Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кулешов, О многообразии модулей стабильных расслоений на квадрике, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 843–864

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1674>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:54:31

УДК 512.723

О МНОГООБРАЗИИ МОДУЛЕЙ СТАБИЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА КВАДРИКЕ

С. А. Кулешов

В статье исследуется связь стабильных представлений колчанов и стабильных пучков. На основе этой связи строятся тонкие гладкие компактные многообразия модулей стабильных пучков на квадрике.

Библиография: 9 названий.

Введение. Цель данной статьи – доказательство существования и явное описание серии многообразий модулей $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}(r, c_1, k)$ стабильных пучков E на гладкой проективной двумерной квадрике Q ранга r с первым классом Черна c_1 и вторым классом Черна $c_2 = k$. При этом многообразия должны удовлетворять следующим требованиям:

- 1) все многообразия $\mathcal{M}_k$ тонкие гладкие и компактные;
- 2) на каждом многообразии $\mathcal{M}_k$ существует расслоение $\mathcal{H}$, слой которого над точкой $[E]$, соответствующей пучку E , изоморфен $H^1(E)$;
- 3) $\dim \mathcal{M}_k = n \cdot r(\mathcal{H})$ для некоторого натурального n .

Сформулированная задача связана с проверкой гипотезы S -двойственности, а именно: нужно проверить модулярные свойства производящей функции

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} a_k t^k, \quad (1)$$

где a_k – старший класс Черна расслоения $n\mathcal{H}$ (прямая сумма n слагаемых $\mathcal{H}$). Заметим, что ввиду требования 3) a_k отождествляются с целыми числами.

Тонкость многообразия модулей $\mathcal{M}_k$ обеспечивает наличие универсального пучка $\mathcal{E}_k$ на прямом произведении $\mathcal{M}_k \times Q$, слой которого над $[E] \times Q$ изоморфен пучку E . Если $\pi_{\mathcal{M}}$ – проекция прямого произведения на первый сомножитель, то $\mathcal{H} = R^1(\pi_{\mathcal{M}})_*(\mathcal{E}_k)$ является искомым пучком. Локальная свобода пучка $\mathcal{H}$ обеспечивается условием $H^0(E) = H^2(E) = 0$ для всех пучков из $\mathcal{M}_k$. Гладкость же многообразия $\mathcal{M}_k$ следует из того факта, что размерность касательного пространства к многообразию модулей стабильных пучков на поверхности Дель Пеццо не зависит от точки.

Несложные вычисления, использующие формулу Римана–Роха, показывают, что если стабильность понимать в смысле Мамфорда–Такемото относительно половины антиканонического класса квадрики – дивизора $(1, 1)$ – и ограничиться рангом 3 (нужных пучков ранга 2 на квадрике нет), то подходящие первые классы Черна исчерпываются следующими: $(-7, -4)$, $(-5, -5)$, $(-2, 1)$, $(-1, -1)$. Коэффициент n из требования 3) при этом равен 6.

Заметим, что 3-расслоения с такими дискретными инвариантами получаются друг из друга тензорным умножением на обратимые пучки и переходом к двойственному расслоению. Поэтому соответствующие многообразия бирационально изоморфны.

В процессе решения задачи выяснилось, что легче всего поддается описанию многообразие $\mathcal{M}(3, (-4, -1), k)$, которое, очевидно, изоморфно многообразиям

$$\mathcal{M}(3, (-1, -1), k - 2) \cong \mathcal{M}(3, (-7, -4), k + 16)$$

(универсальные пучки, соответствующие этим многообразиям, одинаковы с точностью до умножения на линейные расслоения, поднятые с квадрики). Поэтому в статье приведена конструкция многообразия $\mathcal{M}(3, (-4, -1), k)$. Более того, оказалось, что без дополнительных громоздких рассуждений получается следующая теорема.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Предположим, что на квадрике существует стабильный пучок E ранга r с $c_1 = (a, b)$ и $c_2 = k$, причем его дискретные инварианты удовлетворяют условиям:*

- 1) $2r + a + b = 1$;
- 2) $-2r < a + b < 0$.

