Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гомилко, Г. В. Радзиевский, О числовых образах семейства коммутирующих операторов, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 787–791

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1665>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:45:55

О ЧИСЛОВЫХ ОБРАЗАХ СЕМЕЙСТВА КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

А. М. Гомилко, Г. В. Радзиевский

Пусть B – комплексное банахово пространство. Все операторы предполагаются линейными, ограниченными и действующими из B в B . Введем определение числового образа оператора [1]. По теореме Хана–Банаха для любого элемента $y \in B$ найдется такой линейный непрерывный функционал (по крайней мере один) $f_y \in B^*$, что $f_y(y) = \|y\|^2$ и $\|f_y\| = \|y\|$. Выбор функционала f_y для каждого $y \in B$ позволяет определить на B полувнутреннее произведение $[\cdot, \cdot]$ по правилу $[x, y] = f_y(x)$, $x, y \in B$. Тогда *числовым образом оператора A* называется множество

$$W(A) := \{[Ax, x] : x \in B, [x, x] = \|x\|^2 = 1\}.$$

Если B – гильбертово пространство, то это определение совпадает с обычным определением числового образа. Однако (в отличие от случая гильбертова пространства), числовой образ оператора, действующего в банаховом пространстве, может быть невыпуклым [1] и, вообще говоря, зависит от выбора функционала f_y . Тем не менее, как показано в [2], выпуклая оболочка $\text{conv } \overline{W(A)}$ замыкания $\overline{W(A)}$ не зависит от f_y , определяющих полувнутреннее произведение на B .

Пусть $\sigma(A)$ – спектр оператора A , а $r(A)$ – его спектральный радиус. Тогда $\sigma(A) \subseteq \text{conv } \overline{W(A)}$, т.е. $\text{conv } \sigma(A) \subseteq \text{conv } \overline{W(A)}$. Очевидно, что спектр оператора не зависит от замены исходной нормы банахова пространства B на эквивалентную ей норму. Однако, такие характеристики оператора, как его норма и числовой образ, могут существенно измениться при замене исходной нормы на эквивалентную ей. Данная заметка посвящена изучению вопроса об изменении числовых образов семейств коммутирующих операторов при изменении исходной нормы. Далее символы $\|A\|_*$ и $W(A, \|\cdot\|_*)$ обозначают соответственно норму и числовой образ оператора A , вычисленные в норме $\|\cdot\|_*$. При этом, как было отмечено, включение $\sigma(A) \subseteq \text{conv } \overline{W(A, \|\cdot\|_*)}$ устанавливает наименьшую из возможных границ изменения выпуклой линейной оболочки замыкания числового образа оператора A при эквивалентной перенормировке $\|\cdot\|_*$ банахова пространства. Простые примеры показывают, что равенство $\text{conv } \overline{W(A, \|\cdot\|_*)} = \text{conv } \sigma(A)$ в общем случае не справедливо ни при какой эквивалентной перенормировке (в частности, для квазинильпотентного оператора). Поэтому следующая теорема в определенном смысле точна.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – попарно коммутирующие операторы, действующие в банаховом пространстве B . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая норма $\|\cdot\|_\varepsilon$, эквивалентная исходной, что числовой образ каждого из операторов $A_1, \dots, A_n$ лежит в ε -окрестности выпуклой оболочки спектра этого оператора, т.е.

$$W(A_\gamma, \|\cdot\|_\varepsilon) \subset \{\lambda : |\lambda - \mu| < \varepsilon, \mu \in \text{conv } \sigma(A_\gamma)\}, \quad \gamma = 1, \dots, n.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

Если банахово пространство B является гильбертовым, то соответствующая норма $\|\cdot\|_\varepsilon$ может быть выбрана гильбертовой.

Далее I – тождественный оператор в B и $A^0 := I$. Доказательству теоремы 1 предположим лемму, распространяющую на случай n операторов хорошо известный факт, относящийся к изменению нормы оператора при эквивалентной перенормировке пространства.

ЛЕММА. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – попарно коммутирующие операторы, действующие в банаховом пространстве B . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая норма $\|\cdot\|_\varepsilon$, эквивалентная исходной, что

$$\|A_\gamma\|_\varepsilon < r(A_\gamma) + \varepsilon, \quad \gamma = 1, \dots, n.$$

Если банахово пространство B является гильбертовым, то соответствующая норма $\|\cdot\|_\varepsilon$ может быть выбрана гильбертовой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряды $\sum_{k=0}^\infty R_\gamma^{-k} \|A_\gamma^k\|$ сходятся при $R_\gamma > r(A_\gamma)$, поэтому для $\bar{R} = (R_1, \dots, R_n)$ норма $\|\cdot\|_{\bar{R}}$, заданная равенством

$$\|x\|_{\bar{R}} = \left(\sum_{k_1=0}^\infty \dots \sum_{k_n=0}^\infty \frac{\|A_1^{k_1} \dots A_n^{k_n} x\|^2}{R_1^{2k_1} \dots R_n^{2k_n}} \right)^{1/2},$$

