Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, С. А. Богатый, О препятствиях к продолжению
частичных отображений, *Матем. заметки*, 1997, том 62,
выпуск 6, 803–812

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:24:38

УДК 515.1

О ПРЕПЯТСТВИЯХ К ПРОДОЛЖЕНИЮ ЧАСТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. М. Агеев, С. А. Богатый

Одной из важнейших задач топологии является минимизация (в том или ином смысле) препятствия к продолжению частичного отображения $Z \hookrightarrow A \xrightarrow{f} X$, т.е. такого подмножества $F \subset Z \setminus A$, на дополнении к которому существует глобальное продолжение f . Показано, что если фиксировать метрическое пространство Z , $\dim Z \leq n$, и числа $p, q \geq -1$, то препятствия ко всем частичным отображениям $Z \hookrightarrow A \xrightarrow{f} X \in LC^p \cap C^q$ можно сосредоточить в наперед выбранных достаточно тощих подмножествах Z .

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Пусть на замкнутом подмножестве A метрического пространства Z задано отображение $f: A \rightarrow X$ в метрическое пространство X . Подмножество $F \subset Z \setminus A$ называется *препятствием к продолжению частичного отображения* $Z \hookrightarrow A \xrightarrow{f} X$, если существует продолжение $\hat{f}: Z \setminus F \rightarrow X$, $\hat{f}|_A = f$, отображения f на $Z \setminus F$. Одной из важнейших задач топологии является минимизация (в том или ином смысле) препятствия к продолжению f . Так классическая теорема Куратовского–Дугунджи [1] утверждает, что $\dim F = -1$ (т.е. препятствие пусто), если $\dim(Z \setminus A) \leq n$, а X является связным и локально связным в размерности $n - 1$ (кратко $X \in C^{n-1} \cap LC^{n-1}$). Определение связности и локальной связности в данной размерности можно найти в любом учебнике по теории ретрактов и гомотопий, например, в [2]. Если же потребовать от X связности в меньшей размерности q (т.е. $X \in C^q \cap LC^{n-1}$), то препятствие становится, вообще говоря, неустранимым. Однако, его всегда можно выбрать замкнутым в Z и имеющим размерность не более $n - q - 2$ (теорема Эйленберга–Борсука [3], [4]). При одновременном уменьшении связности и локальной связности X , $X \in C^q \cap LC^p$, где $q, p < n - 1$, появляется еще одна компонента препятствия $F = F_1 \cup F_2$, причем F_1 замкнуто в $Z \setminus A$, F_2 замкнуто в Z , а $\dim F_1 \leq n - p - 2$, $\dim F_2 \leq n - q - 2$ (теорема Богатого [5]). Если в этой теореме $p = q = -1$ (т.е. X – произвольное метрическое пространство), то препятствие для продолжения частичного отображения имеет размерность меньшую n и замкнуто лежит в $Z \setminus A$ (теорема Левшенко [6]). Имеются результаты [7] о препятствиях к продолжению сечений многозначных полунепрерывных снизу отображений.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда, грант NFU000, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-1402.

Большой интерес представляет вопрос о существовании замкнутых ретракций пространства Z . Р. Энгелькинг [8] положительно ответил на него для нульмерных метрических пространств Z и их замкнутых подпространств $A \subset Z$. В работе [5] теоремы Энгелькинга и Левшенко были объединены: любое частичное замкнутое отображение f имеет замкнутое в $Z \setminus A$ ($\dim Z - 1$)-мерное препятствие $F \subset Z \setminus A$ для продолжения его до замкнутого отображения.

Оказывается, что приведенные выше теоремы, а также некоторые другие, допускают существенное уточнение. Так, например, если фиксировать метрическое пространство Z , $\dim Z \leq n$, и числа $p, q \geq -1$, то препятствие ко всем частичным отображениям $Z \hookrightarrow A \xrightarrow{\varphi} X \in \text{LC}^p \cap \text{C}^q$ можно сосредоточить в наперед выбранных достаточно тощих подмножествах Z . Для точной формулировки этого и других доказываемых в статье фактов зафиксируем замкнутую и не более чем $(n + 1)$ -кратную сюръекцию $\eta: W \rightarrow Z$ из нульмерного метрического пространства W на Z (называемую резольвентой Мориты [9]) и построим возрастающую цепочку F_σ -множеств $\Phi_{n+2} \subset \Phi_{n+1} \subset \dots \subset \Phi_1 = Z$, $\dim \Phi_k = n + 1 - k$ (называемую фильтрацией, порожденной резольвентой Мориты, или просто фильтрацией Мориты):

$$\Phi_p = \{z \in Z \mid |\eta^{-1}(x)| \geq p\}.$$

Все описанные выше свойства этой фильтрации будут доказаны в предложении 6.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого частичного отображения $Z \hookrightarrow A \xrightarrow{\varphi} X$ n -мерного метрического пространства Z в метрическое $(\text{LC}^p \cap \text{C}^q)$ -пространство X , где p и q меньше n , существуют два множества $F_1 \subset \Phi_{p+3}$, $F_2 \subset \Phi_{q+3}$, лежащих в $Z \setminus A$, первое из которых замкнуто в $Z \setminus A$, а второе замкнуто в Z , таких, что отображение φ может быть продолжено в дополнение к ним, т.е. в $Z \setminus (F_1 \cup F_2)$.*

Отметим, что теорема 1 имеет доказательство значительно более простое и наглядное, как нам кажется, по сравнению с оригинальными доказательствами теорем Эйленберга–Борсука и Богатого. Существенно новым моментом является использование резольвенты Мориты не только в формулировке теоремы, но и в ее доказательстве.

