечет справедливость условия (11) теоремы 2.

Если считать $\nabla\mu_j$ и $B_j\nabla\mu_j$ n -компонентными векторами вида $\{0, \dots, 0, \vec{v}_j, 0, \dots, 0\}$, то можно написать равенство

$$A(\nabla\psi)|_{\tau=\rho(x)} = \sum_{j=1}^k \frac{\mu_j(\vec{x}_j)}{\rho(x)} \Phi_j(x) B_j(\vec{x}_j) \nabla\mu_j(\vec{x}_j),$$

где скалярные функции $\Phi_j(x)$ ограничены в $G \setminus Q$. Определенный почти всюду вектор $\nabla\rho$ равен $\nabla\mu_{j_0}^2(\vec{x}_{j_0})$ при почти каждом x с зависящим от него j_0 . Следовательно, почти всюду в $G \setminus Q$ справедливо неравенство

$$|(A(\nabla\psi)|_{\tau=\rho(x)}, \nabla\rho)| \leq \text{const} \sum_{j=1}^k (B_j\nabla\mu_j, \nabla\mu_j),$$

которое в силу условия (9) влечет справедливость (12). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Weyl H. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann. 1910. V. 68. P. 222–269.
- [2] Уральцева Н.Н. О несамосопряженности в $L_2(\mathbb{R}^n)$ эллиптического оператора с быстро растущими коэффициентами // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1969. Т. 149. С. 288–294.
- [3] Лаптев С.А. О замыкании в метрике обобщенного интеграла Дирихле // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 4. С. 727–736.
- [4] Devinatz A. Essential self-adjointness of Schrödinger-type operators // J. Funct. Anal. 1977. V. 25. № 1. P. 58–69.
- [5] Рофе-Бекетов Ф.С. Замечание в связи с многомерным обобщением теоремы Г. Вейля о самосопряженности // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1989. № 52. С. 88–90.
- [6] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1972.
- [7] Kato T. Schrödinger operators with singular potentials // Israel J. Math. 1972. V. 13. P. 135–148.
- [8] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
- [9] Ахиезер Н.И. Вариационное исчисление. Харьков: Вища школа, 1981.