Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Тен, Топологические препятствия к интегрируемости избыточным набором интегралов, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 798–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1668>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:15:35

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ К ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ИЗБЫТОЧНЫМ НАБОРОМ ИНТЕГРАЛОВ

В. В. Тен

1. Введение. Рассмотрим компактное аналитическое многообразие (далее все объекты аналитические) M^n с римановой метрикой g_{ij} .

Риманова структура задает на фазовом пространстве T^*M^n гамильтонову динамическую систему с гамильтонианом $H = \frac{1}{2} \sum g_{ij} p^i p^j$, которая называется *геодезическим потоком*. В силу траекторной эквивалентности потока на разных уровнях энергии $\{H = \text{const}\}$ можно рассмотреть только один уровень $\{H = 1\}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Геодезический поток называется *геометрически простым*, если единичное кокасательное расслоение $P = T^*M_1^n$ представляется в виде конечного объединения

$$P = \bigsqcup_{i=1}^s B_i \sqcup \Gamma,$$

где B_i – инвариантные непересекающиеся диффеоморфные друг другу подмножества, а Γ – замкнутое инвариантное подмножество.

Понятие геометрической простоты в более сильном смысле было введено в [1]. Можно показать, что в случае аналитической интегрируемости система всегда будет геометрически простой. При этом множество Γ содержит множество особых точек набора первых интегралов.

Для доказательства используется метод, примененный И. А. Таймановым в работе [1]. Изучаются топологические препятствия к интегрированию избыточным набором интегралов. Результат получен в предположении, что почти все совместные уровни интегралов – торы. Это верно, например, в случае некоммутативной интегрируемости [2].

2. Основной результат. Ниже формулируется теорема, содержащая основной результат работы.

ТЕОРЕМА. Пусть геометрически простой геодезический поток имеет $n + k - 1$ независимых дополнительных интегралов, так что $B_i \simeq \mathbb{T}^{n-k} \times D^{n+k-1}$. Тогда первое число Бетти $b_1(M^n) \leq n - k$.

Если $k = 0$, то имеем условие полной интегрируемости. При $k = 0$ и $n = 2$ неравенство $b_1(M^n) \leq n$ получено В. В. Козловым в [3], а для $n > 2$ И. А. Таймановым [1].

В случае $n = 2$ из теоремы вытекает интересное

СЛЕДСТВИЕ. Если геодезический поток двумерного ориентируемого компактного многообразия имеет два независимых дополнительных интеграла, то это многообразие диффеоморфно сфере.

При $k = n - 2$ получим, что $b_1(M^n) \leq 1$. Можно показать, что в этом случае все траектории замкнуты. При сопоставлении с результатами, описанными Бессе [4], мы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00747.

видим очевидное их соответствие, хотя они гораздо сильнее в силу специальности примененного там аппарата.

3. Доказательство основного результата. Опишем алгебраическую конструкцию, которая нам понадобится при доказательстве теоремы. Ее смысл станет понятен ниже. Рассмотрим тройку (A, G, μ) , где A – произвольное множество, G – группа, а $\mu: G \rightarrow A \times A$ – произвольное отображение.

Построим ориентированный граф Π_0 , вершинами которого будут элементы A , а ребро (a_i, a_j) появляется в случае, если эта пара служит прообразом некоторого элемента G . Естественно определяется отображение σ из множества ребер графа Π_0 в группу G (это отображение, обратное к μ). Таким образом, мы поместили все ребра Π_0 .

Достроим Π_0 до графа Π следующим образом: если существует ребро с меткой $g \in G$, то добавим ребро с обратной ориентацией и меткой g^{-1} .

Рассмотрим на графе Π множество петель Ω . *Петлей* назовем согласованный с ориентацией путь $\gamma = \xi_1 \dots \xi_m$, где ξ_i – ребра Π , имеющий начало и конец в одной и той же вершине $a_i \in A$. Семейство петель, выходящих из a_i , обозначим через Ω_i . На множестве петель можно определить отображение σ_1 так, что $\sigma_1(\gamma) = \sigma(\xi_1) \dots \sigma(\xi_m)$. Очевидно, $\sigma_1(\Omega_i) = H_i$ является подгруппой G .

Сформулируем несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Группа G представляется в виде объединения конечного числа левых смежных классов по подгруппам H_i .*

ЛЕММА 2. *Пусть группа G представляется в виде объединения конечного числа левых смежных классов по подгруппам H_i . Тогда среди них найдется подгруппа конечного индекса.*

Перейдем к приложению изложенной конструкции, к доказательству основной теоремы.

Рассмотрим некоторую достаточно малую окрестность V произвольной точки $x_0 \in M^n$ конфигурационного многообразия. В силу определения геометрической простоты множество $L = \text{pr}^{-1} V \setminus \Gamma$ является объединением конечного числа непересекающихся связных компонент $C_1, \dots, C_r$. Выберем в каждой компоненте произвольную точку q_i .

По теореме Хопфа–Ринова, примененной к универсальной накрывающей M^n , любой элемент фундаментальной группы $\pi_1(M^n)$ может быть реализован геодезической петлей с вершиной в одной точке x_0 .

Поднимем эти петли в единичное кокасательное расслоение. Тогда их начала и концы будут лежать в прообразе V . Если некоторый путь лежит в Γ , то как угодно малым шевелением координат и импульсов он оттуда снимается.

Таким образом, можно построить множество путей, соединяющих q_i , которые при естественной проекции реализуют все элементы группы G (в C_i конец пути соединяется с q_i произвольным отрезком, лежащим внутри).

Теперь положим $A = \{q_1, \dots, q_r\}$, $G = \pi_1(M^n)$, отображение μ индуцируется отображением, обратным к проекции, примененным к реализациям элементов фундаментальной группы. В силу инвариантности B_i пути, соответствующие Ω_j ($j = 1, \dots, r$), содержатся в фундаментальной группе $\pi_1(B_i)$. По условию теоремы фундаментальная группа $\pi_1(B_i) = \pi_1(\mathbb{T}^{n-k})$. Среди таких групп найдется подгруппа конечного индекса в $\pi_1(M^n)$, обозначим соответствующую связную компоненту через B_0 .

При помощи гомоморфизма Гуревича можно перейти к рассмотрению первых гомологий вместо фундаментальных групп. Рассмотрим первую группу гомологий $H_1(B_0)$. Так как она имеет конечный индекс, проекция $\text{pr}_* : H_1(B_0) \rightarrow H_1(M^n)$ является мономорфизмом, а $\text{pr}^* : H^1(M^n) \rightarrow H^1(B_0)$ – эпиморфизмом. Из последнего следует утверждение теоремы.

Автор благодарит В. В. Козлова за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тайманов И. А. // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 2. С. 283–284. 2. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. // Функцион. анализ и его прилож. 1987. Т. 12. № 2. С. 46–56. 3. Козлов В. В. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 6. С. 1299–1302. 4. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vvten@nw.math.msu.su

Поступило
20.05.97