Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Скворцов, А. П. Солодов, Об одном обобщении интеграла Данжуа, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 766–772

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:52:17

УДК 517.518.126

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛА ДАНЖУА

В. А. Скворцов, А. П. Солодов

Доказывается, что M -интеграл Изеки является существенно более общим, чем широкий интеграл Данжуа.

Библиография: 6 названий.

В данной заметке рассматривается введенный Изеки M -интеграл (см. [1]) и дается положительный ответ на вопрос Изеки, является ли M -интеграл существенно более общим, чем широкий интеграл Данжуа.

Определение Изеки базируется на понятии стабильности функции в некотором классе $\mathcal{P}$, являющемся подмножеством класса ADN – класса *всех аппроксимативно дифференцируемых непрерывных функций, обладающих N -свойством Лузина*, т.е. отображающих всякое множество меры 0 в множество меры 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *стабильной* в некотором классе $\mathcal{P} \subset \text{ADN}$, если она принадлежит $\mathcal{P}$ и для любой другой функции $G \in \mathcal{P}$ из условия $F'_{ap}(x) = G'_{ap}(x)$ п.в. на $[a, b]$ следует, что $F - G = \text{const}$.

Другими словами, стабильная функция является единственной внутри класса $\mathcal{P}$ (с точностью до аддитивной постоянной) первообразной для своей аппроксимативной производной. Поэтому понятие стабильности может быть использовано для дескриптивного определения интеграла.

Изеки в [1] рассматривал два таких определения. В первом случае в качестве $\mathcal{P}$ берется весь класс ADN, что приводит к определению N -интеграла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *N -интегрируемой*, если существует стабильная в ADN функция F такая, что $F'_{ap}(x) = f(x)$ п.в. на $[a, b]$.

Второе определение интеграла вводится в [1] на основе понятия M -непрерывности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Непрерывная функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *M -непрерывной* на множестве $E \subset [a, b]$, если для каждого множества $S \subset E$ меры 0 и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность неперекрывающихся отрезков $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, что $\bigcup_n I_n \supset S$ и $\sum_n \omega(F, I_n \cap S) < \varepsilon$ (здесь $\omega(F, X)$ обозначает колебание функции F на множестве X).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00332. Работа первого автора выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № 94-1044.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Непрерывная функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *обобщенно M -непрерывной* на множестве $E \subset [a, b]$, если E представимо в виде счетного объединения множеств, на каждом из которых функция F является M -непрерывной.

(В [2] классы M -непрерывных и обобщенно M -непрерывных функций обозначаются соответственно через $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_1 G$.)

Класс всех обобщенно M -непрерывных аппроксимативно дифференцируемых функций обозначим через ADM. Ясно, что $\text{ADM} \subset \text{ADN}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция F является M -непрерывной на каждом из множеств E_1 и E_2 , то она M -непрерывна и на их объединении. Далее, пусть функция F обобщенно M -непрерывна на E , т.е.

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

и F является M -непрерывной на каждом E_n . Положим

$$E'_n = \bigcup_{k=1}^n E_k.$$

Тогда F будет M -непрерывной на каждом E'_n , и для каждого n справедливо $E'_n \subset E'_{n+1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *M -интегрируемой*, если существует стабильная в ADM функция F такая, что $F'_{ap}(x) = f(x)$ п.в. на $[a, b]$.

Напомним также определение широкого интеграла Данжуа (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *АС-функцией* на множестве $E \subset [a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой последовательности неперекрывающихся отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$, концы которых принадлежат E , из условия $\sum_n |b_n - a_n| < \delta$ следует, что $\sum_n |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Непрерывная функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *АСG-функцией* на множестве $E \subset [a, b]$, если E представимо в виде счетного объединения множеств, на каждом из которых F является АС-функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *D -интегрируемой*, если существует АСG-функция F такая, что $F'_{ap}(x) = f(x)$ п.в. на $[a, b]$.

Легко проверить (см. [1] и [4]), что $\text{ACG} \subsetneq \text{ADM} \subsetneq \text{ADN}$. Известно (см. [5]), что всякая АСG-функция является стабильной в классе ADN и тем более в классе ADM. Поэтому D -интеграл не уже N -интеграла и M -интеграла. Изеки в [1] поставил вопрос о том, является ли включение D -интеграла в эти интегралы строгим. Что касается N -интеграла, то на этот вопрос отвечает следующая теорема, доказанная в [6].

