Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Клебанов, В. В. Филиппов, Об ацикличности множества решений задачи Коши для дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 836–842

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1673>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 07:09:09

УДК 517.91

ОБ АЦИКЛИЧНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. С. Клебанов, В. В. Филиппов

С позиций аксиоматической теории пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается свойство, характеризующее ацикличность множества решений задачи Коши. Доказана замкнутость класса пространств решений, обладающих этим свойством, относительно перехода к предельному пространству.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. В середине восьмидесятых годов одним из авторов этой работы была предложена аксиоматическая теория пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1]–[3]). В рамках этой теории рассматриваются семейства непрерывных функций, удовлетворяющих тому или иному набору аксиом, отражающих свойства, которыми обладают решения обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных включений. К настоящему времени значительное число центральных разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений проанализировано с позиций предлагаемого аксиоматического подхода. Отметим, что число рассматриваемых аксиом совсем невелико и они носят очень естественный характер. Отметим также, что в рамках аксиоматической теории удалось не только перенести многие классические результаты на дифференциальные уравнения и включения с особенностями, но и получить новые результаты в классических предположениях.

Исследования, проведенные в рамках аксиоматической теории, выявили особенно важную роль, которую играет класс семейств функций, удовлетворяющих определенной аксиоме компактности. Эта аксиома отражает возможность выбрать из некоторой последовательности решений дифференциального уравнения, заданного в области $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, подпоследовательность, сходящуюся к решению этого уравнения. Класс таких семейств функций обозначается $R_c(U)$ (см. [1]–[3]). Ключевую роль в изучении элементов класса $R_c(U)$ (т.е. семейств непрерывных функций) играет топология, индуцированная на нем топологией, заданной на множестве семейств непрерывных функций, графики которых лежат в U (описание этой топологии см. в [3, § VI.7]). Эта топология на $R_c(U)$ может быть адекватно описана на языке сходимости семейств непрерывных функций (см. [3, теорема VI.7.1]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-01695, и Международного научного фонда, грант J55100.

При рассмотрении $R_c(U)$ как топологического пространства естественно возникает вопрос о том, какие свойства семейств решений определяют его замкнутые подпространства (иными словами, какие свойства сохраняются при переходе к пределу сходящейся последовательности семейств решений дифференциальных уравнений или включений в области U). Приведем некоторые результаты, относящиеся к этому вопросу. Множество $R_{ce}(U)$, состоящее из таких элементов пространства $R_c(U)$, которые удовлетворяют аксиоме, характеризующей существование решения задачи Коши для дифференциального уравнения, является замкнутым подпространством $R_c(U)$ (см. [3, теорема VI.2.1]). Также замкнутыми подпространствами $R_c(U)$ являются множества тех элементов $R_c(U)$, которые обладают свойствами, описываемыми теоремой Кнезера [4, § II.4] и топологическим принципом Важевского [4, § X.2] (см. также [3, теорема VII.1.1] и [5]). Что касается свойства, характеризующего единственность решения задачи Коши, то подмножество $R_{ceu}(U) \subseteq R_{ce}(U)$ элементов, обладающих этим свойством, уже не замкнуто. Это легко следует из того факта, что решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с непрерывной функцией $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, вообще говоря, не единственно, и в то же время на любом компакте из U функция f может быть с любой заданной точностью равномерно приближена некоторым многочленом $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, а решение задачи Коши для уравнения $y' = g(x, y)$ единственно.

В работе [6] доказано, что замыкание множества $R_{ceu}(U)$ в $R_c(U)$ лежит в $R_{ceh}(U)$, где $R_{ceh}(U)$ обозначает множество таких элементов $R_{ce}(U)$, которые обладают свойством, характеризующим ацикличность множества решений задачи Коши (это свойство будет описано далее). Отметим, что множество $R_{ceh}(U)$ было выделено при изучении условий существования периодических решений дифференциальных уравнений и играет важную роль в такого рода исследованиях. В связи с этим результатом естественно возникает вопрос: замкнуто ли в $R_c(U)$ подпространство $R_{ceh}(U)$? В настоящей работе мы даем положительный ответ на этот вопрос.

2. Формулировка основного результата. Мы будем использовать обозначения и понятия аксиоматической теории пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений без дополнительных пояснений (весь необходимый материал содержится, например, в [1, гл. IX] или в [3]).

