Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Данилов, Об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Шредингера, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 49–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:47:39

УДК 517.9

ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

Л. И. Данилов

Доказана абсолютная непрерывность спектра оператора Шрёдингера в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$, с периодическими (с общей решеткой периодов Λ) скалярным V и векторным $A \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ потенциалами, для которых либо $A \in H_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $2q > n - 2$, либо ряд Фурье векторного потенциала A абсолютно сходится, $V \in L_w^{p(n)}(K)$, K – элементарная ячейка решетки Λ , $p(n) = n/2$ при $n = 3, 4, 5, 6$, $p(n) = n - 3$ при $n \geq 7$, и величина $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\theta_t V\|_{L_w^{p(n)}(K)}$ достаточно мала, где $\theta_t(x) = 0$, если $|V(x)| \leq t$, и $\theta_t(x) = 1$ в противном случае, $x \in K$, $t > 0$.

Библиография: 19 названий.

1. Рассмотрим оператор Шрёдингера

$$\hat{H} = \hat{H}(A) + V = \sum_{j=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j \right)^2 + V, \quad (1)$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Векторный (магнитный) и скалярный (электрический) потенциалы $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – периодические функции с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Пусть

$$W(A, V; \phi, \phi) = \sum_{j=1}^n \left\| \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j \right) \phi \right\|^2 + (\phi, V \phi)$$

– соответствующая оператору $\hat{H}(A) + V$ квадратичная форма. Будем предполагать, что вектор-потенциал A непрерывен и форма $(\phi, V \phi)$ имеет грань < 1 относительно формы $W(0, 0; \phi, \phi)$ (последнее справедливо, когда потенциал V принадлежит слабому пространству $L_w^{n/2}(K)$, где K – элементарная ячейка решетки Λ , и величина $\|V\|_{n/2, w}^{(\infty)}$ достаточно мала). В этом случае форма $W(A, V; \cdot, \cdot)$ с областью определения $Q(W) = H^1(\mathbb{R}^n)$ замкнута и полуограничена снизу. Самосопряженный оператор (1) с областью определения $D(\hat{H}) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ порождается формой $W(A, V; \cdot, \cdot)$. Если векторный потенциал A непрерывно дифференцируем и потенциал V имеет грань < 1 относительно оператора $-\Delta$, то самосопряженный оператор $\hat{H}$ непосредственно определен на функциях $\phi \in D(\hat{H}) = H^2(\mathbb{R}^n)$.

Пусть Λ^* – обратная решетка с базисными векторами E_l^* , удовлетворяющими условиям $(E_l^*, E_j) = \delta_{lj}$, где $\{E_j\}$ – базис решетки Λ , $v(K)$ и $v(K^*)$ – объемы элементарных ячеек решеток Λ и Λ^* , $v(K)v(K^*) = 1$, $\text{diam } K^*$ – диаметр ячейки K^* .

Используются стандартные обозначения $C(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}^d)$, $C^l(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}^d)$ и $L^p(T; \mathbb{C}^d)$, где $T = K$ или $T = \mathbb{R}^m$, для пространств непрерывных, непрерывно дифференцируемых до порядка l включительно и с интегрируемой p -й степенью нормы (в существенном ограниченных при $p = \infty$) функций со значениями в $\mathbb{C}^d$, через $C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ и $C_\Lambda^l(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ обозначаются соответствующие пространства периодических с решеткой периодов Λ функций, $H^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$ – класс Соболева порядка $q \geq 0$, $\tilde{H}^q(K; \mathbb{C}^d)$ – множество функций $\phi: K \rightarrow \mathbb{C}^d$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов Λ) принадлежат $H_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$. Функции, определенные на элементарной ячейке K , в дальнейшем будут также отождествляться с их периодическими продолжениями на все пространство $\mathbb{R}^n$. Для функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}^d \subset \mathbb{C}^d$ будем в обозначениях заменять $\mathbb{C}^d$ на $\mathbb{R}^d$ и опускать $\mathbb{C}^d$, если $d = 1$. Нормы и скалярные произведения $(\cdot, \cdot)$ в пространствах $\mathbb{C}^d$, $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$ и $L^2(K; \mathbb{C}^d)$ вводятся обычным образом (без указания в обозначениях самих пространств), при этом предполагается линейность скалярного произведения по второму сомножителю, $|\cdot|$ – норма в $\mathbb{C}^d$, $\|\cdot\|$ – норма в пространствах $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$ и $L^2(K; \mathbb{C}^d)$.

Через

$$\chi_N = v^{-1}(K) \int_K \chi(x) e^{-2\pi i(N, x)} dx, \quad N \in \Lambda^*,$$

обозначаются коэффициенты Фурье функций $\chi \in L^1(K; \mathbb{C}^d)$.

Пусть $\|\cdot\|_p$ – норма в пространстве $L^p(K)$, $p \geq 1$ ($\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$); $L_w^p(K)$ – множество измеримых функций $\mathcal{W}: K \rightarrow \mathbb{C}$, для которых

$$\|\mathcal{W}\|_{p, w} = \sup_{t > 0} t(v(\{x \in K : |\mathcal{W}(x)| > t\}))^{1/p} < +\infty,$$

где $v(\cdot)$ – мера Лебега. Для $\mathcal{W} \in L_w^p(K)$ обозначим

$$\|\mathcal{W}\|_{p, w}^{(\infty)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t(v(\{x \in K : |\mathcal{W}(x)| > t\}))^{1/p};$$

$$L_{w, 0}^p(K) = \{\mathcal{W} \in L_w^p(K) : \|\mathcal{W}\|_{p, w}^{(\infty)} = 0\}.$$

Положим $p(n) = n/2$ при $n = 3, 4, 5, 6$ и $p(n) = n - 3$ при $n \geq 7$. В данной работе доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 3$, $A \in C_\Lambda^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ и либо $\sum_{N \in \Lambda^*} |A_N| < +\infty$, либо $A \in H_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, где $2q > n - 2$ (при $n = 3$ последнее условие следует из предположения $A \in C_\Lambda^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$). Тогда найдется число $C' = C'(n, \Lambda; A) > 0$ такое, что для всех потенциалов $V \in L_w^{p(n)}(K; \mathbb{R})$, для которых $\|V\|_{p(n), w}^{(\infty)} < C'$, спектр оператора Шрёдингера (1) абсолютно непрерывен.