Известно [2], что близкие отображения n -мерного метрического пространства Y в LC^n -пространство X соединяются достаточно мелкой гомотопией. Следующая теорема учитывает ухудшение связностных свойств пространства X , из-за чего появляется неустранимое препятствие F , лежащее в произведении $Y \times (0, 1)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть заданы метрическое LC^p -пространство X , $p \leq n$, и метрическое n -мерное пространство $Z = Y \times [0, 1]$. Тогда для любого открытого покрытия $\alpha \in \text{cov } X$ существует открытое покрытие $\beta \in \text{cov } X$ такое, что для любых β -близких отображений $f, g: Y \rightarrow X$ существует замкнутое в $Y \times (0, 1)$ множество $F \subset \Phi_{p+3}$, а также отображение $H: Z \setminus F \rightarrow X$ (называемое “дыривой” гомотопией), соединяющее f и g , $H|_{(Y \times \{0\})} = f$, $H|_{(Y \times \{1\})} = g$, и ограниченное покрытием α , т.е.*

$$\{H((y \times [0, 1]) \setminus F) \mid y \in Y\} \succ \alpha.$$

Теорема 3 гарантирует, что все препятствия к продолжению частичных замкнутых отображений до замкнутых отображений лежат в элементе Φ_2 фильтрации Мориты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{s} X$ есть частичное замкнутое отображение n -мерного метрического пространства Z в метрическое пространство X . Тогда существует замкнутое в $Z \setminus A$ множество $F \subset \Phi_2$ такое, что φ может быть продолжено до замкнутого отображения $\varphi: Z \setminus F \rightarrow X$.

Классическая конечномерная теорема Е. Майкла [10], [11] о селекции имеет дело с продолжением частичной селекции (селекцией многозначного отображения φ называется однозначное непрерывное отображение s , для которого $s(a) \in \varphi(a)$ для всех $a \in A$) $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{s} X$ многозначного полунепрерывного отображения $\varphi: Z \rightarrow X$, у которого $\varphi(z) \in LC^{n-1} \cap C^{n-1}$, а семейство $\{\varphi(z) \mid z \in Z\}$ замкнутых подмножеств в X равномерно локально связно в размерностях, не превосходящих $n - 1$ (краткое обозначение: $\{\varphi(z) \mid z \in Z\} \in \text{equi} - LC^{n-1}$). В работе [7] были проанализированы последствия ухудшения связностных свойств X . В частности, было доказано, что если Z есть метрическое n -мерное пространство, а $\varphi(z) \in LC^{n-1} \cap C^q$, $\{\varphi(z) \mid z \in Z\} \in \text{equi} - LC^{n-1}$, то появляется замкнутое препятствие F , $\dim F \leq n - q - 2$, к продолжению сечения s . В теореме 4 утверждается, что все препятствия могут быть сосредоточены в элементе Φ_{q+3} фильтрации Мориты.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (Z, d) есть метрическое n -мерное пространство, $\varphi: Z \rightarrow X$ есть однозначное полунепрерывное снизу многозначное отображение, для которого $\varphi(z) \in LC^{n-1} \cap C^q$ для всех $z \in Z$, а семейство $\{\varphi(z) \mid z \in Z\} \in \text{equi} - LC^{n-1}$. Тогда для любой частичной селекции $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{s} X$ отображения φ существуют замкнутое в Z множество $F \subset \Phi_{q+3} \setminus A$ и селекция $\hat{s}: Z \setminus F \rightarrow X$, являющаяся продолжением селекции s .

Доказательная часть статьи будет построена следующим образом. После введения предварительных понятий и сведений будет дано подробное доказательство теоремы 1. Из-за ограниченности объема работы доказательства оставшихся теорем не будут приводиться. Однако, заинтересованный читатель найдет здесь все необходимое для их восстановления.

Недавно А. Н. Дранишников [12] получил весьма важное обобщение теоремы Эйленберга–Борсука. С ее помощью ему удалось найти эффективные решения нескольких проблем гомологической теории. Напомним, что для сепарабельных метрических пространств $\dim Z \leq n$ тогда и только тогда, когда $Z \in \text{AE}(S^n)$ (т.е. любое частичное отображение $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} S^n$ имеет глобальное продолжение $f: Z \rightarrow S^n$). Воспользовавшись также совпадением сферы S^{n+m+1} и джойна $S^n * S^m$ сфер S^n и S^m , частный случай теоремы Эйленберга–Борсука ($X = S^n$) можно переформулировать так:

если $Z \in \text{AE}(S^n * S^m)$, то для любого частичного отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} S^n$ имеется препятствие $F \subset Z \setminus A$, $F \in \text{AE}(S^m)$.

