Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, О растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 792–795

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:26:56

О РАСТУЩИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Коньков

Рассматриваются решения уравнений порядка $m \geq 2$ вида

$$w^{(m)} = Q(r, w, \dots, w^{(m-1)}), \quad (1)$$

удовлетворяющие условию

$$w^{(m-i)}(r_*) > \frac{t_*}{(i-1)!} r_*^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где $r_* \in (0, \infty)$, $t_* \in (0, \infty)$ – некоторые вещественные числа, Q – функция из класса Каратеодори $K_{\text{loc}}([r_*, \infty) \times \mathbb{R}^m)$ [1, с. 9] такая, что для некоторого $k \in \{0, \dots, m-2\}$ на множестве

$$\left\{ (r, t_0, \dots, t_{m-1}) : r \geq r_*, t_{m-i} \geq \frac{t_*}{(i-1)!} r^{i-1}, i = 1, \dots, m \right\}$$

выполнено неравенство

$$Q(r, t_0, \dots, t_{m-1}) \geq p(r)g(t_k),$$

где $p \in L_{\text{loc}}([r_*, \infty))$, $g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция, причем $p(r) \geq 0$ при $r \geq r_*$ и $g(t) \geq g(\tau)$ при $t \geq \tau > 0$.

Всюду по умолчанию будем считать, что $\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – не равная тождественно нулю монотонно не убывающая функция.

Для всякого вещественного числа α определим функцию $N_{\alpha, \infty}$ равенством

$$N_{\alpha, \infty}(s) = \int_1^s \eta(t) g^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt.$$

Пусть

$$\int_1^\infty \eta(t) g^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt < \infty. \quad (3)$$

Положим

$$N_{\alpha, 0}(s) = \int_s^\infty \eta(t) g^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt.$$

Под $N_{\alpha, \infty}^{-1}$ и $N_{\alpha, 0}^{-1}$ будем соответственно подразумевать функции, обратные к $N_{\alpha, \infty}$ и $N_{\alpha, 0}$.

Наконец, для всякого вещественного числа $\sigma > 1$ обозначим

$$p_\sigma(r) = \operatorname{ess\,inf}_{r/\sigma \leq \xi \leq \sigma r} p(\xi).$$

Эта заметка является логическим продолжением работ [2] и [3], в которых также рассматривались уравнения вида (1), но при несколько иных предположениях относительно Q . Ниже изучается следующая проблема: при каких условиях на функции p и g всякое непродолжаемое решение (1), (2) является сингулярным второго рода [1, с. 262]. В случае, когда у (1), (2) существуют правильные решения, приводятся оценки для k -й производной этих решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-0100653.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < \sigma$ и имеют место соотношения

$$\int_1^\infty \eta(t) g^{-1/(m-k)}(t) t^{1/(m-k)-1} dt < \infty, \quad (4)$$

$$\int_{r_*}^\infty \eta\left(\frac{t_*}{(m-k-1)!} \xi^{m-k-1}\right) p_\sigma^{1/(m-k)}(\xi) d\xi = \infty. \quad (5)$$

Тогда всякое непродолжаемое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), является неколеблущимся сингулярным решением второго рода.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < \sigma$, $b \in (0, t_*/(m-k-1)!)$ и

$$\int_{r_*}^\infty \eta(b\xi^{m-k-1}) p_\sigma^{1/(m-k)}(\xi) d\xi = \infty. \quad (6)$$

Тогда найдутся постоянные $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от σ , m , t_*/b , такие, что для всякого правильного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$w^{(k)}(r) \geq AN_{1/(m-k), \infty}^{-1} \left(B \int_{r_*}^r \eta(b\xi^{m-k-1}) p_\sigma^{1/(m-k)}(\xi) d\xi \right).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha \in (0, 1/(m-k))$, $b \in (0, t_*/(m-k-1)!)$ и

$$\int_{r_*}^\infty \xi^{\alpha(m-k)-1} \eta(b\xi^{m-k-1}) p^\alpha(\xi) d\xi = \infty.$$

Тогда найдутся постоянные $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от α , m , t_*/b , такие, что для всякого правильного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$w^{(k)}(r) \geq AN_{\alpha, \infty}^{-1} \left(B \int_{r_*}^r \xi^{\alpha(m-k)-1} \eta(b\xi^{m-k-1}) p^\alpha(\xi) d\xi \right). \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно показать [4], что если у уравнения (1) существует правильное решение, удовлетворяющее условию (2), и при этом для некоторого $\alpha \in (0, 1/(m-k))$

$$\int_{r_*}^\infty \xi^{\alpha(m-k)-1} \eta\left(\frac{t_*}{(m-k-1)!} \xi^{m-k-1}\right) p^\alpha(\xi) d\xi = \infty,$$

то

$$\int_1^\infty \eta(t) g^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt = \infty.$$