ТЕОРЕМА А. Пусть функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$, обладает N -свойством и почти всюду аппроксимативно дифференцируема. Тогда F является АСG-функцией тогда и только тогда, когда любая другая непрерывная, обладающая N -свойством, почти всюду аппроксимативно дифференцируемая функция G , у которой $G'_{ap}(x) = F'_{ap}(x)$ п.в., отличается от F на аддитивную постоянную.

Иначе говоря, N -интеграл в точности совпадает с D -интегралом.

Здесь мы покажем, что в отличие от N -интеграла M -интеграл оказывается существенно более общим, чем D -интеграл. Это будет вытекать из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Существует функция F , стабильная в ADM, но не являющаяся ACG-функцией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – канторово совершенное множество на $[0, 1]$ и пусть $\Delta_k^r = (a_k^r, b_k^r)$, $1 \leq k \leq 2^{r-1}$, $r = 1, 2, \dots$, – смежные интервалы длины $1/3^r$. Обозначим через I_j^n , $1 \leq j \leq 2^{2^n}$, интервалы, составляющие множество

$$(0, 1) \setminus \bigcup_{m=0}^n \bigcup_{k=1}^{2^{2^m-1}} [a_k^{2^m}, b_k^{2^m}].$$

Каждая точка $x \in [0, 1)$ единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i = 0, 1 \text{ или } 2$$

(условимся для троично-рациональных точек использовать представление в виде конечной дроби).

Заметим, что коэффициент x_{2^n} постоянен на каждом интервале I_j^n , принимая значения 0 или 2, и положим для каждого $n = 2, 3, 4, \dots$

$$f_n(x) = \frac{x_{2^n}}{2^{2^n}}, \quad x \in I_j^n, \quad 1 \leq j \leq 2^{2^n}.$$

Доопределим f_n на замыканиях интервалов I_j^n по непрерывности, а затем на интервалах $\Delta_k^{2^m}$, $1 \leq k \leq 2^{2^m-1}$, $0 \leq m \leq n$, линейно так, чтобы f_n была непрерывна на $[0, 1]$. Заметим, что при $k > n$

$$\omega(f_k, I_j^n) = 2^{1-2^k}. \quad (1)$$

Кроме того, $|f_n(x)| \leq 2^{1-2^n}$ при всех $x \in [0, 1]$. Поэтому ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$$

сходится равномерно и функция

$$F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$$

непрерывна на $[0, 1]$. Заметим для дальнейшего, что

$$|F(b_k^{2^n}) - F(a_k^{2^n})| \geq \frac{1}{2^{2^n}}. \quad (2)$$

Отметим также следующее свойство функции F .

ЛЕММА. *Для любых $x, y \in C$ неравенство $|F(x) - F(y)| \leq 3/2^{2^{n+1}}$ обеспечивает более сильное неравенство $|F(x) - F(y)| < 3/2^{2^{n+1}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем x и y , для которых выполнены условия леммы, и покажем, что $f_m(x) = f_m(y)$ при всех m , $2 \leq m \leq n$. Если бы это было не так, то, взяв наименьшее из тех m , для которых $f_m(x) \neq f_m(y)$, мы получили бы $|f_m(x) - f_m(y)| = 2/2^{2^m}$ и

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\geq \frac{2}{2^{2^m}} - \sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k(x) - f_k(y)| \geq \frac{2}{2^{2^m}} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{2}{2^{2^k}} \\ &> \frac{2}{2^{2^m}} - \frac{4}{2^{2^{m+1}}} > \frac{3}{2^{2^{m+1}}} \geq \frac{3}{2^{2^{n+1}}}, \end{aligned}$$

что противоречит условию. Таким образом, $f_m(x) = f_m(y)$ для всех m , $2 \leq m \leq n$, и стало быть,

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x) - f_k(y)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{2^{2^k}} < \frac{3}{2^{2^{n+1}}},$$

что и доказывает лемму.

Проверим теперь, что F обобщенно M -непрерывна на $[0, 1]$. Так как F линейна на Δ_k^r , $1 \leq k \leq 2^{r-1}$, то она M -непрерывна на Δ_k^r . Следовательно, осталось показать, что F является M -непрерывной на C .