Обобщение Дранишникова заключается в замене сфер S^n и S^m на произвольные счетные CW-комплексы K и L соответственно:

если $Z \in \text{AE}(K * L)$, то для любого частичного отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} K$ имеется препятствие $F \subset Z \setminus A$, $F \in \text{AE}(L)$.

ВОПРОС. Верно ли, что все препятствия F можно сосредоточить в некотором множестве $\Phi \in \text{AE}(L)$? Точнее, если $Z \in \text{AE}(K * L)$, то существует ли такое множество $\Phi \subset Z$, $\Phi \in \text{AE}(L)$, что для любого частичного отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} K$ имеется препятствие $F \subset (Z \setminus A) \cap \Phi$, $F \in \text{AE}(L)$?

2. Предварительные понятия и сведения. В теории продолжений частичных отображений большую роль играют критерии абсолютных окрестностных экстензоров, основывающиеся на понятии реализации полиэдров (условия Лефшеца). И в нашем изложении модифицированный критерий Лефшеца также будет играть первостепенную роль, позволяя избегать достаточно обременительной конструкции присоединенного пространства. Мы позволим себе назвать вводимый ниже в предложении 2 принцип продолжения отображений именем Лефшеца.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть α есть система открытых множеств пространства X (под пространствами мы будем понимать только метрические пространства, под отображениями – только непрерывные отображения), $\mathfrak{N}_0$ есть подполиэдр полиэдра $\mathfrak{N}$, содержащий все его вершины. Частичной α -реализацией полиэдра $\mathfrak{N}$ (или α -реализацией) назовем отображение $\mathfrak{N}_0 \xrightarrow{f} X$ такое, что для любого симплекса $\Delta \in \mathfrak{N}$ множество $f(\Delta \cap \mathfrak{N}_0)$ содержится в некотором элементе $V \in \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство X обладает свойством Лефшеца Lf^p , $p \leq \infty$, если для любого покрытия $\delta \in \text{cov } X$ (под покрытием пространств мы будем понимать открытые, необязательно локально конечные, покрытия; все основные понятия, связанные с покрытиями, можно найти, например, в [9]) существует покрытие $\gamma \in \text{cov } X$ такое, что для любой частичной γ -реализации $\mathfrak{N} \leftarrow \mathfrak{N}_0 \xrightarrow{f} X$ полиэдра $\mathfrak{N}$ размерности не больше $p + 1$ существует δ -реализация $\hat{f}: \mathfrak{N} \rightarrow X$, продолжающая f , $\hat{f}|_{\mathfrak{N}_0} = f$.

Зависимость γ от δ будем записывать так: $\gamma = \text{Lf}^p(\delta)$. Известно, что метрическое пространство X обладает свойством Лефшеца Lf^∞ тогда и только тогда, когда X есть абсолютный окрестностный экстензор ANE [2]. Менее известен следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [2]. Если $p < \infty$, то метрическое пространство X является локально связным в размерности p тогда и только тогда, когда X обладает свойством Лефшеца в той же размерности.

Наконец, приведем обещанный принцип продолжения Лефшеца. Идея его доказательства фактически имеется в [2, с. 156], поэтому мы его опускаем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (принцип Лефшеца). Пусть $X \in \text{Lf}^n$, $n \leq \infty$, и задана последовательность $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ открытых покрытий X , для которых каждое последующее σ_{k+1} вписано в предыдущее σ_k (обозначается $\sigma_{k+1} \succ \sigma_k$) и $\sigma_{k+1} = \text{Lf}^n(\sigma_k)$. Пусть также $(\mathfrak{N}, L)$ есть полиэдр (в слабой топологии), в котором выделены

- а) последовательность подполиэдров $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{N}_m \supset \dots$ относительно триангуляции L , для которой открытая звезда $\text{St}_0(\mathfrak{N}_{m+1})$ лежит в $\mathfrak{N}_m$;
- б) частичное отображение $\mathfrak{N} \leftarrow \mathfrak{N}^{(0)} \xrightarrow{\varphi} X$, заданное на нульмерном остове полиэдра $\mathfrak{N}$, ограничение которого на $\mathfrak{N}_m^{(0)}$ является σ_{m+2} -реализацией.

Тогда существует продолжение отображения φ на $(n + 1)$ -мерный остов $\hat{\varphi}: \mathfrak{N}^{(n+1)} \rightarrow X$, для которого ограничение $\hat{\varphi}|_{(\mathfrak{N}_m^{(n+1)})}$ является σ_m -реализацией.

Важность и полезность сформулированного принципа проявляется в соединении с понятиями примыкающего покрытия и канонического отображения, как будет видно из дальнейшего. Остановимся на этих понятиях более подробно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Покрытие $\omega \in \text{cov}(Z \setminus A)$ *примыкает* к замкнутому подмножеству A , если выполняется одно из двух эквивалентных условий:

- 1) диаметры элементов $U_n \in \omega$ стремятся к 0 всякий раз, как только для некоторой точки $a \in A$ имеет место сходимость расстояний $\rho(a, U_n) \rightarrow 0$;
- 2) для любой точки $a \in A$ и любой ее окрестности $U(a)$ существует окрестность $V(a)$ такая, что *звезда* множества V относительно покрытия ω , обозначаемая через $N(V, \omega) = \bigcup \{W \in \omega \mid A \cap W \neq \emptyset\}$, содержится в U .