Тогда существует тонкое гладкое компактное многообразие модулей $\mathcal{M}(r, (a, b), k)$ таких пучков.

При ее доказательстве использовались методы построения многообразий модулей [1]–[3]. Схема рассуждений, использованная в статье, примерно следующая.

В п. 1 мы показываем, что стабильные пучки на квадрике при некоторых необременительных условиях на дискретные инварианты являются когомологиями монад:

$$0 \longrightarrow U_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \xrightarrow{\alpha} U_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) \xrightarrow{\beta} U_3 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0. \quad (2)$$

По морфизму β монады строится представление

$$t_\beta: U_1 \otimes H_{13}^* \oplus U_2 \otimes H_{23}^* \rightarrow U_3$$

колчана Q_{21} (см. рис. 1, 2).

В п. 2 мы приводим результаты А. Кинга о стабильных представлениях колчанов [4], необходимые для доказательства основной теоремы.

В п. 3 мы доказываем, что существует взаимно однозначное соответствие между стабильными представлениями t_β и стабильными расслоениями $\ker \beta$, и строим тонкое гладкое компактное многообразие модулей стабильных расслоений, чьи дискретные инварианты удовлетворяют условиям:

- i) $r(E) = r$, $c_1(E) = (a, b)$, $c_2(E) = r + a + b + ab$;
- ii) $\text{НОД}(r, a + b) = 1$, $-2r < a + b < 0$.

Наконец, п. 4 посвящен доказательству основной теоремы. Кроме того, в конце мы доказываем, что для любого натурального $k \geq 4$ существует стабильный пучок ранга 3 с $c_1 = (-4, -1)$ и $c_2 = k$, т.е. многообразие модулей $\mathcal{M}(3, (-4, -1), k)$ непусто.

Настоящая статья не столько решает конкретную задачу, сколько ставит новые. А именно:

- 1) вычислить старшие классы Черна a_k пучка $6\mathcal{H}$ на $\mathcal{M}_k$;
- 2) проверить модулярность функции (1);
- 3) обобщить основную теорему, используя другие полные исключительные наборы на квадрике.

Автор признателен А. Н. Тюрину за постановку задачи, А. Л. Городенцеву за полезные обсуждения и А. И. Бондалу, указавшему на работу [4].

1. Монада на квадрике. Цель данного пункта – доказательство следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Любой пучок X на квадрике Q , удовлетворяющий условиям*

$$\mathrm{Ext}^q(\mathcal{L}, X) = 0 \quad \text{при } q \neq 1, \quad \mathcal{L} \in (\mathcal{O}, \mathcal{O}(0, 1), \mathcal{O}(1, 0), \mathcal{O}(1, 1)),$$

является когомологией монады вида (2), в которой

$$\begin{aligned} U_0 &= \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(1, 1), X), & U_1 &= \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(1, 0), X), \\ U_2 &= \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(0, 1), X), & U_3 &= \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}, X). \end{aligned} \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Набор обратимых пучков $(\mathcal{O}(-1, -1), \mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}(0, -1), \mathcal{O})$ является полным исключительным набором на квадрике, т.е.

минимальная полная триангулированная подкатегория в производной категории когерентных пучков на квадрике $D^b(Q)$, содержащая этот набор, совпадает со всей $D^b(Q)$ (будем обозначать ее через $\langle \mathcal{O}(-1, -1), \mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}(0, -1), \mathcal{O} \rangle_{\mathrm{cat}}$); если переобозначить пучки набора как (E_0, E_1, E_2, E_3) , то

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^q(E_j, E_i) &= 0 \quad \text{при } j > i, q = 0, 1, 2, \text{ и при } i = j, q = 1, 2, \\ \mathrm{Ext}^0(E_i, E_i) &= \mathbb{C} \end{aligned}$$

(см. [5]).

(Подробную информацию об исключительных наборах на квадрике и их перестройках можно найти в работах [6] и [2].)

Для доказательства предложения 1 нам потребуется одно замечание о полных исключительных наборах, приведенное в работе [5].

