Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Е. Базилевич, Топология гиперпространства выпуклых тел постоянной ширины, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 813–819

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 10:04:44

УДК 515.12

ТОПОЛОГИЯ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Л. Е. Базилевич

Доказано, что гиперпространство всех выпуклых тел постоянной ширины в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, гомеоморфно стягиваемому Q -многообразию (через Q обозначается гильбертов куб). В доказательстве используется явно построенная ретракция всего гиперпространства выпуклых тел на гиперпространство выпуклых тел постоянной ширины.

Библиография: 4 названия.

Исследование гиперпространства выпуклых компактов методами бесконечномерной топологии началось с работы [1], в которой доказано, что гиперпространство выпуклых компактов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ гомеоморфно дополнению точки в гильбертовом кубе

$$Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i.$$

Этот результат открыл возможность для описания топологии гиперпространств компактных выпуклых тел, обладающих некоторыми дополнительными геометрическими свойствами [2], [3]. В настоящей работе рассмотрено гиперпространство выпуклых тел постоянной ширины в $\mathbb{R}^n$. Полученный результат является аналогом упоминаемого выше результата из [1]. Прежде чем переходить к его формулировке, приведем необходимые определения.

Проективное пространство $\mathbb{RP}^{n-1}$ рассматриваем как пространство прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^n$. Говорим, что прямая, отрезок, луч и т.п. в $\mathbb{R}^n$ имеют направление $l \in \mathbb{RP}^{n-1}$, если они параллельны l .

Рассмотрим произвольное направление l . Каждое компактное выпуклое тело расположено между двумя опорными гиперплоскостями, ортогональными l . Расстояние между этими гиперплоскостями обозначим через $\text{diam}(A, l)$. Тело A называется *телом постоянной ширины* d , если $\text{diam}(A, l) = d$ для всех l .

Обозначим через $\mathcal{M}$ гиперпространство всех выпуклых тел в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$; оно наделяется метрикой Хаусдорфа

$$d(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}, \quad A, B \in \mathcal{M}.$$

Через $\mathcal{N}$ обозначим подпространство в $\mathcal{M}$, состоящее из всех выпуклых тел постоянной ширины.

ТЕОРЕМА. При $n \geq 2$ гиперпространство $\mathcal{N}$ гомеоморфно стягиваемому Q -многообразию.

Доказательство этой теоремы основано на следующей характеристизационной теореме Торуньчика для Q -многообразий.

ТЕОРЕМА [4]. Локально компактное пространство $X \in \text{ANR}$ гомеоморфно Q -многообразию, если и только если оно удовлетворяет свойству дизъюнктивной аппроксимации.

Здесь свойство дизъюнктивной аппроксимации означает, что для каждой непрерывной функции $\varepsilon: X \rightarrow (0, +\infty)$ существуют непрерывные отображения $f_\varepsilon, g_\varepsilon: X \rightarrow X$ такие, что $f_\varepsilon(X) \cap g_\varepsilon(X) = \emptyset$ и $d(f_\varepsilon(x), x) < \varepsilon(x)$, $d(g_\varepsilon(x), x) < \varepsilon(x)$.

Нам понадобятся некоторые свойства выпуклых тел постоянной ширины. Доказательства наиболее простых из них предоставляются читателю. Пусть A – выпуклое тело постоянной ширины $d > 0$. Через $w_i(A, l)$, $i = 1, 2$, обозначим опорные гиперплоскости тела A в направлении l .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Множества $w_i(A, l) \cap A$, $i = 1, 2$, являются точками для произвольного направления l . Отрезок, соединяющий эти точки, имеет направление l .

В дальнейшем, отрезок, о котором идет речь в предложении 1, называется *диаметром тела A в направлении l* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для произвольной точки $a \in \text{Bd } A$ существует направление l такое, что одна из опорных гиперплоскостей к телу A в направлении l пересекается с A по точке a .