Как показано в [1], [2], примыкающее покрытие всегда существует. Кроме понятия примыкающего покрытия чрезвычайно полезны понятия примыкающего отображения и примыкающей последовательности окрестностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Отображение $\beta: \mathfrak{N}(\omega)^{(0)} \rightarrow A$ нульмерного остова $\mathfrak{N}(\omega)^{(0)}$ нерва покрытия ω (понятие *нерва* $\mathfrak{N}(\omega)$ покрытия общеизвестно [1], [2]; симплекс, порожденный элементами $W_0, W_1, \dots, W_t$, имеющими непустое пересечение, мы будем обозначать через $\langle W_0, W_1, \dots, W_t \rangle$), примыкающего к A , называется *примыкающим*, если для любой точки $a \in A$ и любой ее окрестности $U(a) \subset Z$ существует окрестность $V(a) \subset Z$ такая, что если $W \cap V(a) \neq \emptyset$ для элемента $W \in \omega$, то $\beta\langle W \rangle \in U(a)$.

Пусть уже заданы примыкающие к A покрытие ω и отображение β .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Убывающая последовательность окрестностей U_n множества A называется *примыкающей*, если выполняются следующие свойства:

- 3) $\text{cl}(U_{n+1}) \subset U_n$;
- 4) если $W \in \omega$ и $W \cap U_n \neq \emptyset$, то $\text{diam } W < 1/n$ и $\rho(\beta\langle W \rangle, W) < 1/n$.

Фактически в [1], [2] устанавливается существование примыкающих покрытий, отображений и последовательности окрестностей для любого замкнутого подмножества A метрического пространства Z . Однако, для доказательства теоремы 3 понадобится более точный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого замкнутого подмножества A метрического пространства Z существуют примыкающие к A покрытие $\omega \in \text{cov}(Z \setminus A)$, отображение $\beta: \mathfrak{N}(\omega)^{(0)} \rightarrow A$ и последовательность окрестностей U_n , для которых выполнено свойство:

- в) если для последовательности элементов $W_n \in \omega$ точки $\beta\langle W_n \rangle \in A$ являются различными, а последовательность $\{\beta\langle W_n \rangle\}$ сходится к некоторой точке $a \in A$, то для любой ее окрестности $U_m \ni a$ почти все элементы W_n с ней пересекаются (и, следовательно, $\lim \text{diam } W_n = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $\text{diam } Z < 1$. Зафиксируем последовательность локально конечных покрытий $\omega_n \in \text{cov } A$, для которых $\omega_1 = \{A\}$, каждое последующее покрытие звездно вписано в предыдущее, а калибр $\text{cal } \omega_n < 1/n$. Выберем подобное продолжение покрытия ω_n до системы μ_n открытых в Z множеств так, чтобы $\mu_1 = \{Z\}$, каждая последующая система была звездно вписана в предыдущую, а $\text{cal } \mu_n < 1/2$. Система $\mu = \{\tilde{H}_\mu\}$ открытых множеств в Z является *подобным продолжением* покрытия $\omega = \{H_\mu\} \in \text{cov } A$, если

- 1) $\tilde{H}_\mu \supset H_\mu$;
- 2) из $\bigcap \tilde{H}_{\mu_i} \neq \emptyset$ следует, что $\bigcap H_{\mu_i} \neq \emptyset$.

Возможность такого подобного продолжения следует из [2]. Число $\sup\{\text{diam } W \mid W \in \mu\}$ называется *калибром* покрытия μ и обозначается через $\text{cal } \mu$. Не теряя общности, можно считать, что тела U_n систем μ_n таковы, что $\text{cl}(U_{n+1}) \subset U_n$, а $\bigcap U_n = A$.

В качестве искомого покрытия $\omega \in \text{cov}(Z \setminus A)$ возьмем любое покрытие $\{W\}$, удовлетворяющее следующему свойству:

- г) для любого элемента $W \in \omega$ существует число n такое, что $W \subset U_{n-1} \setminus U_{n+1}$, $W \cap U_n \neq \emptyset$, и $W \subset S$ для некоторого элемента $S \in \mu_{n-1}$.

Отсюда видно, что $\text{diam } W < 1/n - 1$, как только $W \cap U_n \neq \emptyset$, и, следовательно, покрытие ω будет примыкающим к A .

Каждому элементу $S \in \mu_n$ сопоставим точку $a_S \in S \cap A \neq \emptyset$. Тогда отображение $\beta: \mathfrak{N}(\omega)^{(0)} \rightarrow A$ зададим формулой $\beta\langle W \rangle = a_S$, где $W \subset U_{n-1} \setminus U_{n+1}$, а $W \subset S \in \mu_n$.

Очевидно, что $\rho(\beta\langle W \rangle, W) < 1/(n-1)$, как только $W \cap U_n \neq \emptyset$ для $W \in \omega$, и, следовательно, отображение β и последовательность окрестностей U_n также будут примыкающими к A .

