Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Колесов, Свойства устойчивости циклов и торов простейшего нерезонансного уравнения волнового типа, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 744–750

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:53:44

УДК 517.9

СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ ЦИКЛОВ И ТОРОВ ПРОСТЕЙШЕГО НЕРЕЗОНАНСНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛНОВОГО ТИПА

Ю. С. Колесов

На ряде содержательных примеров показано, что для нерезонансных уравнений волнового типа характерна периодическая динамика.

Библиография: 9 названий.

Метод квазинормальных форм используется для вывода эталонной счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающей за существование и устойчивость циклов и торов типовых нерезонансных уравнений волнового типа. Путем вторичной квазинормализации устанавливается, что эта же система возникает в двух важных примерах, когда при нулевом малом параметре имеем счетное число резонансов, однако должным образом велик параметр, характеризующий отход от них.

1. Метод квазинормальных форм первоначально был разработан в связи с попыткой выявить роль миграционного фактора в рамках одной математической модели одновидового биоценоза [1]. В последующем он был распространен на широкий класс систем типа “реакция-диффузия” с малым множителем при матричной диффузии (см. детали и подробное изложение в [2]). Правило его применения к сингулярно возмущенным уравнениям волнового типа дано в заметке [3], обоснование результатов которой содержится в статье [4]. Ниже он применяется для объяснения следующего фундаментального положения: из состояния равновесия нерезонансных уравнений волнового типа в большом числе бифурцируют циклы и торы различной размерности, но устойчивыми являются только периодические колебания.

Начнем наше рассмотрение с максимально простого примера, вариант которого был использован в [5], чтобы объяснить следующий интересный феномен: в чисто резонансном уравнении волнового типа аттрактор – это его разрывный цикл. Добавляя к левой части уравнения из [5] слагаемое a^2u , приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial t} + a^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-1727.

где $\varepsilon > 0$ мало, а параметр $a > 0$ пока таковым не считаем. Докажем ее нерезонансность.

Сначала применительно к краевой задаче (1), (2) напомним способ построения ее квазинормальной формы. Для этого нужно прежде всего ввести функцию

$$u_0(t, \tau, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (z_n(\tau) \exp i\omega_n t + \text{КС}) g_n(x), \quad (3)$$

где $\tau = \varepsilon t$, а $g_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$ и $\omega_n^2 = n^2 \pi^2 + a^2$ – соответственно собственные функции и числа оператора $-d^2/dx^2 + a^2 I$ с граничными условиями (2). Здесь и далее общепринятое сокращение КС – величина, комплексно сопряженная к стоящей слева. Затем составим асимптотическое выражение

$$u = \varepsilon^{1/2} u_0 + \varepsilon^{3/2} u_1 + \dots, \quad (4)$$

где $u_1 = u_1(t, \tau, x)$ и т.д., которое подставим в (1), (2). Приравнявая в получившихся формальных равенствах коэффициенты при степенях $\varepsilon^{3/2}$, приходим к линейной неоднородной краевой задаче относительно u_1 , в которой τ выступает в качестве параметра. Условия ее разрешимости в классе тригонометрических по t многочленов приводят к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $z_n, \bar{z}_n$, являющейся по определению квазинормальной формой краевой задачи (1), (2). Отсюда следует, что она – главная часть по порядку относительно ε (но отнюдь не по силе операторов) формальной нормальной формы Пуанкаре–Дюлака–Крылова–Боголюбова–Митропольского. В общем случае структура квазинормальной формы существенно зависит от резонансов третьего порядка, когда при некоторых целых числах r_1, r_2, r_3 любого знака, связанных равенством $|r_1| + |r_2| + |r_3| = 3$, имеют место равенства

$$\omega_n = r_1 \omega_k + r_2 \omega_p + r_3 \omega_s. \quad (5)$$

В силу свойств g_n (см. [5]) нам интересны только соотношения

$$\omega_n = \omega_k + \omega_p + \omega_s \quad \text{или} \quad \omega_n = \omega_k + \omega_p - \omega_s, \quad (6)$$

где n, k, p, s таковы, что

$$n = k + p + s \quad \text{или} \quad n = k + p - s. \quad (7)$$

При их анализе исключаем случай тождественных резонансов, когда $\omega_n = \omega_n + \omega_k - \omega_k$.

