Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Карпушкин, Число компонент дополнения к гиперповерхности уровня частично гармонического полинома, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 831–835

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1672>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:45:20

УДК 513.62

ЧИСЛО КОМПОНЕНТ ДОПОЛНЕНИЯ К ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ ЧАСТИЧНО ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

В. Н. Карпушкин

Известно, что число компонент дополнения к множеству нулей полинома степени m в $\mathbb{R}^n$ не превосходит $m^n + O(m^{n-1})$. В работе рассматриваются k -гармонические полиномы F в $\mathbb{R}^n$, т.е. удовлетворяющие уравнению Лапласа по части переменных: $(\partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_k^2)F = 0$. Здесь $1 \leq k \leq n$, $n \geq 2$. Показано, что число компонент дополнения к гиперповерхности уровня такого полинома степени m не превосходит $2m^{n-1} + O(m^{n-2})$. Получены более точные оценки при предположении компактности множества особых точек гиперповерхности уровня или неособости главной однородной части k -гармонического полинома.

Библиография: 8 названий.

Известно, что число компонент дополнения к множеству нулей полинома степени m в $\mathbb{R}^n$ не превосходит $m^n + O(m^{n-1})$ (см. [1]). В настоящей работе рассматриваются k -гармонические полиномы F в $\mathbb{R}^n$, т.е. удовлетворяющие уравнению Лапласа по части переменных:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right) F = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 2.$$

Показано, что число компонент дополнения к гиперповерхности уровня полинома F не превосходит $2m^{n-1} + O(m^{n-2})$. Получены более точные оценки при предположении компактности множества особых точек гиперповерхности уровня или неособости главной однородной части k -гармонического полинома.

1. Формулировка результатов. Пусть W_c – гиперповерхность уровня c для k -гармонического полинома F степени m в $\mathbb{R}^n$. Пусть V – регулярное пересечение квадрики и гиперповерхности степени m в $\mathbb{CP}^n$. Сумма чисел Бетти для V с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, т.е. $\text{rank } H_*(V)$, зависит только от m , n и равна

$$n - 2 + 2m + 2 \frac{(m-1)^3(m-1)^{n-2} - 1}{m(m-2)}, \quad \text{если } n \text{ четное, } m \geq 3;$$

$$n - 5 + 2m + 2 \left(\frac{(m-1)^3(m-1)^{n-2} - 1}{m(m-2)} + \frac{1}{m} \right), \quad \text{если } n \text{ нечетное, } m \geq 3$$

(см. [1, с. 58]).

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS, грант № 4773.

ТЕОРЕМА 1. *Выполнено неравенство*

$$\operatorname{rank} H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_c) \leqslant \operatorname{rank} H_*(V).$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что множество особых точек гиперповерхности W_c компактно. Тогда*

$$\operatorname{rank} H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_c) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{rank} H_*(V) + 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числом Петровского назовем число целых точек строго внутри куба $(0, m)^n$, лежащих на проходящей через центр куба гиперплоскости, перпендикулярной главной диагонали.

Обозначим его через

$$\Pi_n(m) = \#\left\{k = (k_1, \dots, k_n) : 0 < k_s < m, \sum k_s = \frac{1}{2}mn\right\}$$

(см. [2]).

Для неособой гиперповерхности U степени m в $\mathbb{CP}^{n-1}$ сумма чисел Бетти по $\mathbb{Z}_2$, т.е. $\operatorname{rank} H_*(U)$, зависит только от m, n и равна

$$\frac{(m-1)^n + (-1)^n}{m} + n + (-1)^{n+1}$$

(см. [1, с. 52]).

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что главная однородная часть полинома F неособая в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\operatorname{rank} H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_c) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{rank} H_*(U) + \Pi_n(m) + 1) + 1, & \text{если } n \text{ четное,} \\ \operatorname{rank} H_*(U) + 1, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть W_c содержит конечное множество критических точек полинома F . Тогда $\operatorname{rank} H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_c) \geqslant \operatorname{rank} H_0(W_c) + 1$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть гиперповерхность W_c содержит конечное число критических точек полинома F . Тогда*

- 1) $\operatorname{rank} H_0(W_c) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{rank} H_*(V)$;
- 2) *если предположить, что главная однородная часть полинома F неособая, то*

$$\operatorname{rank} H_0(W_c) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{rank} H_*(U) + \Pi_n(m) + 1) & \text{при } n \text{ четном,} \\ \operatorname{rank} H_*(U) & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В настоящей работе используются теоремы алгебраической геометрии и принцип максимума. Если предположить, что $k = n$, то можно воспользоваться теоремой Куранта (см. [3]). Пусть сужение на сферу с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$ главной однородной части гармонического полинома F имеет на гиперповерхности уровня 0 только невырожденные критические точки. Тогда

$$\text{rank } H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_c) \leq 2(C_{n+m-3}^{n-1} + 1), \quad n \geq 2$$

(см. [4]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если

$$F = \sum_j p_j(x_1, \dots, x_k) f_j(x_{k+1}, \dots, x_n),$$

где p_j – полиномы от $x_1, \dots, x_k$, то F будет k -гармоничен при условии, что все p_j – гармонические полиномы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть главная однородная часть полинома F неособая в 0. Тогда существует компакт в $\mathbb{R}^n$, вне которого $\text{grad } F$ не обращается в 0. Таким образом, каждая гиперповерхность W_c уровня c имеет компактное множество особых точек.