Предположим, что

- 1) U – открытое подмножество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;
- 2) $(a, y_0) \in U, b \in \mathbb{R}$ – некоторое число, превосходящее a ;
- 3) $Z \in R_{ce}(U)$.

Обозначим через $S_Z(y_0; a, b)$ множество функций $z \in Z$, область определения которых $\pi(z)$ есть отрезок $[a, b]$, таких, что $z(a) = y_0$.

Обозначим через $R_{ceh}(U)$ множество всех пространств $Z \in R_{ce}(U)$ таких, что для любой точки $(a, y_0) \in U$ и любого отрезка $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию

- 4) $[a, b] \subseteq \pi(z)$ для любой функции $z \in Z^\mp$ такой, что $z(a) = y_0$,

имеет место следующее свойство ацикличности:

$$H_i(S_Z(y_0; a, b)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 0, \\ 0 & \text{при } i \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

(символ H_i обозначает i -ю группу гомологий Чеха, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел).

Мы докажем, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Множество $R_{\text{сеп}}(U)$ замкнуто в пространстве $R_c(U)$.

3. Вспомогательные утверждения.

3.1. Доказательству сформулированной теоремы предположим несколько лемм.

Зафиксируем a, b, y_0 и Z в соответствии с предположениями 2) и 3). Обозначение $S_Z(y_0; a, b)$ сократим до S .

Положим $Z^* = \{z : z \in Z, a \in \pi(z) \subseteq [a, b], z(a) = y_0\}$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия 1)–4). Тогда множество Z^* компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале, что графики всех функций из Z^* лежат в компактном подмножестве U . Допустим противное. Тогда существует такая последовательность функций $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq Z^*$, что $\|z_n(t_n)\| > n$ для некоторого $t_n \in [a, b]$. Пусть при любом $n \in \mathbb{N}$ функция $u_n \in Z^\mp$ является продолжением z_n . Применяя теорему VI.2.2 из [3] (для стационарной последовательности пространств $Z_k = Z$), получаем, что существует подпоследовательность $\{u_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, которая сходится к некоторой функции $u \in Z^\mp$ равномерно на каждом отрезке, лежащем в $\pi(u)$. Очевидно, $u(a) = y_0$, поэтому в силу условия 4) $[a, b] \subseteq \pi(u)$. Следовательно, последовательность ограниченных функций u_{n_k} на $[a, b]$ равномерно сходится на этом отрезке к ограничению на него функции u . Поэтому эта последовательность равномерно ограничена, что противоречит существованию указанных выше точек $t_n \in [a, b] \subseteq \pi(u_n)$.

Тем самым, доказано, что в U найдется компактное множество, содержащее график $\text{Gr}(z)$ любой функции $z \in Z^*$. Из условия $Z \in R_c(U)$ теперь следует компактность множества Z^* , что и требовалось доказать.

Поскольку S является замкнутым подмножеством Z^* , из леммы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Множество S компактно.

В силу теоремы IV.8.7 из [1] из следствия 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Множество $\cup\{\text{Gr}(z) : z \in S\}$ является компактным подмножеством U .

3.2. Пусть выполнены условия 1)–4). Предположим, что

5) последовательность $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq R_{\text{сеп}}(U)$ сходится к Z в U (сходимость понимается в смысле определения из [3, с. 187]).

ЛЕММА 2. Пусть выполнены предположения 1)–5). Тогда существует номер n_0 такой, что при всех $n \geq n_0$

а) $b \in \pi(z)$ для любой функции $z \in Z_n^\mp$ такой, что

$$(\inf(z), z(\inf(z))) \in \cup\{\text{Gr}(z^*) : z^* \in Z^*\}; \quad (2)$$

б) графики всех функций из множества $\tilde{Z}_n = \{z : z \in Z_n, b = \sup \pi(z), z \text{ удовлетворяет условию (2)}\}$ содержатся в некотором компактном подмножестве множества U ;

с) множество $\tilde{Z}_n$ компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что утверждение а) неверно. Тогда существуют функции $z_k \in Z_{n_k}^\mp$, $n_1 < n_2 < \dots$, удовлетворяющие условию (2), такие, что $b_k = \sup \pi(z_k) < b$.