Через $C(A)$ обозначим множество точек $a \in A$, принадлежащих более чем одному диаметру тела A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $d(C(A), \text{Bd } A) > 0$, то отображение $p: \text{Bd } A \rightarrow \exp A$, ставящее в соответствие каждой точке $a \in \text{Bd } A$ диаметр тела A с концом в этой точке, является непрерывным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Тело постоянной ширины является объединением всех своих диаметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[b_l, c_l]$ – диаметр направления l тела A и $T = \bigcup \{[b_l, c_l] \mid l \in \mathbb{RP}^{n-1}\}$. Предположим, что существует точка $a \in A \setminus T$. Поскольку T – замкнутое множество и $\text{Bd } A \subset T$, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $K(a, \varepsilon) \subset A \setminus T$. Пусть $d \in \text{Bd } A$ – точка, в которой реализуется $\max\{d(a, d') \mid d' \in \text{Bd } A\}$, а l_0 – направление прямой (a, d) . Очевидно, что $d(a, d) \geq \frac{1}{2} \text{diam } A$. Пусть $[b_{l_0}, c_{l_0}]$ – диаметр направления l_0 , причем его концы обозначены так, что $[b_{l_0}, d] \cap [c_{l_0}, a] = \emptyset$. Из определения точки d вытекает, что $d(b_{l_0}, a) \leq d(d, a)$. Но тогда легко видеть, что $d(c_{l_0}, d) > d(c_{l_0}, b_{l_0}) = \text{diam } A$. Это противоречие показывает, что $A = T$.

Укажем универсальный способ построения выпуклых тел постоянной ширины в $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем счетную всюду плотную последовательность $(l_i)_{i=1}^\infty$ направлений $l_i \in \mathbb{RP}^{n-1}$. Методом математической индукции по k построим выпуклое тело A постоянной ширины $d > 0$.

Пусть $k = 1$. Зафиксируем произвольный отрезок $[a_1, b_1]$ длины d и направления l_1 . Положим $T(a_1, b_1) = \text{Cl}(K(a_1, d) \cap K(b_1, d))$. Легко видеть, что $T(a_1, b_1)$ – выпуклое тело ширины не меньше d , т.е. $\text{diam}(T(a_1, b_1), l) \geq d$ для всех $l \in \mathbb{RP}^n$ и $\text{diam}(T(a_1, b_1), l_1) = d$. Положим $A_1 = T(a_1, b_1)$.

Пусть $k = 2$. Отрезок $[a_2, b_2]$ длины d и направления l_2 выберем так, чтобы он удовлетворял условию $[a_2, b_2] \subset T(a_1, b_1)$. Легко видеть, что при этом $[a_1, b_1] \subset T(a_2, b_2)$. Множество $A_2 = A_1 \cap T(a_2, b_2)$ является выпуклым телом ширины не меньше d и $\text{diam}(A_2, l_j) = d$ при $j = 1, 2$.

Предположим, что построение уже осуществлено для $k = 1, 2, \dots, n-1$, и проведем его для $k = n$. Отрезок $[a_n, b_n]$ длины d и направления l_n выберем из условия $[a_n, b_n] \subset A_{n-1}$. Это возможно, поскольку A_{n-1} – выпуклое тело ширины не меньше d . Положим $A_n = A_{n-1} \cap T(a_n, b_n)$. Тогда A_n – выпуклое тело ширины не меньше d и $\text{diam}(A_n, l_j) = d$ для $j = 1, 2, \dots, n$.

Положим

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} T(a_i, b_i).$$

Множество A является выпуклым телом постоянной ширины d , причем

$$A = \text{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]\right).$$

Легко видеть, что таким образом мы можем получить все выпуклые тела постоянной ширины. Сделаем несколько замечаний к построению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Имеет место равномерная непрерывность построения, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для произвольных двух выпуклых тел*

$$A' = \text{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [a'_i, b'_i]\right), \quad A'' = \text{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [a''_i, b''_i]\right)$$

постоянной ширины d с условием $[a'_i, b'_i] = [a''_i, b''_i]$ для $i = 1, \dots, n_\varepsilon$ выполнено $d(A', A'') < \varepsilon d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть*