Теорема 1 является следствием теоремы 2. При доказательстве используется метод Томаса, предложенный в [1] для доказательства абсолютной непрерывности спектра оператора Шрёдингера в $L^2(\mathbb{R}^3)$ с периодическим электрическим потенциалом $V \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$. Метод Томаса используется во многих последующих работах. В [2] результаты работы [1] обобщены на n -мерные операторы Шрёдингера с периодическим потенциалом V , для которого $V \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ при $n = 2, 3$ и $\sum_{N \in \Lambda^*} |V_N|^q < +\infty$, $1 \leq q < (n-1)(n-2)^{-1}$ при $n \geq 4$. В [3] М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной доказана абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера в случае $V \in L^q(K)$ и $A \in L^{2q}(K; \mathbb{R}^2)$, $q > 1$. При $n \geq 3$ абсолютная непрерывность спектра

оператора Шрёдингера была установлена А. Соболевым [4] для периодических потенциалов $V \in L^q(K)$, $q > n - 1$, и $A \in C_\Lambda^{2n+3}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Это утверждение в дальнейшем было усилено: в [5] предполагается, что $V \in L_{w,0}^{n/2}(K)$ при $n = 3, 4$ и $V \in L_{w,0}^{n-2}(K)$ при $n \geq 5$, и Соболевым было ослаблено условие на векторный потенциал до условия $A \in H_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $2q > 3n - 2$ (см. замечание в конце обзорной статьи [5]). Последнее условие на векторный потенциал A было получено также П. Кучментом и С. Левендорским в работе [6], в которой предложен общий подход к исследованию периодических эллиптических операторов, обобщающий построения Соболева [4] (и доказывается отсутствие собственных значений в спектре периодического оператора Шрёдингера с комплексными потенциалами V и A). В [7] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом $V \in L_w^{n/2}(K)$, для которого величина $\|V\|_{n/2,w}^{(\infty)}$ достаточно мала, при всех $n \geq 3$ (и при $A \equiv 0$). Периодические операторы Шрёдингера с переменной метрикой ($n = 2$) и периодический изотропный оператор Максвелла рассматривались в [8], [5] и [9].

В данной работе результаты для периодического оператора Шрёдингера получены как следствие соответствующих утверждений для периодического оператора Дирака. Ряд условий на электрический потенциал V (при малом вектор-потенциале A), при которых спектр периодического оператора Дирака абсолютно непрерывен, приведен в [10], [11]. В [12] доказана абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Дирака при $V \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^2)$ и $A \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, $q > 2$ (при доказательстве используются методы работы [13], в которой рассматривался периодический потенциал $V \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^2)$, $q > 2$ (при $A \equiv 0$)). Последнее утверждение получено также (на основе результатов об операторе Шрёдингера) Бирманом и Суслиной [14]. В этой же работе [14] рассмотрен периодический оператор Дирака в $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^M)$, $n \geq 3$, в случае $V \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ и при тех же ограничениях на вектор-потенциал A , что и для оператора Шрёдингера [5]. В [15], [16] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора Дирака в $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^M)$, $n \geq 3$, с потенциалами $V \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ и $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, при этом предполагалось, что либо $\sum_{N \in \Lambda^*} |A_N| < +\infty$, либо $A \in H_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $2q > n - 2$.

Часть утверждений настоящей работы содержится в [16], поэтому приводится без доказательств (в [16] накладывались более сильные ограничения на потенциал V : выбиралась функция $p(n) = n/2$ при $n = 3, 4, 5$ и $p(n) = n^{-1}(n-1)(n-2)$ при $n \geq 6$). Без доказательств будет приведен также ряд простых утверждений.

Обозначим $\mathcal{P}_R^\Lambda = \{F \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n) : F(x) \geq 0 \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^n, F_0 = v^{-1}(K) \text{ и } F_N = 0 \text{ при } N \in \Lambda^* : 2\pi|N| > R\}$, $R > 0$. Для любых функции $F \in \mathcal{P}_R^\Lambda$, $R \geq 0$, и вектор-функции $A \in L^1(K; \mathbb{C}^n)$ имеем $F * A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ и $(F * A)_N = v(K)F_N A_N$, $N \in \Lambda^*$, где $(F * A)(x) = \int_K F(x-y)A(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^n$. Для вектор-функции $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ положим

$$\omega(A; R) = R \min_{F \in \mathcal{P}_R^\Lambda} \|A - F * A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)}, \quad R > 0.$$

Пусть $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – множество борелевских подмножеств $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$; $\mathcal{M}_h$, $h > 0$, – множество знакоопределенных четных (борелевских) мер $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(p) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ipt} d\mu(t) = 1 \quad \text{при } |p| \leq 2\pi h, \quad p \in \mathbb{R}, \\ \|\mu\| &= \sup_{\mathcal{O} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} (|\mu(\mathcal{O})| + |\mu(\mathbb{R} \setminus \mathcal{O})|) < +\infty, \quad \mu \in \mathcal{M}_h. \end{aligned}$$

Для любых вектор-функции $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, вектора $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, меры $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h > 0$, и вектора $\tilde{e} \in S_{n-2}(e) = \{e' \in S_{n-1} : (e, e') = 0\}$, где $e = |\gamma|^{-1}\gamma$ (S_{n-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$), обозначим

$$\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; x) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t) \int_0^1 A(x - \xi\gamma - t\tilde{e}) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; \cdot) \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 3$, Λ – решетка в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что для векторного потенциала $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ найдутся вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, и мера $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h > 0$, такие, что

$$\max_{\tilde{e} \in S_{n-2}(e)} \|\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; \cdot) - A_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} = \theta\pi|\gamma|^{-1}, \quad (2)$$

где $\theta \in [0, 1)$, $A_0 = v^{-1}(K) \int_K A(x) dx$, и для некоторого числа $R \geq \pi|\gamma|^{-1}$ выполнено неравенство

$$|\gamma|^2 \omega(A; R) \leq C'_2(1 - \theta)^{18}, \quad (3)$$

где $C'_2 = C_1 C_0(A)$, $C_0(A) = \exp\{-Ch^{-1}\|\mu\| \|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}\}$, $C > 0$ – универсальная постоянная, $C_1 = C_1(n) \in (0, 1]$. Предположим также, что $V \in L_w^{p(n)}(K; \mathbb{R})$ и

$$\|V\|_{p(n), w}^{(\infty)} < C_3^{-1} C'_2 |\gamma|^{-2} R^{-2} (1 - \theta)^{18}, \quad (4)$$

где $C_3 = 1$ при $n = 3, 4, 5$ и $C_3 = (\text{diam } K^*)^{-(n-6)/(n-3)}(1 + |\gamma| \text{diam } K^*)$ при $n \geq 6$. Тогда спектр оператора Шрёдингера (1) абсолютно непрерывен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (4) предполагает (при соответствующем выборе числа C_1), что форма $(\phi, V\phi)$ имеет грань < 1 относительно формы $W(0, 0; \phi, \phi)$, $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

При доказательстве теоремы 2 (переходя в случае необходимости к оператору $e^{-i(A_0, x)} \hat{H} e^{i(A_0, x)}$) можно считать, что $A_0 = 0$.

Если $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ и либо $\sum_{N \in \Lambda^*} |A_N| < +\infty$, либо $A \in H_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $2q > n-2$, то найдутся вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ и мера $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h \in (0, |\gamma|^{-1}]$, такие, что для некоторого $\theta \in [0, 1)$ выполняется условие (2) [15], [16]. Если $A \in C_\Lambda^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, то $\omega(A; R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$ и, следовательно, неравенство (3) справедливо для всех достаточно больших R . Поэтому теорема 1 непосредственно вытекает из теоремы 2.