ЛЕММА. *Равенства (6) и (7) несовместны.*

Несовместность первых равенств (6) и (7) очевидна: достаточно возвести в квадрат левую и правую части первого равенства (6), что с учетом первого равенства (7) приводит к противоречию. Второе равенство (6) перепишем в виде $\omega_n - \omega_k = \omega_p - \omega_s$, которое с учетом второго равенства (7) допускает представление

$$\frac{n}{n+k} f(n) + \frac{k}{n+k} f(k) = \frac{p}{p+s} f(p) + \frac{s}{p+s} f(s), \quad (8)$$

где $f(v) = (1 + a^2/(\pi^2 v^2))^{1/2}$. Эта функция строго убывает и выпукла вниз. Без потери общности допустим, что $n > k$, а $k \geq p, s$. Но тогда невозможно равенство (8).

Обычно говорят о нерезонансности, если не имеет места ни одно из нетривиальных соотношений вида (5). В нашем случае таковые возможны. Однако, из доказанной леммы следует, что они несущественны, а значит, краевую задачу (1), (2) можно считать нерезонансной. Отсюда вытекает, что ее квазинормальная форма локально проста: в соответствии с [5] для квадратов амплитуд $\rho_n = |z_n|^2$ имеем систему

$$\frac{d\rho_n}{d\tau} = \left(1 - 2 \sum_{k \neq n} \rho_k - \frac{3}{2} \rho_n\right) \rho_n. \quad (9)$$

2. Произведение $\overset{\circ}{W}_2^2 \times \overset{\circ}{W}_2^1$ соболевских пространств, функции которых удовлетворяют граничным условиям (2), – естественное фазовое пространство краевой задачи (1), (2). Отсюда и из (3) вытекает, что фазовое пространство системы (9) – достаточно хорошо устроенное пространство последовательностей. В качестве такового будем считать ℓ_2^1 , квадрат нормы в котором – бесконечная сумма с общим членом $n^2 |\rho_n|$. В ℓ_2^1 система (9) интерпретируется как обыкновенное дифференциальное уравнение с ограниченной и гладкой правой частью, которое мы должны рассматривать в первом октанте K . Принадлежащее ему состояние равновесия назовем m -мерным, если только какие-то m компонент положительны. Очевидно, при каждом $m \geq 2$ система (9) имеет все возможные m -мерные состояния равновесия, причем у каждого из них одинаковы положительные компоненты и дихотомичны системы в вариациях, имея $m - 1$ положительных характеристических показателей. А каждое из лежащих на ребрах октанта K одномерное состояние равновесия экспоненциально устойчиво. Правдоподобно, что других аттракторов система (9) не имеет.

3. Фиксируем как-то целое число $n_0 \geq 2$ и считаем, что в (9) $n \leq n_0$. Так, урезанная n_0 -мерная система имеет n_0 одномерных состояний равновесия и $2^{n_0} - n_0 - 1$ многомерных.

ТЕОРЕМА 1. Для заданного n_0 найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача (1), (2) заведомо имеет n_0 орбитально экспоненциально устойчивых циклов, асимптотика которых с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ на промежутке времени порядка ε^{-1} строится с помощью (3), (4), а также компонент одномерных состояний равновесия урезанной указанным в начале этого пункта способом системы (9). При $m \geq 2$ ее m -мерным состояниям равновесия соответствуют дихотомичные торы размерности m , причем у каждого из них размерность подпространства экспоненциально растущих решений уравнения в вариациях на торе равна $m - 1$.

С нашей точки зрения доказательства утверждений типа теоремы 1 в настоящее время можно считать общим местом. Причин к этому много. Выделим три основных. Во-первых, что хорошо объяснено в [2], центральное место при обосновании таких предложений – выявление свойств устойчивости линеаризованной на приближенном цикле или торе исходной краевой задачи. В теоретическом плане данный вопрос изучен очень подробно (см., например, [6]), а применительно к рассматриваемому уравнению волнового типа он детально обсужден в заметке [7]. Вторая причина такова. Даже в случае,

когда речь идет о торах, завершающий этап связан с использованием подходящего варианта метода последовательных приближений (см., например, [8]), т.е. с применением относительно простого аппарата. Третьей причиной можно считать факт существования статьи [4]: если дано развернутое решение аналогичных проблем для сингулярно возмущенных уравнений, то гладкий случай уместно считать тривиальным.

4. В этом пункте будем работать с уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon a_0^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Оно отличается от (1) тем, что a заменено на $\varepsilon^{1/2} a_0$. Граничные условия сохраняем. Получившаяся краевая задача (10), (2) – пример того, когда (с ростом a_0) происходит отход от резонансов. Дальнейшая цель – объяснить, что при больших a_0 близки динамические свойства краевых задач (1), (2) и (10), (2).