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} T(a_i, b_i)$$

– выпуклое тело постоянной ширины d такое, что $d(C(A), \text{Bd } A) \geq \varepsilon > 0$. Тогда для произвольного номера n существует угол $\theta(\varepsilon, n)$, $\theta(\varepsilon, n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ такой, что произвольные отрезки вида $[a_j, c]$, $[b_j, c]$ длины d и направления, отличающегося от направления отрезка $[a_j, b_j]$ на угол не больший $\theta(\varepsilon, n)$, принадлежат множеству

$$A_n = \bigcap_{i=1}^n T(a_i, b_i).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть B – выпуклое тело ширины не меньше d . Для произвольного отрезка $[a, b]$ длины $d' \leq d$ существует единственный отрезок $[a', b'] \subset B$ той же длины и направления, что и $[a, b]$, являющийся ближайшим к $[a, b]$ в метрике Хаусдорфа. Соотношение $[a, b] \mapsto [a', b']$ непрерывно зависит от B .

В дальнейшем условимся считать, что концы диаметров одного направления обозначены с учетом ориентации направления, а именно: предполагаем, что диаметры $[a', b']$ и $[a'', b'']$ выпуклых тел A' и A'' соответственно обозначены так, что $[a', a''] \cap [b'', b'] = \emptyset$.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Пусть $\varepsilon: \mathcal{N} \rightarrow (0, +\infty)$ – непрерывная функция. Для произвольного $A \in \mathcal{N}$ положим $f_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq \varepsilon(A)\}$. Легко видеть, что $f_\varepsilon(A)$ – выпуклое тело постоянной ширины $\text{diam } A + 2\varepsilon(A)$. Имеем $d(A, f_\varepsilon(A)) = \varepsilon$ и, кроме того, $d(\text{Bd}(f_\varepsilon(A)), C(f_\varepsilon(A))) \geq \varepsilon(A)$ для произвольного $A \in \mathcal{N}$.

Построим отображение g_ε . Пусть $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Произвольное $f_{\varepsilon'}(A)$ можно представить в виде

$$\text{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]\right),$$

как описано выше. Ясно, что $d(\text{id}, f_{\varepsilon'}) = \varepsilon'$.

Для выпуклого тела $f_{\varepsilon'}(A)$ и для числа $\delta(A) = \varepsilon(A)/(2 \text{diam } A)$ выберем номер $n_{\delta(A)}$ из предложения 5. Из предложения 6 для номера $n_{\delta(A)}$ получим число $\theta(\varepsilon(A)/2, n_{\delta(A)})$. Выберем произвольную непрерывную функцию $t: \mathcal{N} \rightarrow (0, \pi/2)$ такую, что $0 < t(A) < \theta(\varepsilon(A)/2, n_{\delta(A)})$, $A \in \mathcal{N}$. Положим $G_1(A) = \cap \{T(a_1, c) \mid d(a_1, c) = d(a_1, b_1) \text{ и угол } \angle ca_1 b_1 \text{ не больше } t(A)\}$. Из сказанного выше легко видно, что $[a_j, b_j] \subset G_1(A)$ для $j = 2, \dots, n_{\delta(A)}$, поэтому полагаем

$$G_2(A) = G_1(A) \cap T(a_2, b_2), \quad \dots, \quad G_{n_{\delta(A)}}(A) = G_{n_{\delta(A)}-1}(A) \cap T(a_{n_{\delta(A)}}, b_{n_{\delta(A)}}).$$

Очевидно, что все $G_j(A)$, $j = 1, \dots, n_{\delta(A)}$, – выпуклые тела ширины не меньше $\text{diam } A + \varepsilon(A)$.