2. Пусть $k \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $e \in S_{n-1}$, $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$,

$$W(A; k + i\kappa e; \psi, \phi) = \sum_{j=1}^n \left(\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - \overline{A}_j + k_j - i\kappa e_j \right) \psi, \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j + k_j + i\kappa e_j \right) \phi \right)$$

– полуторалинейная форма с областью определения $Q(W) = \tilde{H}^1(K) \subset L^2(K)$. Если $V \in L_w^{n/2}(K; \mathbb{C})$ и $\|V\|_{n/2, w}^{(\infty)} < C'_1$ для некоторого (достаточно малого) $C'_1 = C'_1(n) > 0$, то форма $(\phi, V\phi)$ имеет грань < 1 относительно формы $W(0; k; \phi, \phi)$. В этом случае

$$W(V, A; k + i\kappa e; \phi, \phi) = W(A; k + i\kappa e; \phi, \phi) + (\phi, V\phi), \quad \phi \in \tilde{H}^1(K),$$

– замкнутая и секториальная квадратичная форма, порождающая m -секториальный оператор $\hat{H}(A; k + i\kappa e) + V$. Если $A \in C^1_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, то

$$\hat{H}(A; k + i\kappa e) = \sum_{j=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j + k_j + i\kappa e_j \right)^2,$$

$$D(\hat{H}(A; k + i\kappa e)) = \tilde{H}^2(K).$$

Оператор (1) унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int_{2\pi K^*} \oplus (\hat{H}(A; k) + V) \frac{dk}{(2\pi)^n v(K^*)}. \quad (5)$$

Унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда [3], [7]. Операторы $\hat{H}(A; k) + V$ имеют компактную резольвенту и, следовательно, дискретный спектр. Для доказательства абсолютной непрерывности спектра оператора (1) достаточно показать, что существует вектор $e \in S_{n-1}$ такой, что для любых $E \in \mathbb{R}$ и $k \in 2\pi K^*$ найдется число $\xi + i\kappa \in \mathbb{C}$, для которого оператор $\hat{H}(A; k + (\xi + i\kappa)e) + V - E$ обратим (подробное доказательство этого утверждения приведено в [17], [2], [3], [7]), поэтому теорема 2 является следствием теоремы 3, в которой установлена обратимость операторов $\hat{H}(A; k + i\kappa|\gamma|^{-1}\gamma) + V - E$ для некоторых вектора $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ и достаточно больших κ и при всех $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$.

Выберем (и зафиксируем) векторы $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma \in S_{n-1}$. Для всех $N \in \Lambda^*$, $k \in \mathbb{R}^n$ и $\kappa \in \mathbb{R}$ обозначим

$$G_N^\pm = G_N^\pm(k; \kappa) = ((k + 2\pi N, e)^2 + (|\kappa| \pm \sqrt{k + 2\pi N|^2 - (k + 2\pi N, e)^2})^2)^{1/2},$$

$G_N = G_N(k; \kappa) = G_N^-(k; \kappa)$. Справедливо равенство

$$\hat{H}(0; k + i\kappa e)\phi = \sum_{N \in \Lambda^*} (k + 2\pi N + i\kappa e)^2 \phi_N e^{2\pi i(N, x)}, \quad \phi \in \tilde{H}^2(K),$$

при этом $|(k + 2\pi N + i\kappa e)^2| = G_N G_N^+$. Если $(k, \gamma) = \pi$, то $G_N \geq \pi|\gamma|^{-1}$ и $G_N G_N^+ \geq 2\pi|\gamma|^{-1}|\kappa|$. Пусть $\hat{L} = \hat{L}(k; \kappa)$ – неотрицательный оператор в $L^2(K)$:

$$\hat{L}\phi = \sum_{N \in \Lambda^*} G_N G_N^+ \phi_N e^{2\pi i(N, x)}, \quad \phi \in D(\hat{L}) = \tilde{H}^2(K).$$

Будем обозначать $\|\phi\|_* = \|\hat{L}^{1/2}\phi\|$, $\phi \in D(\hat{L}^{1/2}) = \tilde{H}^1(K)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \geq 3$, $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h > 0$, $\theta \in [0, 1)$, $Y_0 \geq 0$ и $R \geq \pi|\gamma|^{-1}$. Тогда существуют универсальная постоянная $C > 0$, числа $C_1 = C_1(n) > 0$ и $C_3 = 1$ при $n = 3, 4, 5$, $C_3 = (\text{diam } K^*)^{-(n-6)/(n-3)}(1 + |\gamma| \text{diam } K^*)$ при $n \geq 6$ такие, что для всех вектор-функций $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, для которых $A_0 = 0$ и выполнены условия

$$\|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)} \leq Y_0, \quad (6)$$

$$\max_{\tilde{e} \in S_{n-2}(e)} \|(\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; \cdot), \tilde{e}) + i(\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; \cdot), e)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \theta\pi|\gamma|^{-1}, \quad (7)$$

$$|\gamma|^2 \omega(A; R) \leq C_2(1 - \theta)^{18}, \quad (8)$$

где

$$C_2 = C_1 \exp(-Ch^{-1}\|\mu\|Y_0), \quad (9)$$

любой функции $V \in L_w^{p(n)}(K; \mathbb{C})$, для которой

$$\|V\|_{p(n),w}^{(\infty)} < C_3^{-1}C_2|\gamma|^{-2}R^{-2}(1-\theta)^{18},$$

и любого числа $E \in \mathbb{C}$ найдется такое число $\kappa > 0$, что для всех $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$ и всех ненулевых функций $\phi \in \tilde{H}^1(K)$ справедливо неравенство

$$\sup_{\psi \in \tilde{H}^1(K) : \|\psi\|_* \leq 1} |W(V - E, A; k + i\kappa e; \psi, \phi)| > 0$$

и, следовательно, оператор $\hat{H}(A; k + i\kappa e) + V - E$ обратим.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор (1) можно рассматривать с комплекснозначными потенциалами V и A . В этом случае из теоремы 3 и разложения (5) следует, что в спектре оператора $\hat{H}(A) + V$ (при соответствующих ограничениях на V и A) отсутствуют собственные значения. В частности, это справедливо, если потенциалы V и A удовлетворяют условиям теоремы 1 (которые были сформулированы для вещественнозначных потенциалов).

Теорема 3 является следствием теорем 4 и 5.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n \geq 3$, $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h > 0$, $\theta \in [0, 1)$, $Y_0 \geq 0$ и $R \geq \pi|\gamma|^{-1}$. Тогда существуют универсальная постоянная $C > 0$ и число $C_1 = C_1(n) \in (0, 1]$ (для них постоянная C_2 определяется по формуле (9)) такие, что для любой вектор-функции $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, для которой $A_0 = 0$ и выполнены условия (6)–(8), найдется число $\kappa_0 > 0$ такое, что для всех $\kappa \geq \kappa_0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$ и всех функций $\phi \in \tilde{H}^1(K)$ справедливо неравенство

$$\sup_{\psi \in \tilde{H}^1(K) : \|\psi\|_* \leq 1} |W(A; k + i\kappa e; \psi, \phi)| \geq C_2|\gamma|^{-2}R^{-2}(1-\theta)^{18}\|\phi\|_*.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $n \geq 3$, $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, $\epsilon > 0$. Тогда для всех функций $\mathcal{W} \in L_w^{2p(n)}(K; \mathbb{C})$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$, всех $\kappa \geq \kappa_0 = \kappa_0(n, \Lambda, \gamma; \epsilon, \mathcal{W}) > 0$ при $n \neq 4$ и для некоторой последовательности $\kappa = \kappa_\nu \geq \kappa_0$, $\nu \in \mathbb{N}$, для которой $\kappa_\nu \rightarrow +\infty$ при $\nu \rightarrow +\infty$, при $n = 4$ и для всех функций $\phi \in \tilde{H}^1(K)$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{W}\phi\| \leq \tilde{C}_3(\epsilon + \|\mathcal{W}\|_{2p(n),w}^{(\infty)})\|\phi\|_*,$$

где $\tilde{C}_3 > 0$ – некоторая универсальная постоянная при $n = 3, 4, 5$ и $\tilde{C}_3 = \tilde{C}_3'(n) \times (\text{diam } K^*)^{-(n-6)/(2(n-3))}(1 + (|\gamma| \text{diam } K^*)^{1/2}) > 0$ при $n \geq 6$.