Пусть (E_0, E_1, E_2, E_3) – полный исключительный набор на квадрике и X – некоторый пучок, тогда

$$\begin{aligned} X &\in \langle E_0, \dots, E_s \rangle_{\mathrm{cat}}, \text{ если и только если } \mathrm{Ext}^q(E_j, X) = 0 \text{ для всех } q \text{ и } j > s; \\ X &\in \langle E_s, \dots, E_3 \rangle_{\mathrm{cat}}, \text{ если и только если } \mathrm{Ext}^q(X, E_j) = 0 \text{ для всех } q \text{ и } j < s. \end{aligned}$$

Вернемся к доказательству предложения 1 и рассмотрим универсальное расширение

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow H^1(E) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0, \quad (4)$$

т.е. расширение, заданное элементом

$$e_0 \in \mathrm{Ext}^1(H^1(E) \otimes \mathcal{O}, E) \cong H^1(E)^* \otimes H^1(E),$$

соответствующим тождественному отображению. Из длинной точной когомологической последовательности, соответствующей универсальному расширению, следует, что пространства $\mathrm{Ext}^q(\mathcal{O}, E')$ тривиальны для всех q . Следовательно,

$$E' \in \langle \mathcal{O}(-1, -1), \mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}(0, -1) \rangle_{\mathrm{cat}}.$$

Применяя к последовательности (4) функтор $\text{Ext}^*(\cdot, \mathcal{O}(-1, -1))$, мы получаем изоморфизмы

$$\text{Ext}^q(E, \mathcal{O}(-1, -1)) \cong \text{Ext}^q(E', \mathcal{O}(-1, -1)) \quad \forall q.$$

Следовательно, $\text{Ext}^q(E', \mathcal{O}(-1, -1)) = 0$ при $q \neq 1$. Используя предыдущий изоморфизм и теорему двойственности Серра, имеем

$$\text{Ext}^1(E', \mathcal{O}(-1, -1))^* \cong \text{Ext}^1(\mathcal{O}(1, 1), E).$$

Рассмотрим универсальное расширение

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}(-1, -1), E) \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \longrightarrow E'' \longrightarrow E' \longrightarrow 0. \quad (5)$$

Как и в предыдущем случае, получаем, что $\text{Ext}^q(E'', \mathcal{O}(-1, -1)) = 0$ для всех q .

Из применения функтора $\text{Ext}^*(\mathcal{O}, \cdot)$ к последовательности (5) следует, что группы $\text{Ext}^q(\mathcal{O}, E'')$ тривиальны для всех q , т.е. $E'' \in \langle \mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}(0, -1) \rangle_{\text{cat}}$.

Ввиду полной ортогональности пучков $\mathcal{O}(-1, 0)$ и $\mathcal{O}(0, -1)$ любое расслоение, принадлежащее категории, ими порожденной, представляется в виде прямой суммы этих пучков. В частности, $E'' = U_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1)$ для некоторых векторных пространств U_1 и U_2 . Для вычисления этих пространств к последовательности (5) применим функтор $\text{Ext}^*(L_i, \cdot)$, где $L_1 = \mathcal{O}(1, 0)$, $L_2 = \mathcal{O}(0, 1)$. При этом мы получим изоморфизмы

$$\text{Ext}^q(L_i, E') \cong \text{Ext}^q(L_i, E'') \cong \begin{cases} U_i & \text{при } q = 1, \\ 0 & \text{при } q \neq 1. \end{cases}$$

Если теперь применим функтор $\text{Ext}^*(L_i, \cdot)$, $i = 1, 2$, к последовательности (4), то заметим, что $\text{Ext}^q(L_i, E') \cong \text{Ext}^q(L_i, E)$.

Осталось собрать последовательности (4) и (5) в одну монаду. Это можно сделать с помощью следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ E \hookrightarrow & & E' & \longrightarrow & H^1(E) \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow \alpha & & \\ 0 \longrightarrow & & U_1 \otimes L'_1 \oplus U_2 \otimes L'_2 & \longrightarrow & U_1 \otimes L'_1 \oplus U_2 \otimes L'_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 \longrightarrow & & \text{Ext}^1(\mathcal{O}(1, 1), E) \otimes \mathcal{O}(-1, -1) & \longrightarrow & \ker \alpha & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} ,$$

в которой $L'_1 = \mathcal{O}(-1, 0)$, $L'_2 = \mathcal{O}(0, -1)$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. 1. Предложение 1 справедливо для любого полустабильного пучка X с наклоном $\mu(X) \in (-2, 0)$. (Здесь и далее *наклоном* пучка X ранга r с первым классом Черна $c_1 = (a, b)$ называется $\mu(X) = (a + b)/r = \deg x/r$.)