определена для всех элементов $x \in B$, если только $R_\gamma > r(A_\gamma)$, причем норма $\|\cdot\|_{\bar{R}}$ эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|$. Очевидно также, что если исходная норма $\|\cdot\|$ была гильбертовой, то норма $\|\cdot\|_{\bar{R}}$ гильбертова. Из определения $\|\cdot\|_{\bar{R}}$ следуют неравенства $\|A_\gamma x\|_{\bar{R}} \leq R_\gamma \|x\|_{\bar{R}}$, $\gamma = 1, \dots, n$. Выбирая $R_\gamma = r(A_\gamma) + \varepsilon/2$, получаем утверждение леммы.

Приведем следствие из леммы, относящееся к мере обусловленности оператора A , т.е. к величине $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, определенной в предположении ограниченной обратимости оператора A (см., например, [3, с. 237]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – ограниченно обратимый оператор, действующий в банаховом пространстве B . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая норма, эквивалентная исходной, что мера обусловленности оператора A , вычисленная в этой норме, меньше чем $r(A)r(A^{-1}) + \varepsilon$. Если банахово пространство B является гильбертовым, то соответствующая норма может быть выбрана гильбертовой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\Psi_r(\alpha) = \{\lambda : |\lambda - \alpha| \leq r\}$ – круг с центром в точке $\alpha \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$. Из теоремы об аппроксимации выпуклых компактов [4, с. 18] следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся такие круги $\Psi_{r_{\gamma,m}}(\alpha_{\gamma,m})$, для которых выпуклая оболочка спектра каждого оператора A_γ лежит внутри пересечения кругов $\Psi_{r_{\gamma,m}}(\alpha_{\gamma,m})$, $m = 1, \dots, s_\gamma$, а само это пересечение находится в ε -окрестности выпуклой оболочки спектра оператора A_γ , т.е.

$$\text{conv } \sigma(A_\gamma) \subset \bigcap_{m=1}^{s_\gamma} \Psi_{r_{\gamma,m}}(\alpha_{\gamma,m}) \subset \{\lambda : |\lambda - \mu| < \varepsilon, \mu \in \text{conv } \sigma(A_\gamma)\}, \quad \gamma = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Согласно первому включению спектр каждого оператора $A_\gamma + \alpha_{\gamma,m}I$ лежит строго внутри круга $\Psi_{r_{\gamma,m}}(0)$ (с центром в нуле). Применяя теперь к коммутирующим операторам $A_\gamma + \alpha_{\gamma,m}I$, $\gamma = 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, s_\gamma$, лемму, получаем существование такой нормы $\|\cdot\|_\varepsilon$, для которой $\|A_\gamma + \alpha_{\gamma,m}I\|_\varepsilon < r_{\gamma,m}$, а значит, если $\lambda \in W(A_\gamma + \alpha_{\gamma,m}I, \|\cdot\|_\varepsilon)$, то $|\lambda| < r_{\gamma,m}$. Поэтому числовой образ $W(A_\gamma, \|\cdot\|_\varepsilon)$ оператора A_γ находится в пересечении кругов $\Psi_{r_{\gamma,m}}(\alpha_{\gamma,m})$, $m = 1, \dots, s_\gamma$. Отсюда и из второго включения в соотношениях (1) получаем утверждение теоремы.

Приведенные далее два утверждения являются следствиями из теоремы 1, которые распространяют на банахово пространство результаты, установленные ранее в случае гильбертова пространства.

СЛЕДСТВИЕ 2 [5, теорема 4]. Пусть A – ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве B . Тогда $\text{conv } \sigma(A) = \bigcap \text{conv } W(A, \|\cdot\|_*)$, где пересечение берется по всем эквивалентным нормам $\|\cdot\|_*$ банахова пространства B . Если банахово пространство B является гильбертовым, то соответствующее пересечение берется по всем гильбертовым нормам $\|\cdot\|_*$.