Согласно [5] бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений, получающаяся в результате применения к (10), (2) метода квазинормальных форм, сворачивается в уравнение

$$2 \frac{dv}{d\tau} = (1 - M(v^2))v - \frac{v^3 - M(v^3)}{3} + a_0^2 Bv, \quad (11)$$

где линейный оператор B удобно ввести немного позднее. Его рассматриваем в пространстве V_2^1 – подпространстве W_2^1 , состоящем из 2-периодических функций с нулевым средним значением. Отметим, что в (11) $M(\cdot)$ – соответственно среднее значение 2-периодической по y функции v^2 или v^3 . Поэтому при начальных условиях из фазового пространства V_2^1 решения уравнения (11) в нем же и остаются (данное свойство – определяющая особенность фазового пространства). Правда необходимо, чтобы подходящим свойством обладал и фигурирующий в (11) оператор B . Целесообразно указать и способ его применения к функциям с комплексными значениями, последовательно полагая

$$v = \sum_{n \neq 0} v_n \exp in\pi y, \quad Bv = \sum_{n \neq 0} \frac{i}{n\pi} v_n \exp in\pi y, \quad (12)$$

где суммирование ведется по целым n любого знака.

Напоминаем, что мы ограничиваем свое рассмотрение случаем, когда численно велико a_0 . В связи с этим введем малый параметр $\mu = 1/a_0^2$ и выполним вторичную нормализацию. Предварительно в уравнении (11) сделаем нормирующие замены $\tau = 2\mu s$, $w = \mu^{1/2} v$, преобразующие его к виду

$$\frac{dw}{ds} = \mu w + Bw - M(w^2)w - \frac{w^3 - M(w^3)}{3}. \quad (13)$$

Из (12) вытекает, что уравнение (13) по общим свойствам идентично краевой задаче (1), (2) в том смысле, что тем же образом работает метод квазинормальных форм. Поэтому введем функцию

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n(\sigma) \exp i \left(\frac{s}{n\pi} + n\pi y \right) + \text{KC} \right),$$

где $\sigma = \mu s$, и составим выражение

$$w = \mu^{1/2} w_0 + \mu^{3/2} w_1 + \dots, \quad (14)$$

аналогичное (4). Стандартным способом после подстановки (14) в (13) для отыскания w_1 получаем линейное неоднородное уравнение, условия разрешимости которого в классе тригонометрических по s многочленов приводят к квазинормальной форме

$$\frac{d\xi_n}{d\sigma} = \xi_n - 4\xi_n \sum_{k \neq n} |\xi_k|^2 - 3\xi_n |\xi_n|^2 \quad (15)$$

уравнения (13). Как и выше, итоговое заключение проще формулируется, если в уравнениях (15) перейти к полярным координатам, а затем составить уравнения для квадратов амплитуд, что приведет нас к идентичной (9) системе. В частности, у нее экспоненциально устойчивы только одномерные состояния равновесия.

Как и перед теоремой 1, фиксируем целое число n_0 и урежем указанным там способом систему амплитудных уравнений.

ТЕОРЕМА 2. *Найдутся достаточно малое число $\varepsilon_0 > 0$ и достаточно большое число a_0^* такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и произвольно фиксированном $a_0 > a_0^*$ краевая задача (10), (2) заведомо имеет n_0 орбитально экспоненциально устойчивых циклов, асимптотика которых, в частности, строится с использованием одномерных состояний равновесия урезанной системы амплитудных уравнений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По сравнению с теоремой 1 в доказательстве теоремы 2 содержится одна тонкость, требующая объяснения.

Собственно в симметричном отношении находится краевая задача (1), (2) с ее квазинормальной формой (9) и уравнение (13) с его квазинормальной формой (15). Поэтому в соответствии с утверждением, аналогичным теореме 1, уравнение (13) заведомо имеет n_0 орбитально экспоненциально устойчивых циклов

$$w_1^*(s, y), \dots, w_{n_0}^*(s, y). \quad (16)$$

Но уравнение в вариациях каждого из них в качестве решений имеет по отдельности их же производные по s и по y . Приходим к выводу, что каждый из циклов (16) – с необходимостью бегущая волна, т.е. имеют место представления

$$w_j^* = \Phi_j(\gamma_j s + y), \quad j = 1, \dots, n_0, \quad (17)$$

где γ_j – некоторые постоянные, а Φ_j – некоторые 2-периодические функции.

В [2] и [4] отмечено, что в исходной задаче находят соответствие только стационарные режимы определенной структуры и сложности квазинормальной формы. И дело здесь не в трудностях технического характера, а связано с существом проблемы. В нашем случае циклы уравнения (13) хорошо устроены: согласно (17) и терминологии из [2] они относятся к так называемым автомодельным. Поэтому обоснование теоремы 2, как и доказательство теоремы 1, проводится достаточно стандартным способом.