Проверим, что для построенных объектов выполняется свойство а). Предположим противное, т.е. существуют элементы $W_i \in \omega$, для которых выполнены одновременно следующие соотношения: $W_i \subset U_{n_i-1} \setminus U_{n_i+1}$; $W_i \subset S_i \in \mu_{n_i-1}$; все точки $\beta\langle W_i \rangle = a_{S_i}$ различны, $a_{S_i} \rightarrow a \in A$, однако все n_i меньше некоторого числа p .

Воспользовавшись локальной конечностью покрытий ω_i , найдем окрестность $O(a)$, для которой множество $\mathfrak{M}$ элементов $\{S \in \mu_i \mid i \leq p, S \cap O(a) \cap A \neq \emptyset\}$ конечно. Так как почти все элементы S_i принадлежат этому множеству, то их число конечно. Однако, все точки a_{S_i} различны, значит и все элементы S_i различны и, следовательно, число различных элементов S_i счетно. Противоречие.

Важность и полезность введенных понятий становится очевидной в сочетании с понятием канонического отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Отображение $\theta: Z \rightarrow \mathfrak{N}(\omega)$ в нерв покрытия $\omega \in \text{cov } Z$ называется *каноническим*, если прообраз $\theta^{-1}(\text{St}_0\langle W \rangle)$ открытой звезды вершины $\langle W \rangle$, соответствующей элементу $W \in \omega$, относительно естественной триангуляции полиэдра $\mathfrak{N}(\omega)$ лежит в W .

Прежде всего отметим, что в случае локально конечных покрытий канонические отображения всегда существуют [1], [2], а существование таких отображений в случае произвольных покрытий легко следует из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если симплициальное отображение $\pi: \mathfrak{N}(\sigma) \rightarrow \mathfrak{N}(\omega)$ нервов покрытий порождено вписанностью локально конечного покрытия $\sigma \in \text{cov } Z$ в покрытие ω , то композиция канонического отображения $\theta: Z \rightarrow \mathfrak{N}(\sigma)$ с отображением π также есть отображение каноническое.

Сразу же отметим используемое далее свойство канонического отображения θ :

- д) если образ точки $z \in Z$ есть вершина $\langle W \rangle$, то $z \in W$.

Следующее предложение является решающим в доказательстве теоремы 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть заданы примыкающие к A покрытие $\omega \in \text{cov}(Z \setminus A)$, отображение $\beta: \mathfrak{N}(\omega)^{(0)} \rightarrow A$, последовательность окрестностей U_n , удовлетворяющая свойству в) из предложения 3, а также каноническое отображение $\theta: Z \setminus A \rightarrow \mathfrak{N}(\omega)$. Если подмножество $B \subset Z$ таково, что $\theta(B) \subset \mathfrak{N}(\omega)^{(0)}$, то отображение $h: A \cup B \rightarrow A$, $h \upharpoonright A = \text{Id}_A$, $h \upharpoonright B = \beta \circ \theta$, является замкнутым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположение о том, что отображение h не является замкнутым влечет существование замкнутого множества $F \subset A \cup B$ и последовательности $f_n \in F$, для которой последовательность $\{h(f_n)\}$, состоящая из различных точек, сходится к некоторой точке $a \in A$, не принадлежащей $h(F)$. Так как $h \upharpoonright A = \text{Id}_A$, можно предполагать, что все $f_n \in F \setminus A$ и $h(f_n) = \beta \circ \theta(f_n)$.

Воспользуемся предложением 4. Тогда для любой окрестности U_m почти все элементы $W_n \in \omega$, $\langle W_n \rangle = \theta(f_n)$, с ней пересекаются. В силу определения примыкаемости последовательности окрестностей U_m следует, что $\rho(\beta(\theta(f_n)), W_n) < 1/m$, $\text{diam } W_n < 1/m$ для почти всех n . В итоге мы имеем $\lim \rho(a, W_n) \rightarrow 0$. Так как $\theta(f_n) = \langle W_n \rangle$, из д) следует, что $f_n \in W_n$. Поэтому $\lim f_n = a$ принадлежит F . Следовательно, $a \in F \cap A \subset h(F)$. Получили противоречие.

Теперь вернемся к установлению свойств фильтрации Мориты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть задана не более чем $(n+1)$ -кратная замкнутая сюръекция $\eta: W \rightarrow Z$ из нульмерного метрического пространства W на n -мерное пространство Z . Тогда множество $\Phi_p = \{z \in Z \mid |\eta^{-1}(x)| \geq p\}$ является F_σ -множеством размерности $\dim \Phi_p = n+1-p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\dim \Phi_p = n+1-p$ и Φ_p есть F_σ -множество. Для этого рассмотрим открыто-замкнутое покрытие $\xi = \{H_\mu\}$ пространства W кратности 1. Тогда $\zeta = \eta(\xi)$ будет замкнутым локально конечным покрытием Z кратности не более $n+1$. Полагаем $E_p(\xi) = \{z \in Z \mid \text{кр.}(\zeta) \geq p\}$. Легко устанавливается, что $E_p(\xi)$ есть замкнутое подмножество в Z и $\dim E_p(\xi) \leq n+1-p$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{k+1} \succ \xi_k$, есть последовательность открыто-замкнутых покрытий W кратности 1, имеющих $\lim \text{cal } \xi_n = 0$. Тогда легко проверить, что $\Phi_p = \bigcup_i E_p(\xi_i)$ есть F_σ -множество размерности не более $n+1-p$.