СЛЕДСТВИЕ 3 [6, с. 95]. Для того чтобы спектры попарно коммутирующих операторов $A_1, \dots, A_n$ лежали внутри левой полуплоскости необходимо и достаточно существование такой нормы $\|\cdot\|_*$, эквивалентной исходной, что множества $W(A_1, \|\cdot\|_*)$, $\dots$, $W(A_n, \|\cdot\|_*)$ лежали бы внутри левой полуплоскости. Если банахово пространство B является гильбертовым, то соответствующая норма $\|\cdot\|_*$ может быть выбрана гильбертовой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть A_γ – относительно компактное в операторной топологии множество попарно коммутирующих операторов. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ в нем найдется конечная ε -сеть $A_{\gamma_1}, \dots, A_{\gamma_n}$. Применим к операторам $A_{\gamma_1}, \dots, A_{\gamma_n}$ утверждение леммы и заметим, что указанная в этой лемме норма обладает свойством $\|D\|_\varepsilon \leq \|D\|$ для любого оператора D , коммутирующего с $A_{\gamma_1}, \dots, A_{\gamma_n}$. Отсюда получаем, что утверждение леммы справедливо и для бесконечного числа попарно коммутирующих операторов, образующих относительно компактное множество. Понятно также, как теорема 1 и следствие 3 распространяются на множества таких операторов.

Покажем существенность требования коммутативности операторов A_γ для справедливости теоремы 1. Для этого рассмотрим в двумерном пространстве $\mathbb{C}^2$ операторы $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\sigma(A_1) = \sigma(A_2) = \{0\}$. Если бы утверждение теоремы 1 для A_1 и A_2 было бы справедливым, то нашлась бы такая норма $\|\cdot\|_*$ в пространстве $\mathbb{C}^2$, что множества $W(A_1, \|\cdot\|_*)$ и $W(A_2, \|\cdot\|_*)$ лежали бы внутри круга $\{\lambda : |\lambda| < 1/4\}$. Но тогда множество $W(A_1 + A_2, \|\cdot\|_*)$ принадлежало бы кругу $\{\lambda : |\lambda| < 1/2\}$, что невозможно, так как $\sigma(A_1 + A_2) = \{-1, 1\}$. Этот же пример показывает существенность требования коммутативности операторов для справедливости леммы. Для следствия 3 такие примеры строятся полностью аналогично.

Установим критерий выполнения включений $W(A_\gamma, \|\cdot\|_*) \subseteq \Omega_\gamma$, где Ω_γ – заданные выпуклые множества, и, в частности, критерий для выполнения равенств

$$\text{conv } \overline{W(A_\gamma, \|\cdot\|_*)} = \text{conv } \sigma(A_\gamma), \quad \gamma = 1, \dots, n.$$

Далее

$$\rho(\lambda, \Omega_\gamma) := \inf_{\mu \in \Omega_\gamma} |\lambda - \mu| \quad \text{и} \quad R(\lambda, A_\gamma) := (A_\gamma - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \notin \sigma(A_\gamma).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – попарно коммутирующие операторы, действующие в банаховом пространстве B , а $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ – такие замкнутые выпуклые множества, что $\sigma(A_\gamma) \subseteq \Omega_\gamma$, $\gamma = 1, \dots, n$. Тогда для существования такой нормы $\|\cdot\|_*$, эквивалентной исходной, что

$$W(A_\gamma, \|\cdot\|_*) \subseteq \Omega_\gamma, \quad \gamma = 1, \dots, n, \quad (2)$$

необходимо и достаточно выполнение оценок

$$\|(R(\lambda, A_\gamma))^m\| \leq M(\rho(\lambda, \Omega_\gamma))^{-m}, \quad \lambda \notin \Omega_\gamma, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \gamma = 1, \dots, n. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть существует такая норма $\|\cdot\|_*$, что справедливы включения (2). Тогда согласно [7, теорема 6.1] $\|R(\lambda, A_\gamma)\|_* \leq (\rho(\lambda, \Omega_\gamma))^{-1}$, откуда получаем неравенства (3) в исходной норме $\|\cdot\|$.

Достаточность. Пусть выполнены оценки (3). Соотношениями

$$\Theta_\gamma := \{(\alpha, \beta) : \operatorname{Re}(\alpha\omega - \beta) \leq 0, \quad \omega \in \Omega_\gamma\}, \quad \gamma = 1, \dots, n, \quad (4)$$

введем множества пар комплексных чисел (α, β) . Каждое множество Θ_γ является заостренным конусом в пространстве $\mathbb{C}^2$, т.е. из включений $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \Theta_\gamma$ следует справедливость включения $(\zeta\alpha + \xi\alpha', \zeta\beta + \xi\beta') \in \Theta_\gamma$ для произвольных чисел $\zeta, \xi \geq 0$. Из определения (4) множеств Θ_γ и из предположения о справедливости оценок (3) имеем

$$\|(R(\lambda, \alpha A_\gamma - \beta I))^m\| \leq M(\operatorname{Re} \lambda)^{-m}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