Для следующих шагов $n_{\delta(A)} + k$, $k = 1, 2, \dots$, выберем диаметры $[a'_{n_{\delta(A)}+k}, b'_{n_{\delta(A)}+k}]$ так, чтобы они были ближайшими к диаметрам $[a_{n_{\delta(A)}+k}, b_{n_{\delta(A)}+k}]$ и принадлежали выпуклому телу

$$G_{n_{\delta(A)}+k-1}(A) = G_{n_{\delta(A)}}(A) \cap \bigcap_{i=n_{\delta(A)}+1}^{n_{\delta(A)}+k-1} T(a'_i, b'_i)$$

(см. предложение 7). Положим

$$g_\varepsilon(A) = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i(A).$$

Легко видеть, что $g_\varepsilon(A)$ – выпуклое тело постоянной ширины и $d(A, g_\varepsilon(A)) \leq \varepsilon(A)/2 + \delta(A) \text{diam } A = \varepsilon(A)$. Поскольку $a_1 \in C(g_\varepsilon(A))$, то $d(\text{Bd}(g_\varepsilon(A)), C(g_\varepsilon(A))) = 0$. Отсюда вытекает, что $d(g_\varepsilon, \text{id}) < \varepsilon$ и $f_\varepsilon(\mathcal{N}) \cap g_\varepsilon(\mathcal{N}) = \emptyset$. Следовательно, пространство $\mathcal{N}$ удовлетворяет условию дизъюнктивной аппроксимации.

Покажем, что гиперпространство $\mathcal{N}$ является ретрактом гиперпространства $\mathcal{M}$. Для произвольного выпуклого тела A существует замкнутый шар $K \subset A$ наибольшего радиуса $r(A)$, причем возможно неединственный. Но среди всех таких шаров единственный является ближайшим к A в метрике Хаусдорфа. Обозначим через $d(A)$ максимальный диаметр всех выпуклых тел постоянной ширины B , содержащихся в A . Очевидно, что $d(A) \geq 2r(A)$. Однако, среди всех выпуклых тел постоянной ширины $d(A)$ расстояние Хаусдорфа к A реализуется не единственным образом.

Зафиксируем произвольное $A \in \mathcal{M}$. Через $\mathcal{L}(A)$ обозначим множество всех выпуклых тел $B \subset A$ постоянной ширины $d(A)$. Для каждого $B \in \mathcal{L}(A)$ обозначим через $V(B, l_1)$ центр диаметра направления l_1 . Положим $V(l_1) = \{V(B, l_1) \mid B \in \mathcal{L}(A)\}$.

ЛЕММА. $V(l_1)$ является ограниченным замкнутым выпуклым множеством без внутренних точек, т.е. не более чем $(n-1)$ -мерным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что множество $V(l_1)$ ограничено и имеет пустую внутренность. Покажем замкнутость этого множества. Пусть $\{M_i\}_{i=1}^\infty$, $M_i \in V(l_1)$, – произвольная сходящаяся в A последовательность. Обозначим через $\{[N_i^1, L_i^1]\}_{i=1}^\infty$ последовательность сегментов $[N_i^1, L_i^1]$ направления l_1 и длины $d(A)$, центрами которых являются точки M_i . Фиксируем произвольное $B_i \in \mathcal{L}(A)$ такое, что $[N_i^1, L_i^1]$ является для B_i диаметром направления l_1 . Из замкнутости A вытекает, что сегмент

$$[N^1, L^1] = \lim_{i \rightarrow \infty} [N_i^1, L_i^1]$$

принадлежит телу A и его центр – точка M – является пределом последовательности $\{M_i\}_{i=1}^\infty$. Построение выпуклого тела $B \in \mathcal{L}(A)$ с диаметром $[N^1, L^1]$ будем проводить по индукции.

Во всех телах B_i проведем диаметры $[N_i^2, L_i^2]$ направления l_2 . Из последовательности $\{[N_i^2, L_i^2]\}_{i=1}^\infty$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{[N_{k_i}^2, L_{k_i}^2]\}_{i=1}^\infty$. Очевидно, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [N_{k_i}^2, L_{k_i}^2] = [N^2, L^2]$$

принадлежит A . Предположим, что сегменты $[N^j, L^j]$ направлений l_j , $j \geq 2$, уже построены. Через $[N^{j+1}, L^{j+1}]$ обозначим предел сходящейся подпоследовательности $\{[N_{k_i^{j+1}}^{j+1}, L_{k_i^{j+1}}^{j+1}]\}_{i=1}^\infty$ последовательности $\{[N_{k_i^j}^{j+1}, L_{k_i^j}^{j+1}]\}_{i=1}^\infty$ диаметров направления l^{j+1} выпуклых тел $B_{k_i^j}$. Легко видеть, что выпуклое тело

$$B = \lim_{i \rightarrow \infty} B_{k_i^i} = \text{Cl}(\cup\{[N^i, L^i] \mid i = 1, 2, \dots\})$$

является искомым.