3. Доказательство теоремы 1. Наконец, займемся продолжением частичного отображения $Z \leftarrow A \xrightarrow{\varphi} X \in \text{LC}^p \cap \text{C}^q$. Зафиксируем последовательность $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ открытых покрытий X , для которых $\sigma_{k+1} = \text{Lf}^p(\sigma_k)$, $\sigma_{k+1} \succ \sigma_k$, а калибр покрытий σ_k стремится к 0, и согласованно с ней выберем примыкающие к A открытое покрытие $\omega \in \text{cov}(Z \setminus A)$, отображение $\beta: \mathfrak{N}(\omega)^{(0)} \rightarrow A$ и последовательность окрестностей U_n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Существуют примыкающие к A покрытие $\omega \in \text{cov}(Z \setminus A)$, отображение $\beta: \mathfrak{N}(\omega)^{(0)} \rightarrow A$ и последовательность окрестностей U_n такие, что последовательность подполиэдров $\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \dots$:

$$\mathfrak{N}_m = \bigcup \{ \langle W_0, W_1, \dots, W_t \rangle \mid W_p \cap U_m \neq \emptyset \text{ для всех } p \leq t \},$$

и частичное отображение $\mathfrak{N}_1 \leftarrow \mathfrak{N}_1^{(0)} \xrightarrow{h_1} X$, $h_1 = \varphi \circ (\beta \upharpoonright \mathfrak{N}_1^{(0)})$, удовлетворяют свойствам а) и б) критерия Лефшеца.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополнительно потребуем от покрытий $\omega_n \in \text{cov } A$ и систем μ_n , строящихся в доказательстве предложения 3, такой мелкости, чтобы покрытие $\varphi(\omega_n)$ было вписано в покрытие σ_{n+4} для всех n . Пусть ω , β и $\{U_n\}$ построены в соответствии с предложением 3.

Для симплекса $\Delta = \langle W_0, W_1, \dots, W_t \rangle$ из $\mathfrak{N}_n$ справедливы неравенства

$$\bigcap_{i=0}^t W_i \neq \emptyset \quad \text{и} \quad W_p \cap U_n \neq \emptyset$$

для всех $p \leq t$. Это означает, что $W_p \subset U_{n-1} \setminus U_{n+2}$, $W_p \subset S_p \in \mu_i$ для всех $i > n$ и $\beta\langle W_p \rangle \in S_p \cap A$. Так как

$$\bigcap_{i=0}^t S_i \neq \emptyset, \quad \bigcap_{i=0}^t S_i \subset S \in \mu_{n-2},$$

то

$$\varphi\left(\bigcup_{i=0}^t (S_i \cap A)\right) \subset V \in \sigma_{n+2}.$$

Вложение открытой звезды $\text{St}_0(\mathfrak{N}_{n+1})$ в $\mathfrak{N}_n$ следует из очевидного соображения: если $W_0 \cap U_{n+1} \neq \emptyset$, а $\bigcap_{i=0}^t W_i \neq \emptyset$, то $W_0 \subset U_n$ и все $W_i \cap U_n \neq \emptyset$.

Проверим, что образы вершин симплекса Δ лежат в элементе покрытия σ_{n+2} . Для этого заметим, что

$$h_1(\cup\{\langle W_p \rangle \mid p \leq t\}) = \varphi(\cup\{\beta\langle W_p \rangle \mid p \leq t\}) \subset \varphi\left(\bigcup_{i=0}^t (S_i \cap A)\right) \subset V \in \sigma_{n+2}.$$

Для частичного отображения $\mathfrak{N}_1 \leftarrow \mathfrak{N}_1^{(0)} \xrightarrow{h_1} X$ применим принцип продолжения Лефшеца, в силу которого существует отображение $g: \mathfrak{N}_1^{(p+1)} \rightarrow X$ такое, что его ограничение на $\mathfrak{N}_1^{(p+1)}$ дает σ_n -реализацию.

Далее для доказательства разберем наиболее сложный случай $q \leq p$, а затем сведем к нему случай $q > p$. Так как $X \in C^q$, отображение g продолжается до отображения $\hat{g}: \mathfrak{N}_1^{(p+1)} \cup \mathfrak{N}(\omega)^{(q+1)} \rightarrow X$ такого, что $\hat{g} \upharpoonright \mathfrak{N}_1^{(p+1)} = g$, $\hat{g} \upharpoonright \mathfrak{N}(\omega)^{(0)} = (\varphi \circ \beta) \upharpoonright \mathfrak{N}(\omega)^{(0)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\theta: Z \setminus A \rightarrow \mathfrak{N}(\omega)$ есть некоторое каноническое отображение, а $B \subset U_1 \setminus A$ таково, что $\theta(B) \subset \mathfrak{N}_1^{(p+1)}$. Тогда отображение $h: A \cup B \rightarrow X$, $h \upharpoonright A = \varphi$, $h \upharpoonright B = \hat{g} \circ \theta$, является непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить непрерывность h в точке $a \in \text{Bd } A$.