2. Монада (2) получается из спектральной последовательности Бейлинсона–Горденцева, построенной по правому двойственному набору к исключительному набору $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1, 0), \mathcal{O}(0, 1), \mathcal{O}(1, 1))$ [7]. Поэтому она обладает функториальными свойствами, т.е. морфизм пучков, удовлетворяющих условиям предложения 1, индуцирует морфизм монад.

ЛЕММА 1. *Пучки X и X' , удовлетворяющие условиям предложения 1, изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их монады.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что изоморфные монады задают изоморфные пучки. С другой стороны, согласно предыдущему замечанию изоморфизм $\varphi: X \rightarrow X'$ индуцирует морфизм монад:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & U_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) & \xrightarrow{\alpha} & U_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) & \xrightarrow{\beta} & U_3 \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow 0 \\ & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & U'_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) & \xrightarrow{\alpha'} & U'_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U'_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) & \xrightarrow{\beta'} & U'_3 \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow 0 \end{array}.$$

Эта диаграмма разбивается на две:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & U_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) & \xrightarrow{\alpha} & \ker \beta & \longrightarrow & X & \longrightarrow 0 \\ & f \downarrow & & g' \downarrow & & \varphi \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & U'_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) & \xrightarrow{\alpha'} & \ker \beta' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow 0 \end{array}, \quad (6)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \ker \beta & \longrightarrow & U_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) & \xrightarrow{\beta} & U_3 \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow 0 \\ & g' \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \ker \beta' & \longrightarrow & U'_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U'_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) & \xrightarrow{\beta'} & U'_3 \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow 0 \end{array}. \quad (7)$$

Поскольку φ – изоморфизм, согласно лемме о змее из диаграммы (6) следует, что $\ker f \cong \ker g'$ и $\operatorname{coker} f \cong \operatorname{coker} g'$. Линейные расслоения просты. Поэтому $\ker f = V_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1)$ и $\operatorname{coker} f = W_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1)$; $\ker h = V_3 \otimes \mathcal{O}$ и $\operatorname{coker} h = W_3 \otimes \mathcal{O}$. Кроме того, из полной ортогональности расслоений $\mathcal{O}(-1, 0)$ и $\mathcal{O}(0, -1)$ следует, что

$$\ker g = V_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus V_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) \quad \text{и} \quad \operatorname{coker} g = W_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus W_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1).$$

Из диаграммы (7) и леммы о змее имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & V_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \longrightarrow V_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus V_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) \longrightarrow V_3 \otimes \mathcal{O} \\ & \xrightarrow{\delta} W_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \longrightarrow W_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus W_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) \longrightarrow W_3 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Из равенства $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-1, -1)) = 0$ следует, что $\delta = 0$, и мы получаем две точные тройки, которые возможны лишь в случае тривиальности всех пространств V_i и W_i , так как $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-1, -1)) = 0$. Лемма доказана.

2. Представления колчана. В работе [4] Кинг изучает многообразие модулей представлений колчана без соотношений. В этом пункте мы сформулируем результаты Кинга для двух интересующих нас колчанов:

Рис. 1. Колчан Q_{12} Рис. 2. Колчан Q_{21}

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Представлением колчана Q_{12} называется линейное отображение векторных пространств $t: U_0 \rightarrow U_1 \otimes L_1 \oplus U_2 \otimes L_2$, где размерность векторных пространств L_i равна 2. Аналогично, представлением колчана Q_{21} называется линейное отображение $t: U_1 \otimes L_1 \oplus U_2 \otimes L_2 \rightarrow U_0$, где $\dim L_i = 2$.*

На пространствах $R_{12} = U_0^* \otimes (U_1 \otimes L_1 \oplus U_2 \otimes L_2)$ и $R_{21} = R_{12}^* = (U_1^* \otimes L_1^* \oplus U_2^* \otimes L_2^*) \otimes U_0$ действует группа $G = \mathrm{GL}(U_0) \times \mathrm{GL}(U_1) \times \mathrm{GL}(U_2)$ заменой базисов в пространствах U_i , причем орбиты действия совпадают с классами изоморфных представлений.