Теперь покажем выпуклость множества $V(l_1)$. Пусть $M_1, M_2 \in V(l_1)$. Достаточно показать, что середина M_3 отрезка $[M_1, M_2]$ также принадлежит множеству $V(l_1)$, т.е. существует выпуклое тело $B^* \in \mathcal{L}(A)$, имеющее диаметр $[N_3, L_3]$ в направлении l_1 , серединой которого является точка M_3 .

Пусть $[N_k^1, L_k^1]$, $k = 1, 2$, – соответствующие сегменты длины $d(A)$, середины которых находятся в точках M_k . Зафиксируем некоторые выпуклые тела $B_k \subset \mathcal{L}(A)$, $k = 1, 2$, для которых сегменты $[N_k^1, L_k^1]$ являются диаметрами направления l_1 .

Для произвольного $j = 2, 3, \dots$ обозначим через $[N_k^j, L_k^j]$, $k = 1, 2$, диаметры тел B_k направления l_j . Будем предполагать, что буквы N и L употребляются согласованно, т.е. всегда $[N_1^j, N_2^j] \cap [L_1^j, L_2^j] = \emptyset$. Обозначим через N_3^j и L_3^j середины отрезков $[N_1^j, N_2^j]$ и $[L_1^j, L_2^j]$ соответственно. Из выпуклости A вытекает, что $N_3^j, L_3^j \in A$, т.е. $[N_3^j, L_3^j] \subset A$. Очевидно, что отрезок $[N_3^j, L_3^j]$ имеет направление l_j и длину $d(A)$. Покажем, что

$$B^* = \text{Cl}(\cup\{[N_3^j, L_3^j] \mid j = 1, 2, \dots\}) \subset \mathcal{L}(A).$$

Из выпуклости и замкнутости A вытекает, что $B^* \subset A$. Остается показать, что B^* – тело постоянной ширины.

Легко видеть, что для того чтобы $\text{diam}(B^*, l_i) = d(A)$ необходимо и достаточно, чтобы $B^* \subset T(N_3^i, L_3^i)$. Это в свою очередь будет выполняться, если для произвольных $i \neq j$ $[N_3^j, L_3^j] \subset T(N_3^i, L_3^i)$. Поскольку $[N_1^j, L_1^j] \subset T(N_1^i, L_1^i)$ и $[N_2^j, L_2^j] \subset T(N_2^i, L_2^i)$, то, сдвинув первую картину на вектор $\frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i) = \frac{1}{2}(L_2^i - L_1^i)$, а вторую – на противоположный вектор $\frac{1}{2}(N_1^i - N_2^i)$, получим

$$\begin{aligned} \left[N_1^j + \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i), L_1^j + \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i)\right] &\subset T(N_1^i, L_1^i) + \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i) = T(N_3^i, L_3^i), \\ \left[N_2^j - \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i), L_2^j - \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i)\right] &\subset T(N_2^i, L_2^i) - \frac{1}{2}(N_1^i - N_2^i) = T(N_3^i, L_3^i). \end{aligned}$$

Поскольку множество $T(N_3^i, L_3^i)$ выпукло, оно содержит и середины отрезков

$$\left[N_1^j + \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i), N_2^j - \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i)\right] \quad \text{и} \quad \left[L_1^j + \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i), L_2^j - \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i)\right],$$

точки N' и L' соответственно. Но

$$\begin{aligned} N' &= N_1^j + \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i) + \frac{1}{2}\left[\left(N_2^j + \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i)\right) - \left(N_1^j - \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i)\right)\right] \\ &= N_1^j + \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i) + \frac{1}{2}(N_2^j - N_1^j) - \frac{1}{2}(N_2^i - N_1^i) = N_1^j + \frac{1}{2}(N_2^j - N_1^j) = N_3^j \end{aligned}$$

и, аналогично, $L' = L_3^j$. Значит, $[N_3^j, L_3^j] \subset T(N_3^i, L_3^i)$, что и требовалось доказать. Отсюда получаем, что $\text{diam}(B^*, l) = d(A)$ для всех направлений l . Это завершает доказательство леммы.