Пусть $a_k = \inf \pi(z_k)$. Зафиксируем функции $z_k^* \in Z^*$ такие, что $a_k = \sup \pi(z_k^*)$ и $z_k(a_k) = z_k^*(a_k)$. Определим при всех $k \in \mathbb{N}$ непрерывные функции u_k на $[a, b_k[$, полагая

$$u_k(t) = \begin{cases} z_k^*(t) & \text{при } t \in [a, a_k], \\ z_k(t) & \text{при } t \in [a_k, b_k[. \end{cases}$$

Так как все точки a_k лежат на отрезке $[a, b]$, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что они сходятся. Тогда, используя теоремы VIII.7.1 и VI.2.2 из [3], можно найти подпоследовательность $\{u_{k_i} : i \in \mathbb{N}\}$, которая сходится к некоторой функции $u \in Z^\mp$ равномерно на каждом отрезке $J \subseteq \pi(u)$ (и $J \subseteq \pi(u_{k_i})$ при всех i). Так как $u(a) = u_{k_i}(a) = z_{k_i}^*(a) = y_0$, в силу условия 4) $[a, b] \subseteq \pi(u)$. Следовательно, $b \in \pi(u_{k_i})$, что невозможно, так как $b_{k_i} = \sup \pi(u_{k_i}) < b$. Полученное противоречие доказывает а).

Доказательство утверждения б) проводится от противного, используя рассуждения из доказательств леммы 1 и утверждения а).

Так как $Z_n \in R_c(U)$ и $\tilde{Z}_n$ замкнуто в Z_n , то из б) следует с). Лемма доказана.

3.3. Для произвольных $s \in [a, b]$ и $n \in \mathbb{N}$ через $G(s, n)$ обозначим множество всех непрерывных функций z таких, что $\pi(z) = [a, b]$, $z(a) = y_0$, ограничение z на $[a, s]$ принадлежит Z и ограничение z на $[s, b]$ принадлежит Z_n . Положим $K_n = \bigcup \{G(s, n) : s \in [a, b]\}$. Очевидно, $S = G(b, n)$ при любом $n \in \mathbb{N}$, поэтому

$$S \subseteq K_n \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

ЛЕММА 3. Пусть выполнены предположения 1)–5). Тогда существует номер n_0 такой, что множества K_n компактны при всех $n \geq n_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует из леммы 1 и утверждения б) леммы 2.

Пусть C – пространство всех непрерывных отображений отрезка $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$ в метрике равномерной сходимости. Обозначим через H пространство компактных подмножеств C , рассматриваемое в метрике Хаусдорфа. Согласно следствию 1 и лемме 2 H содержит множества S и K_n при всех $n \geq n_0$ (здесь и далее n_0 выбрано в соответствии с леммой 2).

ЛЕММА 4. Пусть выполнены предположения 1)–5). Тогда последовательность $\{K_n : n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ сходится к S в пространстве H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание (3), нетрудно проверить, что утверждение леммы эквивалентно следующему:

из любой последовательности элементов $z_i \in K_{n_i}$, $n_1 < n_2 < \dots$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу множества S .

Проверим справедливость последнего утверждения. Допустим, что оно неверно. Тогда найдется последовательность функций $z_i \in K_{n_i}$, $n_1 < n_2 < \dots$, из которой нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу множества S . Так как $z_i \in$

$G(s_i, n_i)$ для некоторого $s_i \in [a, b]$ и числа s_i лежат на отрезке $[a, b]$, можно перейти к такому бесконечному множеству $A \subseteq \mathbb{N}$, что существует предел

$$s = \lim_{i \rightarrow \infty, i \in A} s_i.$$

В силу следствия 2 множество $\bigcup \{\text{Gr}(z) : z \in S\}$ компактно. Так как $Z \in R_c(U)$, отсюда следует, что существует бесконечное множество $A_1 \subseteq A$ такое, что последовательность функций $z_i|_{[a, s_i]}$ сходится при $i \rightarrow \infty, i \in A_1$, к некоторой функции $\varphi_1 \in Z$ с областью определения $\pi(\varphi_1) = [a, s]$.

В силу утверждения с) леммы 2 множество $\bigcup \{\text{Gr}(z) : z \in K_n, n \geq n_0\}$ лежит в компактном подмножестве U . Тогда из сходимости последовательности $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ к Z в U следует, что существует бесконечное множество $A_2 \subseteq A_1$ такое, что последовательность функций $z_i|_{[s_i, b]}$ сходится при $i \rightarrow \infty, i \in A_2$, к некоторой функции $\varphi_2 \in Z$ с областью определения $\pi(\varphi_2) = [s, b]$.