Пусть фиксировано число $\varepsilon > 0$ и $\varphi(N(a, 3/i) \cap A) \subset N(\varphi(a), \varepsilon/2)$. Не теряя общности, можно считать, что из $N(a, 1/j) \cap W \neq \emptyset$ следуют неравенства $\dim W < 1/i$ и $\rho(W, \beta(W)) < 1/i$ для всех $j \geq i$. Тогда если

$$z \in \bigcap_{i=0}^m W_i \cap N\left(a, \frac{1}{j}\right),$$

а $\theta(z) \in \mathfrak{N}_1^{(p+1)}$, то $\rho(\beta\langle W_i \rangle, a) < 1/j + 2/i \leq 3/i$, а $\theta(z) \in \mathfrak{N}_i^{(p+1)}$. В итоге имеем $h(z) = \hat{g}(\theta(z)) \subset N(N(\varphi(a), \varepsilon/2), \sigma_{i+2})$. Так как $\text{cal } \sigma_i \rightarrow 0$, то $N(N(\varphi(a), \varepsilon/2), \sigma_{i+2})$ будет лежать в $N(\varphi(a), \varepsilon)$.

Вновь рассмотрим резольвенту Мориты $\eta: W \rightarrow Z$. В покрытие $\eta^{-1}(\omega)$ впишем открыто-замкнутое (относительно W) покрытие $\xi \in \text{cov}(\eta^{-1}(Z \setminus A))$ кратности 1. Тогда $\zeta = \eta(\xi) = \{W_\mu\}$ есть локально конечное кратности не более $n + 1$ покрытие $Z \setminus A$ из замкнутых в Z множеств, вписанное в ω . При этом введенные ранее множества $E_{p+3}(\xi)$ и $E_{q+3}(\xi)$ будут лежать в Φ_{p+3} и Φ_{q+3} соответственно.

В качестве искомым препятствий к продолжению φ возьмем $F_1 = E_{p+3}(\xi)$ и $F_2 = E_{q+3}(\xi) \cap (Z \setminus U_1)$. Для них выполняются требуемые размерностные ограничения и

условия замкнутости. Убедимся, что φ может быть продолжено на дополнение к ним. Для этого в силу предложения 8 достаточно построить каноническое отображение $\theta: Z \setminus A \rightarrow \mathfrak{N}\langle\omega\rangle$ такое, что для $Z_0 = Z \setminus (A \cup F_1 \cup F_2)$ имеет место вложение:

$$\text{е) } \theta(Z_0) \subset \mathfrak{N}_1^{(p+1)} \cup \mathfrak{N}\langle\omega\rangle^{(q+1)}.$$

Тогда отображение $\widehat{\varphi}: A \cup Z_0 = Z \setminus (F_1 \cup F_2) \rightarrow X$, $\widehat{\varphi} \upharpoonright A = \varphi$, $\widehat{\varphi} \upharpoonright Z_0 = \widehat{g} \circ \theta$, будет непрерывным отображением, продолжающим φ . Тем самым, доказательство для случая $q \leq p$ будет завершено.

Итак, осуществим намеченное. Для этого рассмотрим ограничение покрытия $\zeta \in \text{cov}(Z \setminus A)$ на открытое в Z подмножество $Z_0 = Z \setminus (A \cup F_1 \cup F_2)$. Получающееся покрытие $\vartheta = \{H_\vartheta\} \in \text{cov } Z_0$ будет локально конечным и замкнутым. Более того, если $z \in Z_0 \cap U_1$, то кратность покрытия ϑ в точке z , будет не более $p+2$, а если $z \in Z_0 \setminus U_1$, то кратность покрытия ϑ в точке z — не более $q+2$. Воспользуемся следующим предложением 9 и подобно продолжим покрытие ϑ до открытого (необязательно локально конечного) покрытия $\widetilde{\vartheta} = \{\widetilde{H}_\vartheta\} \in \text{cov } Z_0$. Покрытие $\widetilde{\vartheta}$ можно считать вписанным в ω так же, как и $\vartheta \succ \omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если $\vartheta = \{H_\vartheta\}$ есть локально конечное замкнутое покрытие Z_0 , то существует открытое покрытие $\widetilde{\vartheta} = \{\widetilde{H}_\vartheta\}$ пространства Z_0 такое, что

$$\text{ж) } \widetilde{H}_\vartheta \supset H_\vartheta;$$

$$\text{з) если } \cap \widetilde{H}_{\vartheta_i} \neq \emptyset, \text{ то } \cap H_{\vartheta_i} \neq \emptyset$$