Обозначим через $V^*(l_1)$ центр масс множества $V(l_1)$, а через $[N_1, L_1]$ – диаметр, которому принадлежит точка $V^*(l_1)$. Пусть $\mathcal{L}(A, l_1)$ – множество всех тел $B \subset A$ постоянной ширины $d(A)$, имеющих своим диаметром направления l_1 отрезок $[N_1, L_1]$.

Рассмотрим направление l_2 . Для каждого тела $B \in \mathcal{L}(A, l_1)$ зафиксируем точку $V(B, l_2)$ – центр диаметра направления l_2 . Согласно лемме множество $V(l_1, l_2) = \{V(B, l_2) \mid B \in \mathcal{L}(A, l_1)\}$ является выпуклым замкнутым множеством с пустой внутренностью. Обозначим через $V^*(l_1, l_2)$ центр масс этого множества, а через $[N_2, L_2]$ – диаметр направления l_2 , которому принадлежит точка $V^*(l_1, l_2)$. Через $\mathcal{L}(A; l_1, l_2)$ обозначим множество всех тел $B \in \mathcal{L}(A, l_1)$, содержащих диаметр $[A_2, B_2]$.

Далее проводим построение по индукции. Предположим, что мы уже рассмотрели направления $l_1, \dots, l_{n-1}$, где $n \geq 2$. Для каждого $B \in \mathcal{L}(A; l_1, \dots, l_{n-1})$ зафиксируем точку $V(B, l_n)$ – центр диаметра направления l_n . Пусть $V^*(l_1, \dots, l_n)$ – центр масс

множества $V(l_1, \dots, l_n) = \{V(B, l_n) \mid B \in \mathcal{L}(A; l_1, \dots, l_{n-1})\}$, а $[N_n, L_n]$ – диаметр направления l_n , содержащий точку $V^*(l_1, \dots, l_n)$. Через $\mathcal{L}(A; l_1, \dots, l_n)$ обозначим множество всех тел $B \in \mathcal{L}(A; l_1, \dots, l_{n-1})$, содержащих диаметр $[A_n, B_n]$.

По построению

$$\mathcal{L}(A, l_1) \supset \mathcal{L}(A; l_1, l_2) \supset \mathcal{L}(A; l_1, l_2, l_3) \supset \dots$$

Множество

$$\bigcap \{\mathcal{L}(A; l_1, l_2, \dots, l_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

непусто и замкнуто в метрике Хаусдорфа в $\text{exp } \mathbb{R}^n$, и все элементы этого множества обязаны содержать все диаметры $[N_n, L_n]$. Но эти диаметры берутся из всюду плотного множества направлений и поэтому однозначно определяют тело, содержащее их. Это единственное выпуклое тело мы обозначим через $r(A)$.

Очевидно, что определенное таким образом отображение $r: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ непрерывно и является ретракцией. Таким образом, пространство $\mathcal{N}$, являясь ретрактом AR-пространства $\mathcal{M}$, само является AR-пространством. По теореме Торунчика $\mathcal{N}$ является Q -многообразием.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nadler S., Quinn J. E., Stavrokas N. M. Hyperspaces of compact convex sets // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1977. V. 25. № 4. P. 381–385.
- [2] Базилевич Л. Е. Про одну екзотичну псевдовнутрішність у гіперпросторі опуклих компактів // Мат. методи і фіз.-мех. поля. 1991. Т. 34. С. 15–18.
- [3] Bazylevych L. E. On the hyperspace of strictly convex bodies // Матем. Студії. 1993. Т. 2. С. 83–86.
- [4] Toruńczyk H. CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds // Fund. Math. 1980. V. 106. № 1. P. 31–40.

Государственный университет “Львовская политехника”

Поступило
14.04.95