Выберем характер группы G :

$$\chi_\theta(g) = (\det g_0)^{\theta_0} \cdot (\det g_1)^{\theta_1} \cdot (\det g_2)^{\theta_2},$$

где $(g_0, g_1, g_2) \in G$, и поднимем действие группы G на прямое произведение $R_{ij} \times \mathbb{C}$ по формуле $g(v, z) = (g(v), \chi_\theta^{-1}(g) \cdot z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Кинг). 1. Точка $v \in R_{ij}$ χ_θ -полустабильна, если существует относительный инвариант веса χ_θ^n $f \in \mathbb{C}[R_{ij}]^{G, \chi_\theta^n}$ с $n \geq 1$ такой, что $f(v) \neq 0$.

2. Точка $v \in R_{ij}$ χ_θ -стабильна, если она χ_θ -полустабильна, $\dim G \cdot v = \dim G/G_0$, где G_0 – ядро действия, и действие группы G на множестве $\{v \in R_{ij} \mid f(v) \neq 0\}$ замкнуто.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Относительным инвариантом $f \in \mathbb{C}[R_{ij}]^{G, \chi}$ веса χ называется функция $f(v)$ на R_{ij} , обладающая свойством $f(g \cdot v) = \chi(g) \cdot f(v)$.*

Зафиксируем вектор размерностей $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2)$, где $u_i = \dim U_i$, и выберем характер $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ из тех соображений, что

$$\sum \theta_i u_i = 0. \quad (8)$$

Это означает, что характер χ_θ на ядре действия группы G равен 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейное отображение $t': U'_0 \rightarrow U'_1 \otimes L_1 \oplus U'_2 \otimes L_2$ называется *подпредставлением представления t* , если $U'_i \subset U_i$ и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U'_0 & \xrightarrow{t'} & U'_1 \otimes L_1 \oplus U'_2 \otimes L_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_0 & \xrightarrow{t} & U_1 \otimes L_1 \oplus U_2 \otimes L_2 \end{array}.$$

Подпредставление представления $U_1 \otimes L_1 \oplus U_2 \otimes L_2 \rightarrow U_0$ определяется аналогично.

ТЕОРЕМА 1 (КИНГ). *Представление $t \in R_{ij}$ χ_θ -стабильно тогда и только тогда, когда для любого его подпредставления t' с вектором размерностей $\mathbf{u}'$ выполнено условие $\sum \theta_i u'_i > 0$ (≥ 0 для полустабильного случая).*

ТЕОРЕМА 2 (КИНГ). *Если вектор размерностей $\mathbf{u}$ неделим, то фактормногообразие*

$$R_{ij}/G = \text{Proj} \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}[R_{ij}]^{G \cdot \chi_\theta^n} \right) = N_{ij}^\theta(\mathbf{u})$$

является тонким многообразием модулей χ_θ -полустабильных представлений.

При этом на многообразии $N_{12}^\theta(\mathbf{u})$ существует универсальное расслоение $\mathcal{U}_0^ \otimes (\mathcal{U}_1 \otimes L_1 \oplus \mathcal{U}_2 \otimes L_2)$, тавтологическое глобальное сечение которого можно интерпретировать как морфизм пучков на $N_{12}^\theta(\mathbf{u})$*

$$\tau: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1 \otimes L_1 \oplus \mathcal{U}_2 \otimes L_2.$$

Его слой над каждой точкой t совпадает с представлением t .

