Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Власов, Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в гильбертовом пространстве, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 782–786

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:47:48

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Власов

В предлагаемой заметке изучаются функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) нейтрального типа с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве в случае переменных коэффициентов и переменных запаздываний. Для указанных уравнений устанавливаются результаты о корректной разрешимости начальных задач в весовых пространствах Соболева на полуоси. Приводятся примеры, показывающие существенность условий основных теорем.

Пусть $\mathfrak{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор в $\mathfrak{H}$, имеющий ограниченный обратный, I – единичный оператор в $\mathfrak{H}$. Превратим область определения $\text{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β ($\beta > 0$) в гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\beta$, введя на $\text{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$.

Обозначим через $L_{2,\gamma}((a, b), \mathfrak{H})$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) пространство вектор-функций со значениями в $\mathfrak{H}$, снабженное нормой

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(a,b)} \equiv \left(\int_a^b \exp(-2\gamma t) \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \gamma > -\alpha_0,$$

где α_0 – нижняя грань [1] оператора A , а через $W_{2,\gamma}^1((a, b), A)$ – весовое пространство Соболева вектор-функций таких, что $A^j u^{(1-j)}(t) \in L_{2,\gamma}((a, b), \mathfrak{H})$ ($j = 0, 1$), снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^1(a,b)} \equiv (\|u^{(1)}\|_{L_{2,\gamma}(a,b)}^2 + \|Au\|_{L_{2,\gamma}(a,b)}^2)^{1/2}.$$

Здесь и в дальнейшем полагаем

$$v^{(j)}(t) \equiv \frac{d^j}{dt^j} v(t), \quad j = 1, 2, \dots, \quad W_{2,0}^1 \equiv W_2^1, \quad L_{2,0} \equiv L_2.$$

Подробнее о пространстве $W_2^1((a, b), A)$ см. [2, гл. 1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00333, и Фонда поддержки научных школ, грант № 96-15-96091.

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим следующую задачу:

$$\mathfrak{A}u \equiv \frac{du}{dt} + Au(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{p=0}^1 (B_{jp}(t) S_{g_j}(A^{1-p}u^{(p)})(t)) = f(t), \quad (1)$$

$$u(+0) = \varphi_0. \quad (2)$$

Здесь $B_{jp}(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n, p = 0, 1$) – сильно непрерывные оператор-функции, принимающие значения в кольце ограниченных операторов, действующих в пространстве $\mathfrak{H}$, вектор $\varphi_0 \in \mathfrak{H}_{1/2}$. Операторы S_{g_j} определяются следующим образом:

$$(S_{g_j}v)(t) = \begin{cases} v(g_j(t)) & \text{при тех } t, \text{ для которых } g_j(t) \geq 0, \\ 0 & \text{при тех } t, \text{ для которых } g_j(t) < 0, \end{cases}$$

где $g_j(t)$ – вещественнозначные непрерывно дифференцируемые функции такие, что $g_j(t) \leq t$, $g_j^{(1)}(t) > 0$, $t \in [0, +\infty)$. Через $g_j^{-1}(t)$ обозначим функции, обратные к $g_j(t)$, положим $h_j(t) = t - g_j(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор-функцию $u(t)$ из пространства $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$ при некотором $\gamma \geq 0$ назовем *сильным решением задачи* (1), (2), если $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$, а также условию (2) в смысле сходимости в пространстве $\mathfrak{H}_{1/2}$.

Введем следующие обозначения:

$$b_{jp}(\gamma) = \sup_{t \in [g_j^{-1}(0), +\infty)} (\exp(-\gamma h_j(t)) \|B_{jp}(t)\| (g_j^{(1)}(t))^{-1/2}),$$

$$r_p(\gamma) = \sup_{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \geq \gamma} \|\lambda^p A^{1-p}(\lambda I + A)^{-1}\|, \quad p = 0, 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \gamma > -\alpha_0.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть найдется $\gamma_0 \geq 0$ такое, что

$$\sigma(\gamma_0) < 1, \quad (3)$$

где

$$\sigma(\gamma) = \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^n r_p(\gamma) b_{jp}(\gamma).$$

Тогда для любого $\gamma \geq \gamma_0$ оператор $\mathbf{V}_\gamma$, действующий по правилу $\mathbf{V}_\gamma u \equiv (\mathfrak{A}u, u(+0))$, отображает пространство $W_{2,\gamma}^1((a, b), A)$ на пространство $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) \oplus \mathfrak{H}_{1/2}$ и имеет ограниченный обратный.