Интересно было бы разобраться со всеми тонкостями динамики краевой задачи (10), (2) при умеренных значениях параметра a_0 . В частности, интересно выявить асимптотические свойства и свойства устойчивости циклов уравнения (11) при малых a_0 . Представляется, что их много, по форме они релаксационны, а устойчив только наиболее просто устроенный цикл.

5. В заключение коснемся одного аспекта рассмотренной в [3] бифуркационной проблемы для сингулярно возмущенного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + u + f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \varepsilon a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (18)$$

с граничными условиями (2). Как и в п. 4, параметр $a_0 > 0$ считаем фиксированным, но численно большим. Относительно гладкой функции f предполагаем, что она имеет в нуле высший порядок малости, причем отрицательна действительная часть первой ляпуновской величины обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{u} + u + f(u, \dot{u}) = 0. \quad (19)$$

Здесь точка использована для обозначения дифференцирования по времени.

В [3] показано, что квазинормальная форма (18), (2) также имеет вид краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -i \frac{a_0^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \xi + d \xi |\xi|^2, \quad (20)$$

$$\xi|_{x=0} = \xi|_{x=1} = 0, \quad (21)$$

которая, естественно, дополняется комплексно сопряженной. Отметим, что в (20) d – первая ляпуновская величина уравнения (19).

В [3] сформулировано, а в [4] обосновано следующее положение. Пусть квазинормальная форма (20), (21) имеет орбитально экспоненциально устойчивый автомодельный цикл

$$\xi(\tau, x) = \xi_0(x) \exp i \alpha_0 \tau. \quad (22)$$

Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача (18), (2) также имеет орбитально экспоненциально устойчивый цикл, асимптотика которого на промежутке времени порядка ε^{-1} строится с учетом формул, используемых при выводе уравнения (20). Ниже данный факт будет существенным.

Выполняя в (20), (21) нормирующие замены

$$\eta = \mu^{1/2} \xi, \quad \tau = \mu s, \quad \mu = \frac{2}{a_0^2},$$

приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial \eta}{\partial s} = -i \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\mu}{2} \eta + d \eta |\eta|^2, \quad (23)$$

$$\eta|_{x=0} = \eta|_{x=1} = 0. \quad (24)$$

Очевидно, что краевая задача (23), (24) нерезонансна. Поэтому ее квазинормальная форма максимально проста. Именно, если $2 \operatorname{Re} d = -1$, что не ограничивает общности, для квадратов амплитуд выходит та же система (9), правда, теперь в левой части дифференцирование происходит по переменной $\sigma = \mu s$. Поэтому для краевой задачи (23), (24) справедливо аналогичное теореме 2 утверждение. Отметим, что при этом циклы, о которых идет речь в теореме 2, с необходимостью (ср. с соответствующим местом п. 4)

имеют автомодельный вид (22). Остается сослаться на сформулированное выше положение, приводящее к выводу, что с ростом a_0 у краевой задачи (18), (2) появляется большое число орбитально экспоненциально устойчивых циклов, каждый из которых по пространственной и временной переменным имеет выраженный гармонический характер.

В [4] отмечено, что при подходе с позиций сингулярно возмущенных уравнений мы находимся в окрестности максимального вырождения, а значит, характерные для данного класса задач динамические эффекты должны наиболее полно проявляться. Поэтому оправданно считать систему (9) эталонной в вопросе о бифуркации автоколебаний нерезонансных уравнений волнового типа.

Сделаем вывод из всего сказанного выше. В прикладных исследованиях давно установилась точка зрения, что для многочастотных нерезонансных систем типичны многочастотные колебания (см., например, [9]). Наше исследование, касающееся, конечно, достаточно конкретных волновых уравнений, приводит к другому заключению. В связи с этим уместно напомнить еще одно обстоятельство. В [3] объяснено, что при $\text{Im } d < 0$ и малых a_0 становятся хаотическими колебания в системе (20), (21), причем вместе с уменьшением a_0 неограниченно растет ляпуновская размерность странного аттрактора. Поэтому вопреки представлениям многих прикладников в некоторых случаях систем высокой размерности хаос связан не с отходом от резонансов, а с их углублением.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колесов Ю. С. Задача паразит-хозяин // Динамика биологических популяций. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1984. С. 16–29.
- [2] Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
- [3] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 2. С. 281–283.
- [4] Колесов Ю. С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.
- [5] Колесов Ю. С. Аттракторы резонансных уравнений волнового типа – разрывные колебания // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 1. С. 42–49.
- [6] Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
- [7] Колесов А. Ю. Устойчивость автоколебаний телеграфного уравнения, бифурцирующих из состояния равновесия // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 59–65.
- [8] Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. М.: Наука, 1987.
- [9] Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.

Ярославский государственный университет

Поступило

02.01.95

Исправленный вариант

31.05.96