Аналогично, на многообразии $N_{21}^\theta(\mathbf{u})$ существует универсальное расслоение $(\mathcal{U}_1^ \otimes L_1^* \oplus \mathcal{U}_2^* \otimes L_2^*) \otimes \mathcal{U}_0$ с соответствующим глобальным сечением.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как ядро действия группы $G = \text{GL}(U_0) \times \text{GL}(U_1) \times \text{GL}(U_2)$ состоит из $(\lambda \cdot \text{id}_{U_0}, \lambda \cdot \text{id}_{U_1}, \lambda \cdot \text{id}_{U_2})$ и изоморфно $\mathbb{C}$, то размерность многообразия модулей вычисляется по формуле

$$\dim N_{ij}^\theta(\mathbf{u}) = 2u_0(u_1 + u_2) - u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + 1.$$

Для колчана Q_{12} положим $\theta_0 = -(u_1 + u_2)$, $\theta_1 = u_0$, $\theta_2 = u_0$. Тогда условие (8) будет выполнено, и неравенство теоремы 1 переписется в виде

$$\frac{u'_0}{u'_1 + u'_2} < \frac{u_0}{u_1 + u_2}$$

(‘ $\leq$ ’ в полустабильном случае). В связи с этим дробь $u_0/(u_1 + u_2)$ обозначим через $\nu_{12}(t)$ и назовем *наклоном представления t* .

Аналогично, выбор характера $\theta_0 = u_1 + u_2$, $\theta_1 = -u_0$, $\theta_2 = -u_0$ для колчана Q_{21} определяет наклон его представления по формуле $\nu_{21}(t) = (u_1 + u_2)/u_0$.

Тем самым, представление t колчана Q_{ij} является χ_θ -стабильным тогда и только тогда, когда любое его подпредставление имеет меньший наклон.

Всюду далее термин “стабильное представление колчана Q_{ij} ” означает χ_θ -стабильное представление относительно характера χ_θ с $\theta = (-(u_1 + u_2), u_0, u_0)$ для Q_{12} и $\theta = (u_1 + u_2, -u_0, -u_0)$ для Q_{21} . Символ θ будет опускаться и при обозначении многообразия модулей стабильных представлений.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отображение, ставящее в соответствие представлению $t: U_0 \rightarrow U_1 \otimes L_1 \oplus U_2 \otimes L_2$ двойственное к нему $t^*: U_1^* \otimes L_1^* \oplus U_2^* \otimes L_2^* \rightarrow U_0^*$, осуществляет изоморфизм многообразий модулей $N_{12}(\mathbf{u})$ и $N_{21}(\mathbf{u})$ с одним и тем же вектором размерностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки этого факта достаточно указать изоморфизм действия группы G на пространствах представлений колчанов. На пространстве представлений колчана Q_{12} действует группа $G_{12} = \mathrm{GL}(U_0) \times \mathrm{GL}(U_1) \times \mathrm{GL}(U_2)$, а на представлениях колчана Q_{21} действует группа $G_{21} = \mathrm{GL}(U_0^*) \times \mathrm{GL}(U_1^*) \times \mathrm{GL}(U_2^*)$.

При отождествлении этих групп посредством изоморфизма

$$(g_0, g_1, g_2) \mapsto ((g_0^*)^{-1}, (g_1^*)^{-1}, (g_2^*)^{-1})$$

мы получим согласование действий. Более того, при таком изоморфизме отождествляются и выбранные характеры

$$(-(u_1 + u_2), u_0, u_0) \mapsto (u_1 + u_2, -u_0, -u_0).$$

Поэтому стабильность представления колчанов сохраняется при взятии двойственного.

3. Многообразие модулей расслоений. В этом пункте мы построим тонкое многообразие модулей стабильных пучков E на квадрике с дискретными инвариантами i), ii) (см. введение), если существует хотя бы один такой стабильный пучок, и покажем, что все такие пучки локально свободны. Далее символом $\mathcal{E}$ мы обозначаем множество стабильных пучков с дискретными инвариантами i).