В теореме 2 рассматривается важный для приложений случай $\gamma_0 = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено неравенство

$$\Delta \equiv \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^n \left(\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \|B_{jp}(t)\| (g_j^{(1)}(t))^{-1/2} \right) < 1. \quad (4)$$

Тогда утверждение теоремы 1 справедливо с постоянной $\gamma_0 = 0$, причем при $\gamma_0 = 0$ и $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$

$$\|u(t)\|_{1/2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Следующая теорема относится к случаю отрицательных γ , т.е. соответственно к случаю экспоненциально убывающих решений.

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор-функции $B_{j1}(t) \equiv 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), а $B_{j0}(t)$ допускают представление $B_{j0}(t) = D_{j0}(t)C_j$, где C_j — компактные операторы в $\mathfrak{H}$, $D_{j0}(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) сильно непрерывны и принимают значения в кольце ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$. Пусть также выполнено неравенство (4), причем найдутся положительные постоянные θ_p ($p = 0, 1$) такие, что $\theta_0 \leq h_j(t) \leq \theta_1$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что для любого γ : $\gamma > \max(-\alpha_0, -\delta)$, оператор $V_\gamma u \equiv (\mathfrak{A}u, u(+0))$ отображает пространство $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$ на пространство $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) \oplus \mathfrak{H}_{1/2}$ и имеет ограниченный обратный.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим следующую начальную задачу:

$$\frac{du}{dt} + Au(t) + \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^n (B_{jp}(t)A^{1-p}u^{(p)}(g_j(t))) = f_0(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

$$u^{(p)}(t) = y_p(t), \quad t \in \mathbb{R}_- = (-\infty, 0), \quad p = 0, 1, \quad u(+0) = \varphi_0. \quad (6)$$

Известно (см., например, [3]), что задача (5), (6) может быть сведена к задаче вида (1), (2) с правой частью, имеющей представление

$$f(t) = f_0(t) - \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^n (B_{jp}(t)T^{g_j}(A^{1-p}y_p)(t)), \quad (7)$$

где операторы T^{g_j} определяются следующим образом:

$$(T^{g_j}v)(t) = \begin{cases} 0 & \text{при тех } t, \text{ для которых } g_j(t) \geq 0, \\ v(g_j(t)) & \text{при тех } t, \text{ для которых } g_j(t) < 0. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор-функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$ при некотором $\gamma \geq 0$, назовем *сильным решением задачи* (5), (6), если $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) с правой частью $f(t)$ вида (7) и условию (2) в смысле сходимости в пространстве $\mathfrak{H}_{1/2}$.

Введем следующие обозначения:

$$d_{jp}(\gamma) = \sup_{t \in [0, g_j^{-1}(0))} (\exp(-\gamma h_j(t)) \|B_{jp}(t)\| (g_j^{(1)}(t))^{-1/2}), \quad p = 0, 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

На основании теоремы 1 может быть установлена следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и при некотором γ_1

$$\sigma_1(\gamma_1) < +\infty, \quad (8)$$

где

$$\sigma_1(\gamma) = \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^n d_{jp}(\gamma).$$

Тогда для любого $\gamma > \gamma^* = \max(\gamma_0, \gamma_1)$, любых вектор-функций $(Ay_0)(t), y_1(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_-, \mathfrak{H})$, $f_0(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$ и любого вектора $\varphi_0 \in \mathfrak{H}_{1/2}$ существует единственное сильное решение $u(t)$ задачи (5), (6), принадлежащее пространству $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$ и удовлетворяющее неравенству

$\|u\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)} \leq d(\|Ay_0\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_-, \mathfrak{H})}^2 + \|y_1\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_-, \mathfrak{H})}^2 + \|f_0(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})}^2 + \|\varphi_0\|_{1/2}^2)^{1/2}$
с постоянной d , не зависящей от $(f_0(t), (Ay_0)(t), y_1(t), \varphi_0)$.

Приведем несколько замечаний и краткий комментарий к сформулированным утверждениям.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При дополнительном предположении $h_j(t) \geq \alpha > 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) достаточным условием существования γ_0 , для которого выполнено неравенство (3), является условие

$$\sigma(0) = \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^n \left(\sup_{t \in [g_j^{-1}(0), +\infty)} (\|B_{jp}(t)\| (g_j^{(1)}(t))^{-1/2}) \right) < +\infty.$$

При этом неравенство (3) справедливо для любого γ_0 такого, что

$$\gamma_0 > \frac{1}{\alpha} \max(\ln \sigma(0), 0). \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Неравенство (4) является существенным (строгое неравенство нельзя заменить нестрогим).

Это показывает

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathfrak{H} \equiv \mathbb{C}$, $A = \text{const} > 0$, $n = 1$, $B_{10}(t) = -1$, $B_{11}(t) \equiv 0$, $g_1(t) = t - h$.