Ясно, что

$$\bigcup_{j=1}^{2^{2^n}} \bar{I}_j^n \supset C$$

($\bar{X}$ означает замыкание множества X). Задав произвольное $\varepsilon > 0$, мы можем выбрать n так, что $2^{2-2^n} < \varepsilon$. Тогда с учетом (1)

$$\sum_{j=1}^{2^{2^n}} \omega(F, \bar{I}_j^n \cap C) \leq \sum_{j=1}^{2^{2^n}} \omega(F, \bar{I}_j^n) \leq 2^{2^n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{2^{2^k}} \leq \frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}-2}} = 2^{2-2^n} < \varepsilon.$$

Итак, F обобщенно M -непрерывна.

Покажем, что для любой функции G , принадлежащей классу ADM, из условия $G'_{ap}(x) = F'_{ap}(x)$ п.в. на $[0, 1]$ следует, что $G - F = \text{const}$. Пусть это не так. Пусть S – множество точек, ни в какой окрестности каждой из которых непрерывная функция $H = G - F$ не является постоянной. По предположению S непусто. Ясно, что S – совершенное множество, на смежных интервалах которого H постоянна. На смежных интервалах множества C функция F линейна и, стало быть, ACG. Теорема А показывает, что H постоянна на этих смежных интервалах, т.е. $S \subset C$. Функция G обобщенно M -непрерывна на $[0, 1]$, а значит, и на S , т.е. S представимо в виде счетного объединения множеств S_n , на каждом из которых функция G будет M -непрерывной. Согласно замечанию к определению 4 можно считать, что $S_n \subset S_{n+1}$. По теореме Бэра о категориях найдется порция $[\alpha, \beta] \cap S$, $(\alpha, \beta) \cap S \neq \emptyset$, а также номер N такие, что для любого $n \geq N$ множество $[\alpha, \beta] \cap S_n$ всюду плотно в $[\alpha, \beta] \cap S$. Так как $(\alpha, \beta) \cap S \neq \emptyset$, функция H не является постоянной на отрезке $[\alpha, \beta]$, поэтому $|H([\alpha, \beta] \cap S)| \neq 0$ (здесь

$f(X)$ обозначает образ множества X при отображении f , а $|X|$ – меру множества X . Отсюда и из равенства

$$H([\alpha, \beta] \cap S) = \bigcup_{n=N}^{\infty} H([\alpha, \beta] \cap S_n)$$

вытекает, что для некоторого $n \geq N$ выполнено $|H([\alpha, \beta] \cap S_n)| \neq 0$. Обозначим через S' множество $[\alpha, \beta] \cap S_n$, где n выбрано выше. Итак, функция G является M -непрерывной на множестве S' , которое всюду плотно в $[\alpha, \beta] \cap S$, и при этом $|H(S')| \neq 0$.

Рассмотрим произвольный отрезок I такой, что $I \cap S' \neq \emptyset$. Положим

$$A = \min_{x \in I \cap S'} F(x), \quad B = \max_{x \in I \cap S'} F(x).$$

Минимум и максимум достигаются в точках $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно. Предположим сначала, что $A < B$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\bar{x} < \bar{y}$. Заметим, что $B - A \leq \omega(F, [0, 1]) \leq 1/4$, и найдем натуральное $m \geq 2$, для которого выполнены неравенства

$$B - A \geq \frac{3}{2^{2^m+1}}, \quad (3)$$

$$B - A < \frac{3}{2^{2^{m-1}+1}}. \quad (4)$$

Лемма позволяет усилить неравенство (4):

$$B - A < \frac{3}{2^{2^m}}. \quad (5)$$

Далее, пусть

$$x^* = \sup \left\{ x : x < \bar{y}, x \in I \cap S', B - F(x) \geq \frac{3}{2^{2^m+1}} \right\},$$

$$y^* = \inf \left\{ y : y > x^*, y \in I \cap S', F(y) - A \geq \frac{3}{2^{2^m+1}} \right\}.$$

Заметим, что $x^* < y^*$, так как в противном случае выполняется неравенство $B - A \geq 3/2^{2^m}$, противоречащее (5). Интервал (x^*, y^*) не содержит точек множества S' . Действительно, если $z \in (x^*, y^*) \cap S'$, то из определения x^* следует, что $B - F(z) < 3/2^{2^m+1}$. Тогда согласно лемме

$$B - F(z) < \frac{3}{2^{2^{m+1}}}. \quad (6)$$

Аналогично, из определения y^* и леммы следует, что

$$F(z) - A < \frac{3}{2^{2^{m+1}}}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) вытекает, что $B - A < 6/2^{2^{m+1}} \leq 3/2^{2^m+1}$. Получаем противоречие с (3).