2. Доказательство результатов. Докажем сперва теорему 1. Пусть S_r^{n-1} – сфера радиуса r в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0.

ЛЕММА 1. Пусть W_c – гиперповерхность уровня c для k -гармонического полинома F в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Тогда найдется r_0 такое, что

$$\text{rank } H_0(S_r^{n-1} \setminus W_c) \geq \text{rank } H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_c)$$

при $r \geq r_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^n \setminus W_c$. В силу того что F – полином, размерность A равна n . Тогда A – открытое множество и строго внутри A лежит экстремум полинома F . В силу k -гармоничности полинома F получим противоречие. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Для всех $c \in \mathbb{R}$, $r > 0$ найдется ε такое, что $W_{c \pm \varepsilon} \cap S_r^{n-1}$ – неособые многообразия или пустые множества и

$$\text{rank } H_0(W_{c+\varepsilon} \cap S_r^{n-1}) + \text{rank } H_0(W_{c-\varepsilon} \cap S_r^{n-1}) \geq \text{rank } H_0(S_r^{n-1} \setminus W_c).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из конечности числа критических значений у сужения полинома F на сферу S_r^{n-1} , $r > 0$. Последнее вытекает из следствия 2.8 работы [5].

Таким образом, из теоремы Смита [1, с. 53] получаем, что

$$\text{rank } H_0(S_r^{n-1} \setminus W_c) \leq \text{rank } H_*(V).$$

Отсюда и из леммы 1 следует теорема 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из следствия 2.8 работы [5] получим, что для всякого c существует r_0 такое, что при $r \geq r_0$ $W_c \setminus S_r^{n-1}$ есть регулярное пересечение. Теперь из теоремы Смита [1] и леммы 1 получим доказательство теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $F = f_0 + \dots + f_m$, f_i — однородная форма степени i полинома F . Положим

$$D = \{x \in \mathbb{RP}^{n-1} : f_m(x) = 0\}, \quad B_r = \{x \in S_r^{n-1} : f_m(x) = 0\}.$$

Легко видеть, что $\text{rank } H_0(B_r) \leq 2 \text{rank } H_0(D)$ при всех $r > 0$. Из неособости D , работ [2], [6] и теоремы Смита [1] при четном n имеем

$$\text{rank } H_0(D) \leq \frac{1}{4} (\Pi_n(m) + 1 + \text{rank } H_*(U)),$$

при нечетном n из теоремы Смита [1] следует, что

$$\text{rank } H_0(D) \leq \frac{1}{2} \text{rank } H_*(U).$$

Таким образом, получили оценку сверху $\text{rank } H_0(B_r)$.

Из неособости формы f_m следует, что B_r — неособое многообразие при всех $r > 0$. Для каждого значения c найдется $r_0(c)$ такое, что при $r \geq r_0(c)$ $W_c \cap S_r^{n-1}$ будет малым возмущением для B_r , так что топология $W_c \cap S_r^{n-1}$ такая же, как у B_r , и, в частности, $W_c \cap S_r^{n-1}$ — неособое многообразие. Отсюда и из леммы 1 следует теорема 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Из принципа максимума для k -гармонических полиномов и конечности множества критических точек полинома F на W_c следует, что W_c не имеет компонент связности, состоящих из особых точек. Таким образом, каждая компонента связности множества W_c содержит неособые точки и поэтому (см. [7]) имеет хотя бы один $(n-1)$ -мерный цикл в гомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Ранг группы $(n-1)$ -гомологий W_c с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ будет, таким образом, не меньше, чем число компонент связности W_c . Однако, группа 0-мерных гомологий дополнений к гиперповерхности, приведенная по модулю точки, двойственна по Александру к группе $H_{n-1}(W_c, \mathbb{Z}_2)$. Отсюда имеем $\text{rank } H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_c) \geq \text{rank } H_0(W_c) + 1$. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Доказанные выше теоремы уточняют соответствующие результаты работы [8] и исправляют ошибки в приведенных там доказательствах.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для получения k -гармонического ($k = 2p$) полинома F с неособой главной однородной частью достаточно взять

$$F = f(x_1, \dots, x_k) + g(x_{k+1}, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n),$$

где f, g — однородные полиномы степени m , $f = \text{Re } Q$, где Q — однородный полином в $\mathbb{C}^p$ с изолированной критической точкой в $0 \in \mathbb{C}^p$, g имеет изолированную критическую точку в $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$. Здесь h k -гармоничен и имеет степень меньше, чем m .

Автору неизвестно, точны ли по порядку (по степени) полученные в работе оценки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. Т. 29. № 4. С. 3–79.
- [2] Арнольд В. И. Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского–Олейник и смешанные структуры Ходжа // Функцион. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 1. С. 1–14.
- [3] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1933.
- [4] Карпушкин В. Н. Число компонент дополнения к гиперповерхности уровня гармонического полинома // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1981. № 4. С. 3–4.
- [5] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
- [6] Петровский И. Г., Олейник О. А. О топологии действительных алгебраических гиперповерхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13. С. 389–402.
- [7] Borel A., Haefliger A. La classe d'homologie fondamentale des variétés analytiques // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1958. V. 2. P. 49–96.
- [8] Карпушкин В. Н. Точные по порядку оценки числа компонент дополнения к нулям гармонических полиномов // Функцион. анализ и его прилож. 1985. Т. 19. № 4. С. 55–60.

Институт проблем передачи информации РАН

Поступило

22.09.95

Исправленный вариант

15.05.97