3. Пусть $\hat{\alpha}_j, j = 1, \dots, n$, – эрмитовы $(M \times M)$ -матрицы, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям $\hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_l + \hat{\alpha}_l \hat{\alpha}_j = 2\delta_{jl} \hat{I}_M$, где $\hat{I}_M$ – единичная $(M \times M)$ -матрица (можно считать, что $M = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$), $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$,

$$\hat{D}(A; k + i\kappa e) = \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j + k_j + i\kappa e_j \right)$$

– оператор Дирака с областью определения $D(\hat{D}(A; k + i\kappa e)) = \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^M) \subset L^2(K; \mathbb{C}^M)$. Если $A \in C_\Lambda^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, то

$$\hat{D}^2(A; k + i\kappa e) = \hat{H}(A; k + i\kappa e) \otimes \hat{I}_M + \frac{i}{2} \sum_{j,l=1}^n \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \right) \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_l, \quad (10)$$

$$D(\hat{D}^2(A; k + i\kappa e)) = \tilde{H}^2(K; \mathbb{C}^M).$$

Для $b > 0$ при $\kappa \in \mathbb{R} : |\kappa| > b$ обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_b &= \mathcal{O}_b(\kappa) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, e)^2 + (|\kappa| - |x - (x, e)e|)^2 < b^2\}, \\ \mathcal{K}_b &= \mathcal{K}_b(k; \kappa) = \{N \in \Lambda^* : k + 2\pi N \in \mathcal{O}_b\}, \quad k \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Через $\hat{P}^\mathcal{C}$, где $\mathcal{C} \subset \Lambda^*$, обозначим ортогональный проектор в пространстве $L^2(K)$, ставящий в соответствие функциям $\phi \in L^2(K)$ функции $\hat{P}^\mathcal{C} \phi = \phi^\mathcal{C} = \sum_{N \in \mathcal{C}} \phi_N e^{2\pi i(N, x)}$ ($\phi^\emptyset \equiv 0$); $\mathcal{H}_d(\mathcal{C}) = \{\phi \in L^2(K; \mathbb{C}^d) : \phi_N = 0 \text{ при } N \notin \mathcal{C}\}$; $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = \mathcal{H}_1(\mathcal{C})$.

Доказательство следующей теоремы приведено в [16] (вариант этой теоремы без явного определения оценочной постоянной в неравенстве (12) содержится также в [15]). Из теоремы 6 и равенства (10) следуют теоремы 7 и 8 [16].

ТЕОРЕМА 6. Пусть (при $n \geq 3$ и при фиксированных векторе $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ и мере $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h \in (0, |\gamma|^{-1}]$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$) $\theta \in [0, 1)$, $Y_0 \geq |\gamma|^{-1}$, $R \geq \pi|\gamma|^{-1}$ и $b > 0$. Тогда существуют число $\kappa_0 > 0$, универсальная постоянная $C > 0$ и число $C_1 = C_1(n) \in (0, 1]$ (постоянная C_2 выражается через них по формуле (9)) такие, что для всех $\kappa \geq \kappa_0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$, всех вектор-функций $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, для которых $A_0 = 0$ и выполнены условия (6), (7) и

$$A_N = 0 \quad \forall N \in \Lambda^* : 2\pi|N| > R, \quad (11)$$

и всех вектор-функций $\phi \in \mathcal{H}_M(\mathcal{K}_b(k; \kappa))$ справедливо неравенство

$$\|\hat{D}^2(A; k + i\kappa e)\phi\| \geq C_2 |\gamma|^{-2} (1 - \theta)^6 \frac{\kappa}{b + R} \|\phi\|. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть (при $n \geq 3$ и при фиксированных векторе $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ и мере $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h \in (0, |\gamma|^{-1}]$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$) $\theta \in [0, 1)$, $Y_0 \geq |\gamma|^{-1}$, $Y_1 \geq 0$, $R \geq \pi|\gamma|^{-1}$ и $b > 0$. Тогда существуют число $\kappa_0 > 0$, универсальная постоянная $C > 0$ и число $C_1 = C_1(n) \in (0, 1]$ такие, что для всех $\kappa \in \mathbb{R} : |\kappa| \geq \kappa_0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$, всех вектор-функций $A \in C_\Lambda^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, для которых $A_0 = 0$ и выполнены условия (6), (7), (11) и

$$\left\| \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Y_1, \quad j, l = 1, \dots, n, \quad (13)$$

и всех функций $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_b(k; \kappa))$ справедливо неравенство

$$\|\hat{H}(A; k + i\kappa e)\phi\| \geq C_2 |\gamma|^{-2} (1 - \theta)^6 \frac{|\kappa|}{b + R} \|\phi\|,$$

где C_2 определена в (9).

ТЕОРЕМА 8. Пусть (при $n \geq 3$ и при фиксированных векторе $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ и мере $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h \in (0, |\gamma|^{-1}]$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$) $\theta \in [0, 1)$, $Y_0 \geq 0$, $Y_1 \geq 0$ и $R \geq \pi|\gamma|^{-1}$. Тогда существуют число $\kappa_0 > 0$, универсальная постоянная $C > 0$ и число $C_1 = C_1(n) \in (0, 1]$ (постоянная C_2 определяется через них по формуле (9)) такие, что для всех $\kappa \in \mathbb{R} : |\kappa| \geq \kappa_0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$, всех вектор-функций $A \in C_\Lambda^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, для которых $A_0 = 0$ и выполнены условия (6)–(8) и (13), и всех функций $\phi \in \tilde{H}^2(K)$ справедливо неравенство

$$\|\hat{H}(A; k + i\kappa e)\phi\| \geq C_2 |\gamma|^{-2} R^{-2} (1 - \theta)^{18} \|\hat{H}(0; k + i\kappa e)\phi\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть вначале $A \in C_\Lambda^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, $A_0 = 0$ и выполнены условия (6)–(8);

$$Y_1 = \max_{j, l=1, \dots, n} \left\| \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