Рассмотрим соответствующую задачу:

$$\frac{du}{dt} + Au(t) - S_{t-h}(Au)(t) = \chi(0, h)A, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (10)$$

$$u(+0) = \varphi_0 = 1,$$

где $\chi(0, h)$ – характеристическая функция интервала $(0, h)$.

В данном случае $\Delta = 1$ и задача (10) имеет единственное сильное решение $u(t) \equiv 1$, не принадлежащее пространству $W_2^1(\mathbb{R}_+, A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Неравенство (9) является существенным.

Это показывает

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathfrak{H} \equiv \mathbb{C}$, $B_{10}(t) \equiv 0$, $B_{11}(t) \equiv D = \text{const}$, $A = \text{const} > 0$, $n = 1$, $g_1(t) = t - h$, $\alpha = h > 0$, $|D| > 1$.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение вида (5):

$$\frac{du}{dt} + Au(t) + D \frac{du}{dt}(t - h) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (11)$$

В данном случае корни квазимногочлена $l(\lambda) = \lambda + A + \lambda D \exp(-\lambda h)$ уравнения (11) асимптотически приближаются к прямой $\text{Re } \lambda = \ln |D|/h = \sigma(0)$ (см., например, [4]), оставаясь слева от нее. Тем самым, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать экспоненциальное решение $z_q(t) = \exp(\lambda_q t)$ уравнения (11) и, следовательно, соответствующей задачи вида (5), (6) при $y_0(t) = z_q(t)$, $y_1(t) = \lambda_q z_q(t)$, $\varphi_0 = 1$, для которого $\sigma(0) - \varepsilon < \text{Re } \lambda_q < \sigma(0)$. Принимая во внимание соотношение (7), связывающее задачи (1), (2) и (5), (6), получаем, что в неравенстве (9) заменить $\sigma(0)$ на $\sigma(0) - \varepsilon$ нельзя.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие (8) обеспечивает то, что второе слагаемое в правой части (7) принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$ для любых вектор-функций $y_0(t)$, $y_1(t)$ таких, что $(Ay_0)(t)$, $y_1(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_-, \mathfrak{H})$. При этом, если дополнительно предположить, что функции $g_j(t)$ таковы, что

$$\omega_0 = \max_{j=1,n} \sup_{t \in [0, g_j^{-1}(0))} |g_j(t)| < +\infty,$$

то второе слагаемое в (7) принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$ при любом $\gamma \in \mathbb{R}$ и произвольных вектор-функциях $y_0(t)$ и $y_1(t)$ таких, что $(Ay_0)(t)$, $y_1(t) \in L_2((-\omega_0, 0), \mathfrak{H})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Приведенное определение сильного решения задачи (5), (6) (см. также [3]), разумеется, не является единственно возможным. В настоящее время имеется много различных подходов в понимании и определении решений задач вида (5), (6). Поэтому ограничимся здесь лишь указанием монографий [3]–[6], а также работ [7]–[11] (см. также приведенную в них библиографию).

В заключение заметим, что функционально-дифференциальные уравнения в банаховых и, в частности, в гильбертовых пространствах изучались многими авторами. Отметим, однако, что подавляющее большинство исследований относилось к случаю $B_{j1}(t) \equiv 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), т.е. к случаю, когда отклонения аргументов у производной отсутствуют. Из наиболее близких работ укажем [9]–[11]. Уместно отметить, что условия, накладываемые в приведенных утверждениях на коэффициенты и запаздывания, являются в целом менее ограничительными, чем в [9]–[11]. Так, в [9] рассматривался случай автономных уравнений с коэффициентами и запаздываниями, не зависящими от t , а в [10], [11] рассматривался случай ограниченных коэффициентов $B_j(t)A$ и постоянных запаздываний. Результаты предлагаемой заметки развивают и дополняют некоторые утверждения из [12]–[14].

Автор благодарит А. А. Шкаликова за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
2. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
3. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
5. Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990.
6. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
7. Nakagiri S. // Osaka J. Math. 1988. V. 85. P. 353–398.
8. Di Blasio, Kunish K., Svinestrari E. // J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 102. P. 38–57.
9. Staffans O. // J. Differential Equations. 1985. V. 58. № 2. P. 157–191.
10. Datko R. // J. Differential Equations. 1978. V. 29. № 1. P. 105–166.
11. Wu J. // Differential Integral Equations. 1991. V. 4. № 6. P. 1325–1351.
12. Власов В. В. // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 8. С. 67–92.
13. Власов В. В. // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 6. С. 733–736.
14. Власов В. В. // Изв. вузов. Матем. 1996. № 1. С. 22–35.