(покрытие $\widetilde{\vartheta}$ называется подобным продолжением покрытия ϑ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спектром точки $z \in Z_0$ назовем множество $\sigma(z) = \{\vartheta \mid z \in H_\vartheta\}$. Очевидно, что из локальной конечности замкнутого покрытия ϑ следуют конечность этого множества и существование у любой точки $z \in Z_0$ окрестности $U(z)$, удовлетворяющей условию:

$$\text{и) } \sigma(z') \subset \sigma(z) \text{ для всех } z' \in U(z).$$

Звездно впишем в покрытие $\varkappa = \{U(z) \mid z \in Z_0\}$ покрытие $\tau = \{V(z) \mid z \in Z_0\}$. Не теряя общности, можно считать, что $V(z) \subset U(z)$ для всех $z \in Z_0$. Теперь сопоставим каждой точке $z \in Z_0$ точку $f(z) \in Z_0$ с условием $N(V(z), \tau) \subset U(f(z))$. Очевидно, что из

$$\bigcap_{i=1}^k V(z_i) \neq \emptyset$$

следует

$$\text{к) } \bigcap_{i=1}^k V(z_i) \subset \bigcap_{i=1}^k U(f(z_i)), \text{ т.е. } \bigcap_{i=1}^k \sigma(z_i) \subset \sigma(f(z_m)) \text{ для всех } m \leq k.$$

Положим $\widetilde{H}_\vartheta = N(\widetilde{H}_\vartheta, \tau)$ и установим наиболее сложное свойство з). Пусть

$$z_0 \in \bigcap_{i=1}^k \widetilde{H}_{\vartheta_i}.$$

Тогда существуют элементы $V(z_i) \in \tau$, $z_0 \in V(z_i)$, $V(z_i) \cap H_{\vartheta_i} \neq \emptyset$. Так как $U(z_i) \cap H_{\vartheta_i} \neq \emptyset$, то $\vartheta_i \in \sigma(z_i)$, а, стало быть, в силу и), к) имеем $\cap \vartheta_i \subset \cup \sigma(z_i) \subset \sigma(f(z_m))$ для всех $m \leq k$. Тем самым, мы установили, что $f(z_1) \in \cap H_{\vartheta_i} \neq \emptyset$.

Пусть $\theta: Z_0 \rightarrow \mathfrak{N}(\tilde{\vartheta})$ является каноническим отображением, а $\pi: \mathfrak{N}(\tilde{\vartheta}) \rightarrow \mathfrak{N}(\omega)$ – симплициальным отображением, порожденным вписанностью покрытия $\tilde{\vartheta}$ в покрытие ω . Покажем, что для композиции $\pi \circ \theta: Z_0 \rightarrow \mathfrak{N}(\omega)$, которая также является каноническим отображением, справедливо вложение е).

В самом деле, пусть

$$z \in \bigcap_{i \leq k} \tilde{H}_{\vartheta_i},$$

а $\tilde{H}_{\vartheta_i} \subset W_i$, где $W_i \in \omega$. Если $z \in Z_0 \cap U_1$, то k не более кратности покрытия $\tilde{\vartheta}$ в точке z , которая в свою очередь будет не более $p+2$. Кроме того, симплекс $\Delta = \langle W_0, \dots, W_k \rangle \in \mathfrak{N}_1^{(p+1)}$, так как $z \in \tilde{H}_{\vartheta_i} \cap U_1 \subset W_i \cap V_1 \neq \emptyset$ для всех $i \leq k$. В итоге, $\pi \circ \theta(z) \in \mathfrak{N}_1^{(p+1)}$.

Если же $z \in Z_0 \setminus U_1$, то k не более кратности покрытия $\tilde{\vartheta}$ в точке z , которая в свою очередь будет не более $q+2$. Следовательно, $\pi \circ \theta(z) \in \mathfrak{N}(\omega)^{(q+1)}$. Тем самым, случай $q \leq p$ полностью разобран.

Пусть теперь $q > p$. Так как $X \in \text{LC}^p \cap \text{C}^p$, то в силу уже доказанного существуют препятствия $F'_1 \subset \Phi_{p+3}$ и $F'_2 \subset \Phi_{p+3}$ для продолжения частичного отображения φ . В качестве первого препятствия $F_1 \subset \Phi_{p+3}$ возьмем $F'_1 \cup F'_2$, в качестве второго препятствия $F_2 \subset \Phi_{q+3}$ возьмем $\emptyset$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Борсук К. Теория ретрактов. М.: Наука, 1971.
- [2] Hu S. T. Theory of retracts. Detroit: Wayne State Univ. Press, 1965.
- [3] Eilenberg S. Un théorème de dualité // Fund. Math. 1936. V. 26. P. 280–282.
- [4] Borsuk K. Un théorème sur les prolongements des transformations // Fund. Math. 1937. V. 29. P. 161–166.
- [5] Богатый С. А. О метрических ретрактах // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 522–524.
- [6] Левшенко Б. Т. Размерность метрических пространств и ретракция // Fund. Math. 1969. V. 66. P. 1–5.
- [7] Никифоров В. А. Продолжение селекции к многозначному отображению и теорема двойственности Эйленберга–Борсука // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1987. № 6. С. 57–59.
- [8] Engelking P. Closed mapping on complete metric spaces // Fund. Math. 1971. V. 70. P. 103–107.
- [9] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1974.
- [10] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [11] Michael E. Continuous selection. II // Ann. Math. (2). 1956. V. 64. № 3. P. 562–580.
- [12] Дранишников А. Н. Теорема Эйленберга–Борсука для отображений в произвольный комплекс // Матем. сб. 1994. Т. 184. № 4. С. 82–90.

Брестский государственный педагогический институт им. А. С. Пушкина
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 E-mail: box@univer.belpak.brest.by

Поступило
 16.02.95
 Исправленный вариант
 22.08.97