Из теоремы III.5.4 в [3] следует, что $\varphi_1(s) = \varphi_2(s)$, поэтому функция z , заданная на $[a, b]$ формулой

$$z(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{при } t \in [a, s[, \\ \varphi_2(t) & \text{при } t \in [s, b], \end{cases}$$

непрерывна. Легко видеть, что $z \in S$. Из теоремы III.5.5 в [3] следует сходимость $z_i \rightarrow z$ при $i \rightarrow \infty, i \in A_2$, что противоречит выбору последовательности $\{z_i : i \in \mathbb{N}\}$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы. Пусть пространство Z принадлежит замыканию множества $R_{\text{сеп}}$ в $R_{\text{сеп}}$. Нам нужно проверить выполнение условия ацикличности (1) для Z . Согласно теореме VI.7.1 из [3] существует последовательность $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq R_{\text{сеп}}$, сходящаяся к Z в U . Зафиксируем произвольно a, b и y_0 в соответствии с условием 2) так, чтобы выполнялось условие 4). Теорема будет доказана, если проверить ацикличность множества $S = S_Z(y_0; a, b)$. Определим множества K_n в соответствии с п. 3.3. Согласно леммам 3, 4 и следствию 1 множества K_n компактны при достаточно больших n и сходятся к компакту S в метрике Хаусдорфа. Кроме того, согласно (3) S лежит в каждом из K_n . Следовательно, в силу непрерывности функтора гомологий Чеха [7, гл. X, теорема 3.1] ацикличность S будет установлена, если мы докажем, что при достаточно больших n все K_n ацикличны. Зафиксируем произвольно индекс $n \geq n_0$ и докажем, что множество K_n ациклично. Доказательство этого факта разобьем на несколько шагов.

1. Пусть $s \in [a, b]$ и $z \in G(s, n)$. Положим

$$X(s, z) = \{u : u \in Z_n, \pi(u) = [s, b], u(s) = z(s)\}.$$

Так как $n \geq n_0$, в силу утверждения а) леммы 2 множество $X(s, z)$ непусто. Для каждой функции $u \in X(s, z)$ определим на $[a, b]$ функцию $f(s, z, u)$ по формуле

$$f(s, z, u)(t) = \begin{cases} z(t) & \text{при } t \in [a, s], \\ u(t) & \text{при } t \in [s, b]. \end{cases}$$

Очевидно, $f(s, z, u) \in K_n$. Определим подпространство K_n^* метризуемого пространства $K_n \times [a, b]$ по формуле $K_n^* = \{(f(s, z, u), s) : s \in [a, b], z \in G(s, n), u \in X(s, z)\}$.

2. Положим $Z^* = \{z : z \in Z, a \in \pi(z) \subseteq [a, b], z(a) = y_0\}$. Определим отображение $\varphi : K_n^* \rightarrow Z^*$ формулой $\varphi((f(s, z, u), s)) = z|_{[a, s]}$.

Покажем, что φ – отображение Вьеториса [8], т.е.

- а) φ – непрерывное отображение на Z^* ;
- б) для любого компакта $B \subseteq Z^*$ множество $\varphi^{-1}(B)$ компактно;
- с) для любого элемента $z \in Z^*$ множество $\varphi^{-1}(z)$ ациклично.

Выполнение условия а) очевидно.

Докажем справедливость б). По лемме 1 множество Z^* компактно, поэтому в силу а) для доказательства б) достаточно проверить, что $\varphi^{-1}(Z^*) = K_n^*$ компактно. Пусть $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ – произвольная последовательность в $\varphi^{-1}(Z^*)$, $x_i = (f(s_i, u_i, z_i), s_i)$. По определению отображения φ последовательность функций $z_i^* = z_i|_{[a, s_i]}$ лежит в компакте Z^* . Следовательно, существует подпоследовательность $\{z_{i_j}^* : j \in \mathbb{N}\}$, сходящаяся к некоторой функции $z \in Z^*$ с областью определения $[a, s]$. Очевидно, последовательность точек s_{i_j} сходится к s при $j \rightarrow \infty$.