C , C_1 и κ_0 – постоянные из теоремы 8 (κ_0 зависит от Y_1 и, следовательно, от выбора вектор-функции A). Обозначим $\tilde{C}_2 = C_2 |\gamma|^{-2} R^{-2} (1 - \theta)^{18}$. Из теоремы 8 следует, что при всех $\kappa \in \mathbb{R} : |\kappa| \geq \kappa_0$ и всех $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$ оператор $\hat{H}(A; k + i\kappa e)$ (как и оператор $\hat{H}(0; k + i\kappa e)$) обратим, $D(\hat{H}(A; k + i\kappa e)) = D(\hat{H}(0; k + i\kappa e)) = \tilde{H}^2(K)$ и $L^2(K)$ – его область значений. При этом $\|\hat{H}(0; k + i\kappa e)\hat{H}^{-1}(A; k + i\kappa e)\| \leq \tilde{C}_2^{-1}$. Оператор $\hat{H}^{-1}(A; k + i\kappa e)\hat{H}(0; k + i\kappa e)$ непрерывно продолжается с линейного многообразия $\tilde{H}^2(K) \subset L^2(K)$ на все пространство $L^2(K)$ и также

$$\|\hat{H}^{-1}(A; k + i\kappa e)\hat{H}(0; k + i\kappa e)\| = \|\hat{H}(0; k - i\kappa e)\hat{H}^{-1}(\bar{A}; k - i\kappa e)\| \leq \tilde{C}_2^{-1}.$$

Следовательно, $\|\hat{L}\hat{H}^{-1}(A; k + i\kappa e)\| \leq \tilde{C}_2^{-1}$ и $\|\hat{H}^{-1}(A; k + i\kappa e)\hat{L}\| \leq \tilde{C}_2^{-1}$. Используя интерполяцию [18, дополнение к § IX.4], откуда получаем

$$\|\hat{L}^{1/2}\hat{H}^{-1}(A; k + i\kappa e)\hat{L}^{1/2}\| \leq \tilde{C}_2^{-1},$$

поэтому для всех $\tilde{\phi} \in \tilde{H}^1(K)$ справедлива оценка $\|\hat{L}^{-1/2}\hat{H}(A; k + i\kappa e)\hat{L}^{-1/2}\tilde{\phi}\| \geq \tilde{C}_2\|\tilde{\phi}\|$. Пусть $\phi \in \tilde{H}^2(K)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{\psi \in \tilde{H}^1(K): \|\psi\|_* \leq 1} |W(A; k + i\kappa e; \psi, \phi)| &= \sup_{\psi \in \tilde{H}^1(K): \|\psi\|_* \leq 1} |(\psi, \hat{H}(A; k + i\kappa e)\phi)| \\ &= \|\hat{L}^{-1/2}\hat{H}(A; k + i\kappa e)\hat{L}^{-1/2}(\hat{L}^{1/2}\phi)\| \geq \tilde{C}_2\|\phi\|_*. \end{aligned}$$

Так как линейное многообразие $\tilde{H}^2(K)$ плотно в $(\tilde{H}^1(K), \|\cdot\|_*)$, а форма $W(A; k + i\kappa e; \cdot, \cdot)$ непрерывна на $(\tilde{H}^1(K), \|\cdot\|_*)$, то

$$\sup_{\psi \in \tilde{H}^1(K): \|\psi\|_* \leq 1} |W(A; k + i\kappa e; \psi, \phi)| \geq \tilde{C}_2\|\phi\|_* \quad (14)$$

для всех $\phi \in \tilde{H}^1(K)$. Пусть теперь $A \in C_\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, $A_0 = 0$ и выполнены условия (6)–(8). Аппроксимируя в $L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ вектор-функцию A тригонометрическими многочленами $F * A \in C_\Lambda^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, где $F \in \mathcal{D}_r^\Lambda$ и $r \rightarrow +\infty$ (для которых $(F * A)_0 = 0$ и выполнены условия (6)–(8)), учитывая, что при $\kappa \geq \max\{1, \pi|\gamma|^{-1}\}$

$$\begin{aligned} |W(A; k + i\kappa e; \psi, \phi) - W(F * A; k + i\kappa e; \psi, \phi)| \\ \leq 2(4 + nY_0)\pi^{-1}|\gamma| \|A - F * A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)} \|\psi\|_* \|\phi\|_*, \end{aligned}$$

и уменьшая числа C_1 и C_2 (выбирая вместо них, например, числа $\frac{1}{2}C_1$ и $\frac{1}{2}C_2$), из (14) (при $\kappa \geq \kappa_0$ для некоторого $\kappa_0 > 0$, зависящего от вектор-функции A , и при всех $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$) получаем доказываемое неравенство. Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Из интерполяционных теорем Ханта и Марцинкевича следует, что существует константа $c' = c'(n) > 0$ такая, что для любых функций $\mathcal{W} \in L_w^n(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{G} \in L_w^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ (из слабых пространств), $n \geq 3$, и $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ функция $\mathcal{W}(\mathcal{G} * \phi)$ (где $*$ – свертка в $\mathbb{R}^n$) принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|\mathcal{W}(\mathcal{G} * \phi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c' \|\mathcal{W}\|_{L_w^n(\mathbb{R}^n)} \|\mathcal{G}\|_{L_w^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда (см. также [19, глава 5, тождество (18)]) следует, что найдутся постоянные $c'' = c''(n) > 0$ и $c_1'' = c_1''(n, \Lambda) > 0$ такие, что для всех функций $\mathcal{W} \in L_w^n(K)$ и $\phi \in \tilde{H}^1(K)$

$$\|\mathcal{W}\phi\| \leq \|\mathcal{W}\|_{n,w} \left(c'' \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\| + c_1'' \|\phi\| \right). \quad (15)$$

Так как $|k + 2\pi N|^2 \leq 9G_N G_N^+$ для всех $N \in \Lambda^* \setminus \mathcal{K}_{\kappa/8}(k; \kappa)$, $k \in \mathbb{R}^n$, $\kappa > 0$, следующая теорема вытекает из (15).

ТЕОРЕМА 9. При $n \geq 3$ (и при фиксированном векторе $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$) найдутся постоянные $c = c(n) > 0$ и $c_1 = c_1(n, \Lambda) > 0$ такие, что для всех $\kappa > 0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, всех функций $\mathcal{W} \in L_w^n(K)$ и $\phi \in \tilde{H}^1(K) \cap \mathcal{H}(\Lambda^* \setminus \mathcal{K}_{\kappa/8}(k; \kappa))$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{W}\phi\| \leq \|\mathcal{W}\|_{n,w} (c\|\phi\|_* + c_1\|\phi\|).$$

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{W} \in L_w^p(K)$, $p > 2$. Обозначим $K^{(s)} = \{x \in K : |\mathcal{W}(x)| > s\}$, $s > 0$. Тогда

$$\int_{K^{(s)}} |\mathcal{W}(x)|^2 dx \leq c_4 s^{-(p-2)} \|\mathcal{W}\|_{p,w}^p,$$

где $c_4 = c_4(p) > 0$.

Будем далее обозначать $a = 2\pi \operatorname{diam} K^*$.

ЛЕММА 2. Пусть $n \geq 3$, $p > 2$ (и фиксирован вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$). Тогда найдется постоянная $c_5 = c_5(n, p) > 0$ такая, что для всех $\kappa > 2a$, $b \in [a, \kappa/2]$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$ и всех функций $\mathcal{W} \in L_w^p(K)$ и $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_b(k; \kappa))$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{W}\phi\| \leq c_5 \|\mathcal{W}\|_{p,w} b^{2/p} \kappa^{(n-2)/p} \|\phi\|.$$

Так как при $\kappa > 2a$, $b \in [a, \kappa/2]$ множество $\mathcal{K}_b$ содержит не более $c_6 v(K) b^2 \kappa^{n-2}$ векторов, где $c_6 = c_6(n) > 0$, лемма 2 вытекает с помощью разбиения функции $\mathcal{W}$ на большую и малую части [19, глава 1] из леммы 1.