ЛЕММА 2. Монада (2) для пучков $E \in \mathcal{E}$ имеет вид

$$0 \longrightarrow U_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \xrightarrow{\alpha} U_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) \longrightarrow 0,$$

т.е. пучок E включается в точную последовательность

$$0 \longrightarrow U_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \xrightarrow{\alpha} U_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

где $U_0 = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(1, 1), E)$, $U_1 = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(1, 0), E)$, $U_2 = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(0, 1), E)$. При этом $\dim U_0 = r + a + b$, $\dim U_1 = r + b$, $\dim U_2 = r + a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наклон пучка E равен $\mu(E) = (a + b)/r$ и лежит в интервале $(-2, 0)$. Поэтому пучок E удовлетворяет предложению 1. С другой стороны, по формуле Римана–Роха

$$\chi(\mathcal{O}, E) = r \left(1 + \frac{a + b}{r} + \frac{ab - (r + a + b + ab)}{r} \right) = 0.$$

Следовательно, пространство U_3 из монады для E тривиально. Подсчет размерностей пространств U_i проводится аналогично.

Таким образом, каждому пучку $E \in \mathcal{E}$ можно сопоставить мономорфизм пучков

$$\alpha: U_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \rightarrow U_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1),$$

т.е. элемент линейного пространства

$$U_0^* \otimes (U_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1, -1), \mathcal{O}(-1, 0)) \oplus U_2 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1, -1), \mathcal{O}(0, -1))).$$

Введем обозначения

$$H_{01} = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1, -1), \mathcal{O}(-1, 0)), \quad H_{02} = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1, -1), \mathcal{O}(0, -1)).$$

Как известно, $\dim H_{0i} = 2$ и мономорфизм пучков α однозначно соответствует представлению колчана t_α из п. 2; и наоборот, каждому представлению колчана t однозначно соответствует морфизм (но необязательно мономорфизм) пучков α_t .

ЛЕММА 3. Пусть $t: \mathbb{C}^{u_0} \rightarrow \mathbb{C}^{u_1} \oplus H_{01} \oplus \mathbb{C}^{u_2} \oplus H_{02}$ – представление колчана и

$$\alpha_t: \mathbb{C}^{u_0} \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \rightarrow \mathbb{C}^{u_1} \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus \mathbb{C}^{u_2} \otimes \mathcal{O}(-1, 0)$$

– соответствующий ему морфизм пучков. Если t полустабилен и $\nu_{12}(t) < 1/2$, то α_t – вложение расслоений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление t задается матрицей F размера $u_0 \times (u_1 + u_2)$ с элементами $\varphi_{ij} \in H_{01} \cup H_{02}$. Рассмотрим ограничение морфизма α_t на слой в точке x

$$\alpha_{tx}: \mathbb{C}^{u_0} \otimes \mathcal{O}(-1, -1)_x \rightarrow \mathbb{C}^{u_1} \otimes \mathcal{O}(-1, 0)_x \oplus \mathbb{C}^{u_2} \otimes \mathcal{O}(-1, 0)_x.$$

Морфизм векторных пространств α_{tx} задается матрицей F_x , которая получается из матрицы F , если вместо φ_{ij} поставить их ограничение на слой $(\varphi_{ij})_x$. Если α_{tx} имеет ненулевое ядро, то, выбрав соответствующий базис в пространстве $\mathbb{C}^{u_0}$, мы можем считать, что $\alpha_{tx}(e_1) = 0$, т.е. первый базисный вектор пространства $\mathbb{C}^{u_0}$ при этом переходит в нуль. Заметим, что если морфизмы $\varphi_{i1} \in H_{01}$ обращаются в нуль в одной точке, то они пропорциональны. Аналогичное утверждение справедливо и для элементов H_{02} . Тем самым, мы получили, что образ первого базисного вектора при отображении t лежит в двумерном векторном пространстве $\langle \varphi \rangle \oplus \langle \psi \rangle \subset H_{01} \oplus H_{02}$, т.е. t имеет подпредставление t' с вектором размерностей $(1, 1, 1)$. Из сравнения наклонов $\nu(t) < \nu(t') = 1/2$ и полустабильности t следует, что α_{tx} не имеет ядра. Следовательно, α_t – вложение расслоений.