Поэтому существует пара окрестностей бесконечно удаленной точки, между которыми отображение $N_{\alpha, \infty}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие. Тем самым, правая часть (7) корректно определена.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < \sigma$, $b \in (0, t_*/(m-k-1)!)$, имеет место (4) и

$$\int_{r_*}^{\infty} \eta(b\xi^{m-k-1})p_{\sigma}^{1/(m-k)}(\xi) d\xi < \infty.$$

Тогда найдутся постоянные $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от σ , m , t_*/b , такие, что для всякого правильного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$w^{(k)}(r) \leq AN_{1/(m-k),0}^{-1} \left(B \int_r^{\infty} \eta(b\xi^{m-k-1})p_{\sigma}^{1/(m-k)}(\xi) d\xi \right).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha \in (0, 1/(m-k))$, $b \in (0, t_*/(m-k-1)!)$, имеет место (3) и

$$\int_{r_*}^{\infty} \xi^{\alpha(m-k)-1} \eta(b\xi^{m-k-1})p^{\alpha}(\xi) d\xi < \infty.$$

Тогда найдутся постоянные $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от α , m , t_*/b , такие, что для всякого правильного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$w^{(k)}(r) \leq AN_{\alpha,0}^{-1} \left(B \int_r^{\infty} \xi^{\alpha(m-k)-1} \eta(b\xi^{m-k-1})p^{\alpha}(\xi) d\xi \right).$$

ТЕОРЕМА 6. Предположим, что p не возрастает, $b \in (0, t_*/(m-k-1)!)$ и

$$\int_{r_*}^{\infty} \eta(b\xi^{m-k-1})p^{1/(m-k)}(\xi) d\xi = \infty.$$

Тогда найдутся постоянные $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от m , t_*/b , такие, что для всякого правильного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$w^{(k)}(r) \geq AN_{1/(m-k),\infty}^{-1} \left(B \int_{r_*}^r \eta(b\xi^{m-k-1})p^{1/(m-k)}(\xi) d\xi \right).$$

ТЕОРЕМА 7. Предположим, что p не возрастает, $b \in (0, t_*/(m-k-1)!)$, имеет место (4) и

$$\int_{r_*}^{\infty} \eta(b\xi^{m-k-1})p^{1/(m-k)}(\xi) d\xi < \infty.$$

Тогда найдутся постоянные $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от m , t_*/b , такие, что для всякого правильного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$w^{(k)}(r) \leq AN_{1/(m-k),0}^{-1} \left(B \int_r^{\infty} \eta(b\xi^{m-k-1})p^{1/(m-k)}(\xi) d\xi \right). \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть для любого $\tau_* > 0$ найдется функция $Q^* \in L_{\text{loc}}([r_*, \infty))$ такая, что $Q(r, t_0, \dots, t_{m-1}) \geq Q^*(r) \geq 0$ на множестве

$$\left\{ (r, t_0, \dots, t_{m-1}) : r \geq r_*, t_{m-i} \geq \frac{\tau_*}{(i-1)!} r^{i-1}, i = 1, \dots, m \right\}$$

и

$$\int_{r_*}^{\infty} Q^*(r) dr = \infty.$$

Тогда в теоремах 1–7 условие (2) может быть заменено на условие

$$w^{(m-i)}(r_*) > 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (9)$$

Также в теореме 1 соотношение (5) может быть заменено на соотношение (6), в котором $b \in (0, \infty)$.

Более того, в теоремах 2–7 ограничение вида $b \in (0, t_*/(m-k-1)!)$ на вещественное число b может быть ослаблено до ограничения $b \in (0, \infty)$. При этом постоянные $A > 0$, $B > 0$ в теоремах 2 и 4 будут зависеть только от σ , m , в теоремах 3 и 5 – только от α , m , а в теоремах 6 и 7 – только от m .

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение

$$w^{(m)} = a_0 e^{(1-\lambda)r} w^\lambda, \quad (10)$$

где $a_0 > 0$, $\lambda > 1$ – некоторые вещественные числа. Полагая в теореме 7 $k = 0$, $g(t) = t^\lambda$, $p(\xi) = e^{(1-\lambda)\xi}$, $\eta(\xi) = 1$, для всякого решения уравнения (10), удовлетворяющего условию (9), будем иметь при всех r из некоторой окрестности ∞

$$w(r) \leq C e^r,$$

где константа $C > 0$ зависит только от m , λ . Несложно убедиться, что функция $w(r) = a e^r$ при подходящем выборе константы $a > 0$ будет решением (10), (9).

Таким образом, в данном примере оценка (8) оказывается более точной, чем соответствующие оценки, содержащиеся в [1]–[3], [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
2. Коньков А. А. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 4. С. 616–620.
3. Коньков А. А. О поведении решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. (в печати).
4. Коньков А. А. // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 854.
5. Рабцевич В. А. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 3. С. 400–404.