Пусть $\kappa \geq \kappa_0 > 8a$. Будем выбирать число $L = L(\kappa) \in \mathbb{N}$ так, что $\kappa/8 \leq 2^L a < \kappa/4$. Пусть

$$\mathcal{K}_a^0 = \mathcal{K}_a, \quad \mathcal{K}_a^j = \mathcal{K}_{2^j a} \setminus \mathcal{K}_{2^{j-1} a}, \quad j = 1, \dots, L. \quad (16)$$

Для любой функции $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_{2^L a}(k; \kappa))$ обозначим $\phi^{(j)} = \widehat{P} \mathcal{K}_a^j \phi$, $j = 0, 1, \dots, L$. Если $\mathcal{W} \in L_w^p(K)$, $p > 2$, то из леммы 2 вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}\phi\| &\leq \sum_{j=0}^L \|\mathcal{W}\phi^{(j)}\| \leq c_5 \|\mathcal{W}\|_{p,w} \kappa^{(n-2)/p} \sum_{j=0}^L (2^j a)^{2/p} \|\phi^{(j)}\| \\ &\leq c_5 \|\mathcal{W}\|_{p,w} \kappa^{(n-2)/p} \left(a^{2/p} \|\phi^{(0)}\| \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} v^{1/2}(K) \sum_{j=1}^L (2^j a)^{2/p-1/2} \left(\sum_{N \in \mathcal{K}_a^j} G_N |\phi_N|^2 \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Положив $n = 3$, $p = 3$ и учитывая, что $2^j a < 2^{j-L-2} \kappa$, $j = 1, \dots, L$, и $G_N^+ \geq \kappa$ для всех $N \in \Lambda^*$, из (17) получаем теорему 10.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $n = 3$ (и фиксирован вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$). Найдутся универсальная постоянная $c > 0$ и число $c_1 = c_1(\Lambda) > 0$ такие, что для всех $\kappa \geq \kappa_0(\Lambda) > 0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^3$, всех функций $\mathcal{W} \in L_w^3(K)$ и $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_{\kappa/8}(k; \kappa))$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{W}\phi\| \leq \|\mathcal{W}\|_{3,w} (c \|\phi\|_* + c_1 \kappa^{1/3} \|\phi\|).$$

Доказательство следующей теоремы содержится в [16].

ТЕОРЕМА 11. Пусть $n = 4$ (и фиксирован вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$). Найдутся универсальная постоянная $c > 0$ и число $c_1 = c_1(\Lambda) > 0$ такие, что для любой функции $\mathcal{W} \in L^4_w(K)$ существует последовательность $\kappa = \kappa_\nu \geq \kappa_0(\Lambda) \geq 2$, $\nu \in \mathbb{N}$, для которой $\kappa_\nu \rightarrow +\infty$ при $\nu \rightarrow +\infty$, такая, что для всех чисел $\kappa = \kappa_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^4$ и всех функций $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_{\kappa/8}(k; \kappa))$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{W}\phi\| \leq \|\mathcal{W}\|_{4,w}(c\|\phi\|_* + c_1\kappa^{3/8}(\ln \kappa)^{1/4}\|\phi\|).$$

Пусть $b, b' \in (0, \kappa/2)$. Для всех $N \in \Lambda^*$ обозначим через $S_{b,b'}(N) = S_{b,b'}(k, \kappa; N)$ число векторов $N' \in \mathcal{K}_{b'}$, для которых $N' - N \in \mathcal{K}_b$. Положим $N_{\parallel} = (N, e)e$. Если $2\pi|N_{\parallel}| \geq b + b'$ или $2\pi|N - N_{\parallel}| \geq 2\kappa + b + b'$, то $S_{b,b'}(N) = 0$.

ЛЕММА 3. Пусть $n \geq 5$. Найдутся числа $\kappa_0 = \kappa_0(n, \Lambda) > 8a$ и $c_7 = c_7(n) > 0$ такие, что для всех $\kappa \geq \kappa_0$, $b, b' \in [a, \kappa/4]$, $k \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} \in L^2(K)$ и $\phi \in L^2(K)$ справедливо неравенство

$$\|\hat{P}_{\mathcal{K}_{b'}}\mathcal{V}\phi^{\mathcal{K}_b}\| \leq c_7(bb' \min\{b, b'\})^{1/2}\kappa^{(n-3)/2}\|\mathcal{V}\|_2\|\phi^{\mathcal{K}_b}\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как норма ограниченного оператора в $L^2(K)$ совпадает с нормой сопряженного к нему оператора, при доказательстве леммы 3 можно считать, что $b \leq b'$. Для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $x \neq (x, e)e$, обозначим

$$\tilde{e}(x) = |x - (x, e)e|^{-1}(x - (x, e)e) \in S_{n-2}(e)$$

(где $e = |\gamma|^{-1}\gamma$).

Существует число $\epsilon = \epsilon(n) \in (0, 1)$ такое, что для любого $r \in (a, \kappa]$ найдутся непесекающиеся множества $\Omega^{(\lambda; r)} \in S_{n-2}(e)$ и векторы $e^{(\lambda; r)} \in \Omega^{(\lambda; r)}$, $\lambda = 1, \dots, \lambda_0$ (где $\lambda_0 = \lambda_0(n, r) \in \mathbb{N}$), такие, что $S_{n-2}(e) = \bigcup_{\lambda} \Omega^{(\lambda; r)}$, $|\tilde{e} - e^{(\lambda; r)}| \leq r\kappa^{-1}$ для всех $\tilde{e} \in \Omega^{(\lambda; r)}$ и каждый вектор $e' \in S_{n-2}(e)$ принадлежит не более $n - 1$ множествам $\{\tilde{e} \in S_{n-2}(e) : |\tilde{e} - e^{(\lambda; r)}| < (1 + \epsilon)r\kappa^{-1}\}$.