привсех $(\alpha, \beta) \in \Theta_\gamma$. Отсюда и из [8, теорема 12.3.1] получаем, что $\|\exp(\alpha A_\gamma - \beta I)\| \leq M$, $(\alpha, \beta) \in \Theta_\gamma$. Эти неравенства, включение $(0, 0) \in \Theta_\gamma$ и требование коммутруемости операторов $A_1, \dots, A_n$ показывают, что новая норма $\|\cdot\|_*$, заданная равенством

$$\|x\|_* := \sup_{(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \in \Theta_\gamma, \gamma=1, \dots, n} \left\| \exp \left(\sum_{\gamma=1}^n \alpha_\gamma A_\gamma - \beta_\gamma I \right) x \right\|,$$

эквивалентна исходной и $\|x\| \leq \|x\|_* \leq M^n \|x\|$, $x \in B$. Воспользовавшись тем, что каждое из множеств Θ_γ является конусом, коммутруемостью операторов A_γ и определением нормы $\|\cdot\|_*$, имеем $\|\exp(\alpha A_\gamma - \beta I)t\|_* \leq 1$, $t \geq 0$, для всех пар $(\alpha, \beta) \in \Theta_\gamma$. Поэтому согласно [2, теорема 2.1] числовой образ $W(\alpha A_\gamma - \beta I, \|\cdot\|_*)$ лежит в полуплоскости $\{\omega : \operatorname{Re} \omega \leq 0\}$, как только $(\alpha, \beta) \in \Theta_\gamma$, а значит, числовой образ $W(A_\gamma, \|\cdot\|_*)$ лежит в пересечении полуплоскостей $\{\omega : \operatorname{Re}(\alpha\omega - \beta) \leq 0\}$, для которых $(\alpha, \beta) \in \Theta_\gamma$. Отсюда из определения (4) множеств Θ_γ и из теоремы Минковского [4, с. 13] получаем включения (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если исходное пространство является гильбертовым, а для коммутирующих операторов $A_1, \dots, A_n$ справедливы оценки (3), то они не гарантируют существования гильбертовой нормы $\|\cdot\|_*$, в которой выполнены включения (2). Покажем это в случае $n = 1$ и множества $\Omega = \Psi_1(0) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. В работе [9] установлено существование такого оператора A , действующего в гильбертовом пространстве и не подобного сжатию, что $\|A^k\| \leq c$, $k = 1, 2, \dots$. Значит, для A справедливы оценки (3) с $\Omega = \Psi_1(0)$. Предположим теперь существование такой гильбертовой нормы $\|\cdot\|_*$, эквивалентной исходной, что в ней выполнено включение (2) с $\Omega = \Psi_1(0)$. Поэтому числовой радиус оператора A не превосходит единицы. Отсюда согласно [10, следствие II.8.2] заключаем, что оператор A подобен сжатию в гильбертовой норме $\|\cdot\|_*$, тем самым, A подобен сжатию и в исходной норме. Это заключение противоречит выбору A .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае банахова пространства теорема 1 выводится из теоремы 2. Для этого достаточно воспользоваться представлением

$$(R(\lambda, A_\gamma))^m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\gamma} (\mu - \lambda)^{-m} R(\mu, A_\gamma) d\mu,$$

где каждый из гладких замкнутых контуров Γ_γ выбирается так, что его внутренняя часть содержит спектр оператора A_γ , а сам контур Γ_γ лежит в ε -окрестности спектра оператора A_γ , $\gamma = 1, \dots, n$.

В связи с теоремой 2 и замечанием 2 возникают две задачи.

ЗАДАЧА 1. При каких дополнительных условиях справедлива теорема 2 для бесконечного числа коммутирующих операторов A_γ , действующих в банаховом пространстве?

ЗАДАЧА 2. Найти необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять оператор A , действующий в гильбертовом пространстве, чтобы существовала такая гильбертова норма $\|\cdot\|_*$, эквивалентная исходной, для которой $W(A, \|\cdot\|_*) \subseteq \Omega$, где Ω – заданное замкнутое выпуклое множество, содержащее спектр оператора A . Аналогичная задача возникает и для семейства коммутирующих операторов A_γ , действующих в гильбертовом пространстве.

Обе эти задачи интересно решить и в частной их постановке, а именно, когда множества $\Omega_\gamma = \text{conv } \sigma(A_\gamma)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lumer G. // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 100. P. 29–43. 2. Lumer G., Phillips R. S. // Pacific J. Math. 1961. V. 11. P. 679–698. 3. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 4. Тихомиров В. М. Выпуклый анализ // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 14. М.: ВИНТИ, 1987. С. 5–101. 5. Hildebrandt S. // Math. Ann. 1966. V. 163. P. 230–247. 6. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 7. Маркус А. С. // Матем. сб. 1966. Т. 70. № 4. С. 526–561. 8. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962. 9. Foguel S. R. // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 788–790. 10. Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.

Институт гидромеханики НАН Украины
Институт математики НАН Украины
E-mail: amg@ihm.kiev.ua

Поступило
25.06.97