Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О базисных элементах в идемпотентных подпространствах, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 796–797

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1667>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 02:49:45

О БАЗИСНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В ИДЕМПОТЕНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ

В. П. Маслов

Как показано в [1], [2], в идемпотентных конечномерных подпространствах базисные элементы $S_1, S_2, \dots, S_n$ (элементы, порождающие подпространства), в отличие от обычного анализа, единственны с точностью до перестановки, т.е. отнюдь не любой элемент подпространства

$$C_1 \odot S_1 \oplus C_2 \odot S_2 \oplus \dots \oplus C_n \odot S_n,$$

где C_i – константы, знак ‘ $\odot$ ’ означает “новое” умножение, а знак ‘ $\oplus$ ’ – “новое” сложение, может служить базисным.

Этот факт позволяет выбирать, например, лишь конечное число магистральных направлений в ряде задач математической экономики [3].

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – некоторый объем, а

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right) = E \quad (1)$$

есть уравнение Гамильтона–Якоби (Белмана), где $H(p, x) \in C^\infty$ – выпуклая по p функция, инвариантная относительно некоторой группы преобразований U :

$$UH(p, x) = H(p, x).$$

Пусть M – пространство $(\min, +)$ в Ω , т.е. “сложение” $a \oplus b = \min(a, b)$, а “умножение” $a \odot b = a + b$.

Как известно [1], если S_1 и S_2 – решения уравнения (1), то $C_1 \odot S_1 \oplus C_2 \odot S_2$ – тоже (обобщенное) решение.

ТЕОРЕМА. Пусть $S(x)$ – базисный элемент в идемпотентном подпространстве (обобщенных) уравнений (1). Тогда $US(x)$ также является базисным.

Будем говорить, что базисный элемент $S(k)$ *нормирован*, если $\min_x S(x) = 0$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение $(y')^2 = 1$ на отрезке $(-1, 1)$, инвариантное относительно инверсий $Ux = -x$. Нормированными базисными элементами будут $S_1 = x - 1$ и $S_2 = -x - 1$, так что $S_2(x) = US_1(x) = S_1(-x)$. Нетрудно видеть, что при $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ элемент $a = C_1 \odot S_1 \oplus C_2 \odot S_2 = \min(C_1 + S_1, C_2 + S_2)$ не является базисным.

Например, ни при каких C_3, C_4 элемент S_1 не равен $C_3 \odot a \oplus C_4 \odot S_2$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение

$$(y')^2 = (x^2 - 1)^2, \quad (2)$$

инвариантное относительно той же инверсии, на том же интервале. Базисные элементы имеют вид

$$S_1 = \frac{x^3}{3} - x - \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad S_2 = \frac{-x^3}{3} + x - \frac{2}{3},$$

так что $S_2(x) = US_1(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть *групповыми константами* скалярные произведения вида

$$(S(x), US(x)) = \int_{\oplus} S(x) \odot US(x) dx = \min_x (S(x) + US(x)),$$

где $S(x)$ – базисный элемент, а U – групповое преобразование, сохраняющее гамильтониан.

В первом примере $(S(x), US(x)) = -2$. Во втором примере $(S(x), US(x)) = -4/3$. Если же преобразование U переводит базисный нормированный элемент в себя, то отвечающий ему групповой станет равным 0. Пример (2) отвечает уравнению Шредингера во всем пространстве $-\infty < x < \infty$

$$-\frac{h^2}{2}y'' + (x^2 - 1)^2y = \lambda y$$

с потенциалом, имеющим две симметрические впадины (см. введение в [4]), точки $x = \pm 1$ являются точками покоя гамильтониана $H(p, x) = p^2 - (x^2 - 1)^2$, поэтому интервал в “классической” задаче (2), отвечающей нулевой “классической” энергии и $t \rightarrow it$ [4] должен быть взят от -1 до 1 .

Два самых нижних собственных значения этого уравнения λ_1 и λ_2 обладают свойством [2], [4]

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \ln(\lambda_1 - \lambda_2) = -\frac{4}{3}.$$

Мы приводим здесь лишь самые простые, но характерные примеры, иллюстрирующие приведенную теорему и определение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П., Самборский С. Н. // Докл. РАН. 1992. Т. 45. № 3. С. 682–687.
2. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном уравнении. М.: Наука, 1994.
3. Maslov V. P., Samborskii S. N. Idempotent Analysis. Adv. Soviet Math. V. 13. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1992.
4. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10.09.97