Обозначим $\mathcal{K}_b^{(\lambda; r)} = \{N \in \mathcal{K}_b : \tilde{e}(k + 2\pi N) \in \Omega^{(\lambda; r)}\}$. Если $N \in \mathcal{K}_b$, то для всех $N' \in \Lambda^*$, для которых $2\pi|N' - N_{\parallel}| \leq \frac{1}{4}\epsilon r$, имеем $|\tilde{e}(k + 2\pi(N + N')) - \tilde{e}(k + 2\pi N)| < \epsilon r\kappa^{-1}$. Поэтому для всех функций $\mathcal{V}' \in L^2(K)$, для которых $\mathcal{V}'_N = 0$ при $2\pi|N - N_{\parallel}| > \frac{1}{4}\epsilon r$, получаем

$$\|\hat{P}_{\mathcal{K}_{b'}}\mathcal{V}'\hat{P}_{\mathcal{K}_b}\phi\|^2 \leq (n-1)^2 \sum_{\lambda} \|\hat{P}_{\mathcal{K}_{b'}}\mathcal{V}'\hat{P}_{\mathcal{K}_b^{(\lambda; r)}}\phi\|^2. \quad (18)$$

Обозначим через $S_{b,b'}^{(\lambda; r)}(N)$, где $N \in \Lambda^*$, число векторов $N' \in \mathcal{K}_{b'}$ таких, что $N' - N \in \mathcal{K}_b^{(\lambda; r)}$; $S_{b,b'}^{(\lambda; r)}(N) \leq S_{b,b'}(N)$. Для $r \in (a, \kappa]$ и $b, b' \in [a, \kappa/4]$, $b \leq b'$, справедлива оценка

$$S_{b,b'}^{(\lambda; r)}(N) \leq c_8 v(K) b^2 r^{n-3} \min\{r, b'(b' + 2\pi|N - N_{\parallel}|)^{-1}\kappa\},$$

где $c_8 = c_8(n) > 0$, из которой следует, что для всех $\kappa > 8a$, $b, b' \in [a, \kappa/4]$, $b \leq b'$, $r \in (a, \kappa]$, $\lambda \in \{1, \dots, \lambda_0\}$, $\mathcal{V}'' \in L^2(K)$ и $\phi \in L^2(K)$

$$\begin{aligned} \|\hat{P}_{\mathcal{K}_{b'}}\mathcal{V}''\hat{P}_{\mathcal{K}_b^{(\lambda; r)}}\phi\| &\leq \left(\sum_{N \in \Lambda^*} S_{b,b'}^{(\lambda; r)}(N) |\mathcal{V}''_N|^2 \right)^{1/2} \|\phi^{\mathcal{K}_b^{(\lambda; r)}}\| \\ &\leq c_8^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}(K) b r^{\frac{n-3}{2}} \left(\sum_{N \in \Lambda^* : S_{b,b'}^{(\lambda; r)}(N) \neq 0} \min\left\{r, \frac{b'\kappa}{b' + 2\pi|N - N_{\parallel}|}\right\} |\mathcal{V}''_N|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi^{\mathcal{K}_b^{(\lambda; r)}}\|. \end{aligned} \quad (19)$$

Будем далее предполагать, что $\kappa \geq \kappa_0 > 8a\epsilon^{-1}$. Выберем число $J \in \mathbb{N}$, исходя из неравенств $2^{-J-3}\epsilon\kappa \leq a < 2^{-J-2}\epsilon\kappa$. Пусть

$$\mathcal{A}' = \left\{ N \in \Lambda^* : S_{b,b'}(N) \neq 0 \text{ и } 2\pi|N - N_{\parallel}| > \frac{1}{4}\epsilon\kappa \right\},$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{ N \in \Lambda^* : S_{b,b'}(N) \neq 0 \text{ и } 2\pi|N - N_{\parallel}| \leq 2^{-J-2}\epsilon\kappa \},$$

$\mathcal{A}_j = \{ N \in \Lambda^* : S_{b,b'}(N) \neq 0 \text{ и } 2^{-j-2}\epsilon\kappa < 2\pi|N - N_{\parallel}| \leq 2^{-j-1}\epsilon\kappa \}$, $j = 1, \dots, J$. Обозначим $\mathcal{V}(\mathcal{C}; x) = \sum_{N \in \mathcal{C}} \mathcal{V}_N e^{2\pi i(N, x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{C} = \mathcal{A}'$, $\tilde{\mathcal{A}}$ или $\mathcal{A}_j$. Так как $S_{b,b'}(N) \leq c_9(n)v(K)b^2b'(b' + 2\pi|N - N_{\parallel}|)^{-1}\kappa^{n-2}$, то (для всех $\phi \in L^2(K)$) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\hat{P}^{\mathcal{K}_{b'}} \mathcal{V}(\mathcal{A}'; \cdot) \hat{P}^{\mathcal{K}_b} \phi\| &\leq \left(\sum_{N \in \Lambda^* : 2\pi|N - N_{\parallel}| > \frac{1}{4}\epsilon\kappa} S_{b,b'}(N) |\mathcal{V}_N|^2 \right)^{1/2} \|\phi^{\mathcal{K}_b}\| \\ &\leq c_{10} b(b')^{1/2} \kappa^{(n-3)/2} \|\mathcal{V}\|_2 \|\phi^{\mathcal{K}_b}\|, \end{aligned} \quad (20)$$

где $c_{10} = 2\epsilon^{-1/2}c_9(n) > 0$. Для всех $j = 1, \dots, J$, полагая $r = r_j = 2^{-j+1}\kappa$ (тогда $2\pi|N - N_{\parallel}| \leq \frac{1}{4}\epsilon r_j$ для всех $N \in \mathcal{A}_j$), из (18) и (19) получаем оценку

$$\|\hat{P}^{\mathcal{K}_{b'}} \mathcal{V}(\mathcal{A}_j; \cdot) \hat{P}^{\mathcal{K}_b} \phi\| \leq c_{11} b(b'\kappa)^{1/2} r_j^{(n-4)/2} \|\mathcal{V}\|_2 \|\phi^{\mathcal{K}_b}\|, \quad (21)$$

где $c_{11} = 2\sqrt{2}(n-1)\epsilon^{-1/2}c_9(n) > 0$. Наконец,

$$\|\hat{P}^{\mathcal{K}_{b'}} \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{A}}; \cdot) \hat{P}^{\mathcal{K}_b} \phi\| \leq \|\mathcal{V}(\tilde{\mathcal{A}}; \cdot)\|_{\infty} \|\phi^{\mathcal{K}_b}\| \leq c_{12}(n)(b'a^{n-1})^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{V}\|_2 \|\phi^{\mathcal{K}_b}\|. \quad (22)$$

Доказываемая оценка следует из (20)–(22). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $n = 5$ (и фиксирован вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$; $e = |\gamma|^{-1}\gamma$). Найдутся универсальная постоянная $c > 0$ и число $c_1 = c_1(\Lambda) > 0$ такие, что для всех $\kappa \geq \kappa_0 = \kappa_0(\Lambda) > 0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^5$, всех функций $\mathcal{W} \in L_w^5(K)$ и $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_{\kappa/8}(k; \kappa))$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{W}\phi\| \leq \|\mathcal{W}\|_{5,w}(c\|\phi\|_* + c_1\kappa^{2/5}\|\phi\|).$$