Поскольку $Z_n \in R_c(U)$ и $n \geq n_0$, из утверждения с) леммы 2 следует, что из последовательности функций u_{i_j} можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $u \in Z_n$. Так как $\pi(z_{i_j}) = [s_{i_j}, b]$ и $s_{i_j} \rightarrow s$ при $j \rightarrow \infty$, то $\pi(u) = [s, b]$. Поскольку $u_{i_j}(s_{i_j}) = z_{i_j}(s_{i_j})$ при всех $j \in \mathbb{N}$, то $u(s) = z(s)$. Из последнего равенства вытекает, что функция v , заданная на $[a, b]$ формулой

$$v(t) = \begin{cases} z(t) & \text{при } t \in [a, s], \\ u(t) & \text{при } t \in [s, b], \end{cases}$$

непрерывна.

Теперь ясно, что последовательность $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к элементу $x = (v, s)$. Очевидно, $v = f(s, z, u)$, поэтому $x \in K_n^*$. Таким образом, компактность K_n^* доказана.

Для доказательства с) возьмем произвольную функцию $z \in Z^*$. Пусть $\pi(z) = [a, s]$. Легко видеть, что $\varphi^{-1}(z)$ гомеоморфно пространству $X(s, z)$. Поскольку Z_n удовлетворяет условию (1), это множество ациклично.

Итак, мы доказали, что φ – отображение Вьеториса.

3. Определим отображение $F : Z^* \times [0, 1] \rightarrow Z^*$, полагая для функции $z \in Z^*$ с областью определения $[a, s]$ и числа $\lambda \in [0, 1]$ функцию $F(z, \lambda)$ равной ограничению z на отрезок $[a, a + (1 - \lambda)(s - a)]$. Тогда $F(z, 0) = z$, $F(z, 1)$ есть функция z^* , график которой – точка (a, y_0) . Нетрудно видеть, что F – гомотопия, стягивающая пространство Z^* в его точку z^* .

4. Мы проверили в 2 и 3, что существует отображение Вьеториса пространства K_n^* на стягиваемое пространство. Отсюда в силу утверждения 1.2.1 из [8] следует, что K_n^* ациклично.

5. Определим отображение $\psi : K_n^* \rightarrow K_n$ по формуле $\psi((f(s, z, u), s)) = f(s, z, u)$. Иными словами, ψ является ограничением на K_n^* проектирования $K_n \times [a, b]$ на первый сомножитель. Докажем, что ψ – отображение Вьеториса. Проверим выполнение свойств, аналогичных в данной ситуации свойствам а)–с).

Ясно, что ψ – непрерывное отображение на K_n .

Как проверено в 2, K_n^* компактно. Таким образом, ψ – непрерывное отображение компакта K_n^* на K_n . Отсюда сразу следует, что для любого компакта $B \subseteq K_n$ множество $\psi^{-1}(B)$ компактно.

Докажем, что для любого элемента $z \in K_n$ множество $\psi^{-1}(z)$ ациклично.

Всякая точка $\gamma \in \psi^{-1}(z)$ имеет вид $\gamma = (f(s_\gamma, z_\gamma, u_\gamma), s_\gamma)$. Положим $t = \sup\{s_\gamma : \gamma \in \psi^{-1}(z)\}$. Из компактности $\psi^{-1}(B)$ следует, что $\psi^{-1}(z)$ – компакт, поэтому найдется точка $\delta \in \psi^{-1}(z)$ такая, что $t = s_\delta$. Теперь нетрудно видеть, что $\psi^{-1}(z) = \{z\} \times [a, t]$. Поскольку последнее множество гомеоморфно отрезку, $\psi^{-1}(z)$ ациклично.

Таким образом, доказано, что ψ – отображение Вьеториса.

6. Как установлено в 4, множество K_n^* ациклично. Согласно 5 существует отображение Вьеториса $\psi: K_n^* \rightarrow K_n$, поэтому по утверждению 1.2.1 из [8] множество K_n также ациклично. Это завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [2] Филиппов В. В. Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 103–154.
- [3] Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993.
- [4] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [5] Klebanov B. S. On Ważewski's topological principle // Interim Report of the Prague Topological Symposium. Prague, 1987. P. 29.
- [6] Филиппов В. В. О существовании периодических решений. Препринт. М.: МГУ, 1994.
- [7] Стинрод Н., Эйленбергер С. Основания алгебраической топологии. М.: Физматгиз, 1958.
- [8] Bielawski R., Górniewicz L., Plaskacz S. Topological approach to differential inclusions on closed subset of $\mathbb{R}^n$ // Dynam. Report. (N.S.) 1992. V. 1. P. 225–250.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: klebanov@int.glas.apc.org, vvfil@nw.math.msu.ru

Поступило
23.02.96