Таким образом, $S' \cap (x^*, y^*) = \emptyset$, откуда $S \cap (x^*, y^*) = \emptyset$. Поэтому функция H постоянна на $[x^*, y^*]$, и значит,

$$\omega(G, [x^*, y^*]) = \omega(F, [x^*, y^*]). \quad (8)$$

В силу непрерывности функции G и определения точек x^* и y^* найдутся точки $u, v \in I \cap S'$ такие, что

$$|G(u) - G(v)| \geq \frac{1}{2} \omega(G, [x^*, y^*]). \quad (9)$$

Соотношения $B - F(y^*) < 3/2^{2m+1}$ и $F(x^*) - A < 3/2^{2m+1}$, вытекающие из определения x^* и y^* и неравенства $x^* < y^*$, вместе с леммой дают нам неравенства

$$B - F(y^*) < \frac{3}{2^{2m+1}}, \quad F(x^*) - A < \frac{3}{2^{2m+1}}. \quad (10)$$

Из (10) и (5) следует, что $F(y^*) - F(x^*) > B - A - 2 \cdot 3/2^{2m+1} > (B - A)/2$ при $m \geq 2$, т.е.

$$\omega(F, [x^*, y^*]) > \frac{1}{2} \omega(F, I \cap S'). \quad (11)$$

Очевидно также, что

$$\omega(G, I \cap S') \geq |G(u) - G(v)|. \quad (12)$$

Соотношения (8), (9), (11) и (12) позволяют заключить, что

$$\omega(G, I \cap S') \geq \frac{1}{4} \omega(F, I \cap S'). \quad (13)$$

В случае $A = B$ неравенство (13) очевидно.

Возьмем $\varepsilon = |H(S')|/5$. Функция G является M -непрерывной на S' , поэтому существует такая последовательность неперекрывающихся отрезков $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, что $\bigcup_n I_n \supset S'$ и

$$\sum_n \omega(G, I_n \cap S') < \varepsilon. \quad (14)$$

Отсюда и из неравенства (13) вытекает, что

$$\sum_n \omega(F, I_n \cap S') < 4\varepsilon. \quad (15)$$

Используя (14) и (15), получаем

$$\begin{aligned} |H(S')| &\leq \sum_n \omega(H, I_n \cap S') \leq \sum_n \omega(G, I_n \cap S') + \sum_n \omega(F, I_n \cap S') \\ &< \varepsilon + 4\varepsilon = 5\varepsilon = |H(S')|. \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что множество S пусто, и значит, F стабильна в классе ADM.

Наконец, покажем, что F не является АСГ-функцией. Если это не так, то найдется непустая порция замкнутого множества C , на которой F является АС-функцией. Эта порция содержит множество $I_j^m \cap C$ для некоторых j и m . Для каждого n такого, что $2^n > m$, рассмотрим набор отрезков $\Delta_k^{2^n} = [a_k^{2^n}, b_k^{2^n}]$ таких, что $\Delta_k^{2^n} \subset I_j^m$. Их число равно $2^{2^n}/2^{2^m+1}$. Тогда с учетом (2)

$$\sum_{k: \Delta_k^{2^n} \subset I_j^m} |b_k^{2^n} - a_k^{2^n}| = \frac{1}{2^{2^m+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n},$$

$$\sum_{k: \Delta_k^{2^n} \subset I_j^m} |F(b_k^{2^n}) - F(a_k^{2^n})| \geq \frac{1}{2^{2^n}} \cdot \frac{2^{2^n}}{2^{2^m+1}} = \frac{1}{2^{2^m+1}}.$$

Поскольку в этих соотношениях n произвольно, а m фиксировано, то, устремляя n к бесконечности, получаем противоречие с абсолютной непрерывностью функции F .

Тем самым, теорема доказана.

Авторы пользуются случаем поблагодарить профессора Л. Д. Пьяцца (Италия), которая привлекла их внимание к рассмотренной здесь задаче.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Iseki K. An attempt to generalize the Denjoy integration // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 1983. V. 34. № 1. P. 19–33.
- [2] Ene V. Real Functions – Current Topics. Lecture Notes in Math. V. 1603. Berlin: Springer, 1995.
- [3] Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [4] Iseki K. On quasi-Denjoy integration // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1962. V. 38. P. 252–257.
- [5] Foran J. Differentiation and Luzin's condition (N) // Real Anal. Exchange. 1977–78. V. 3. № 1. P. 34–37.
- [6] Bongiorno B., Preiss D. An unusual descriptive definition of integral // Contemp. Math. 1985. V. 42. P. 13–22.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23.07.96