ТЕОРЕМА 13. Пусть $n \geq 6$ (и фиксирован вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$; $e = |\gamma|^{-1}\gamma$). Найдется постоянная $c = c(n) > 0$ такая, что для всех $\kappa \geq \kappa_0 = \kappa_0(n, \Lambda) > 0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, всех функций $\mathcal{W} \in L_w^{2(n-3)}(K)$ и $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_{\kappa/8}(k; \kappa))$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{W}\phi\| \leq c a^{-(n-6)/(2(n-3))} \|\mathcal{W}\|_{2(n-3),w} (\|\phi\|_* + (a\kappa)^{1/2} \|\phi\|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 12 И 13. Пусть $\mathcal{W} \in L_w^p(K)$, $p \geq n$, $k \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 5$), $\kappa \geq \kappa_0 > 8a$. Как и при доказательстве теоремы 10, выберем число $L = L(\kappa) \in \mathbb{N}$ так, что $\kappa/8 \leq 2^L a < \kappa/4$, и определим для функции $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_{\kappa/8}) \subset \mathcal{H}(\mathcal{K}_{2^L a})$ функции $\phi^{(j)} = \phi^{\mathcal{K}_a^j}$, $j = 0, 1, \dots, L$ (см. (16)). Обозначим $\mathcal{V} = |\mathcal{W}|^2$, $\mathcal{V} \in L_w^{p/2}(K)$, $\|\mathcal{V}\|_{p/2, w} = \|\mathcal{W}\|_{p, w}^2$. Пусть $s > 0$ и $\mathcal{V}^{(1, s)}(x) = \mathcal{V}(x)$, если $\mathcal{V}(x) \leq s$, и $\mathcal{V}^{(1, s)}(x) = 0$ в противном случае, $x \in K$; $\mathcal{V}^{(2, s)}(\cdot) = \mathcal{V}(\cdot) - \mathcal{V}^{(1, s)}(\cdot)$. Из леммы 3 (при выборе подходящего числа $\kappa_0 > 0$ и при $\kappa \geq \kappa_0$) следует, что для всех $j, l = 0, 1, \dots, L$ справедливо неравенство

$$|(\phi^{(l)}, \mathcal{V}^{(2, s)} \phi^{(j)})| \leq c_7 a^{3/2} 2^{(j+l+\min\{j, l\})/2} \kappa^{(n-3)/2} \|\mathcal{V}^{(2, s)}\|_2 \|\phi^{(l)}\| \|\phi^{(j)}\|.$$

С другой стороны, $|(\phi^{(l)}, \mathcal{V}^{(1, s)} \phi^{(j)})| \leq s \|\phi^{(l)}\| \|\phi^{(j)}\|$. Поэтому с помощью леммы 1, полагая $s = a^{6/p} 2^{2(j+l+\min\{j, l\})/p} \kappa^{2(n-3)/p} \|\mathcal{V}\|_{p/2, w}$ (при $\|\mathcal{V}\|_{p/2, w} \neq 0$), получаем

$$|(\phi^{(l)}, \mathcal{V} \phi^{(j)})| \leq c_{13} a^{6/p} 2^{2(j+l+\min\{j, l\})/p} \kappa^{2(n-3)/p} \|\mathcal{V}\|_{p/2, w} \|\phi^{(l)}\| \|\phi^{(j)}\|, \quad (23)$$

где $c_{13} = 1 + c_7 c_4^{1/2}(p/2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W} \phi\| &\leq \sum_{j=0}^L \|\mathcal{W} \phi^{(j)}\| \\ &\leq c_{13}^{1/2} \|\mathcal{W}\|_{p, w} \left(a^{3/p} \kappa^{(n-3)/p} \|\phi^{(0)}\| + \sqrt{2} \sum_{j=0}^L (2^j a)^{3/p-1/2} \kappa^{(n-3)/p-1/2} \|\phi^{(j)}\|_* \right). \end{aligned}$$

Теоремы 12 и 13 при $n \neq 6$ непосредственно вытекают из полученной оценки при $p = 2p(n)$. Пусть $n = p = 6$. Из (23) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W} \phi\|^2 &\leq 2 \sum_{0 \leq l \leq j \leq L} |(\phi^{(l)}, \mathcal{V} \phi^{(j)})| \\ &\leq c_{14}(n) \|\mathcal{V}\|_{3, w} \left(a \kappa \|\phi^{(0)}\|^2 + \|\phi\|_*^2 + \sum_{1 \leq l \leq j \leq L} 2^{-(j-l)/6} \|\phi^{(l)}\|_* \|\phi^{(j)}\|_* \right) \\ &\leq c_{15} \|\mathcal{V}\|_{3, w} (a \kappa \|\phi^{(0)}\|^2 + \|\phi\|_*^2), \end{aligned}$$

где $c_{15} = 2(1 - 2^{-1/6})^{-1} c_{14}(n)$. Из последнего неравенства следует теорема 13 при $n = 6$. Теоремы 12 и 13 доказаны.

Теорема 5 вытекает из теорем 9–13, если принять во внимание оценку $\|\phi\|^2 \leq |\gamma| \times (2\pi\kappa)^{-1} \|\phi\|_*^2$, которая справедлива при всех $\kappa > 0$, $k \in \mathbb{R}^n$: $(k, \gamma) = \pi$ и $\phi \in \tilde{H}^1(K)$, и учесть, что $\|\mathcal{W}\|_{n, w}^{(\infty)} = 0$, если $\mathcal{W} \in L_w^p(K)$, $p > n \geq 3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Thomas L. E. Time-dependent approach to scattering from impurities in a crystal // *Comm. Math. Phys.* 1973. V. 33. P. 335–343.
- [2] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом // *Алгебра и анализ.* 1998. Т. 10. № 4. С. 1–36.
- [4] Sobolev A. Absolute Continuity of the Periodic Magnetic Schrödinger Operator. Res. Report no. 97/06: Univ. of Sussex, 1997; Preprint ESI № 495. Wien: Erwin Schrödinger Internat. Institute for Math. Phys., 1997.
- [5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // *Алгебра и анализ.* 1999. Т. 11. № 2. С. 1–40.
- [6] Kuchment P., Levendorskiĭ S. On absolute continuity of spectra of periodic elliptic operators // *Oper. Theory Adv. Appl.* 1999. V. 108. P. 291–297.
- [7] Shen Z. On Absolute Continuity of the Periodic Schrödinger Operators. Preprint ESI № 597. Wien: The Erwin Schrödinger Internat. Institute for Math. Phys., 1998; Preprint # 99-189: Texas Math. Physics Archive, 1999.
- [8] Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace–Beltrami operator with periodic electro-magnetic potential // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1998. V. 31. P. 7593–7601.
- [9] Morame A. The Absolute Continuity of the Spectrum of the Maxwell Operator in Periodic Media. Preprint # 99-308: Texas Math. Physics Archive, 1999.
- [10] Данилов Л. И. Оценки резольвенты и спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом // *ТМФ.* 1995. Т. 103. № 1. С. 3–22.
- [11] Данилов Л. И. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака // *Дифференц. уравнения.* 2000. Т. 36. № 2. С. 233–240.
- [12] Данилов Л. И. О спектре двумерного периодического оператора Дирака // *ТМФ.* 1999. Т. 118. № 1. С. 3–14.
- [13] Данилов Л. И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. III. Деп. ВИНТИ № 2252-B92 (10.07.92). Ижевск: ФТИ УрО РАН, 1992.
- [14] Birman M. Sh., Suslina T. A. The Periodic Dirac Operator is Absolutely Continuous. Preprint ESI № 603. Wien: Erwin Schrödinger Internat. Institute Math. Phys., 1998.
- [15] Данилов Л. И. О спектре периодического оператора Дирака // *ТМФ.* 2000. Т. 124. № 1. С. 3–17.
- [16] Данилов Л. И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шрёдингера и Дирака. I. Деп. ВИНТИ № 1683-B00 (15.06.00). Ижевск: ФТИ УрО РАН, 2000.
- [17] Kuchment P. Floquet Theory for Partial Differential Equations. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993.
- [18] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
- [19] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.