Для двух пучков E, F без кручения на квадрике положим по определению

$$d(E, F) = r(E) \deg F - r(F) \deg E = r(E)r(F)(\mu(F) - \mu(E)). \quad (9)$$

Для ограниченных комплексов $K^\cdot, L^\cdot$ пучков примем обозначение

$$d(K^\cdot, L^\cdot) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} d(K^i, L^j).$$

ЛЕММА 4. Пусть E_0, E_1, E_2 – расслоения на квадрике такие, что $r(E_1) = r(E_2) = r_1$ и $\mu_0 = \mu(E_0) < \mu(E_1) = \mu(E_2) = \mu_1$. Пусть

$$K^\cdot: E_0 \otimes \mathbb{C}^{u_0} \rightarrow E_1 \otimes \mathbb{C}^{u_1} \oplus E_2 \otimes \mathbb{C}^{u_2}, \quad L^\cdot: E_0 \otimes \mathbb{C}^{u'_0} \rightarrow E_1 \otimes \mathbb{C}^{u'_1} \oplus E_2 \otimes \mathbb{C}^{u'_2},$$

причем $K^{-1} = E_0 \otimes \mathbb{C}^{u_0}$ и $L^{-1} = E_0 \otimes \mathbb{C}^{u'_0}$. Тогда

$$\frac{u_0}{u_1 + u_2} > \frac{u'_0}{u'_1 + u'_2} \iff d(K^\cdot, L^\cdot) < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению функции $d(\cdot, \cdot)$ имеем

$$d(K^\cdot, L^\cdot) = d(K^0, L^0) + d(K^{-1}, L^{-1}) - d(K^0, L^{-1}) - d(K^{-1}, L^0).$$

Используя формулу (9) и условие леммы, получаем

$$\begin{aligned} d(K^0, L^0) &= d(K^{-1}, L^{-1}) = 0, \\ d(K^0, L^{-1}) &= r_0 r_1 u'_0(u_1 + u_2)(\mu_0 - \mu_1), \\ d(K^{-1}, L^0) &= r_0 r_1 u_0(u'_1 + u'_2)(\mu_1 - \mu_0), \end{aligned}$$

где $r_0 = r(E_0)$. Поэтому

$$d(K^\cdot, L^\cdot) = (\mu_1 - \mu_0) r_0 r_1 (u'_0(u_1 + u_2) - u_0(u'_1 + u'_2)).$$

По предположению леммы разность $\mu_1 - \mu_0$ положительна, и знак $d(K^\cdot, L^\cdot)$ совпадает со знаком $u'_0(u_1 + u_2) - u_0(u'_1 + u'_2)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Предположим, что морфизмы в комплексах из леммы 4 являются вложениями и F_K, F_L — их коядра. Тогда $d(K^\cdot, L^\cdot) = d(F_K, F_L)$.

ЛЕММА 5. Пусть морфизм α из точной тройки

$$0 \longrightarrow U_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \xrightarrow{\alpha} U_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

соответствует представлению колчана $t: U_0 \rightarrow U_1 \otimes H_{01} \oplus U_2 \otimes H_{02}$. Тогда из полустабильности пучка F вытекает полустабильность представления t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для сокращения записи формул

$$E_0 = \mathcal{O}(-1, -1), \quad E_1 = \mathcal{O}(-1, 0), \quad E_2 = \mathcal{O}(0, -1).$$

Предположим, что существует дестабилизирующее подпредставление

$$t': U'_0 \rightarrow U'_1 \otimes H_{01} \oplus U'_2 \otimes H_{02},$$

т.е. если $u'_i = \dim U'_i$ и $u_i = \dim U_i$, то

$$\frac{u_0}{u_1 + u_2} < \frac{u'_0}{u'_1 + u'_2}.$$

Обозначим через $\alpha': U'_0 \otimes E_0 \rightarrow U'_1 \otimes E_1 \oplus U'_2 \otimes E_2$ соответствующее ему отображение пучков. При этом возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & U'_0 \otimes E_0 & \longrightarrow & U_0 \otimes E_0 & \longrightarrow & (U_0/U'_0) \otimes E_0 \longrightarrow 0 \\ & & \alpha' \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha'' \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}'_{12} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{12} & \longrightarrow & \mathcal{E}''_{12} \longrightarrow 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ker \alpha'' & \hookrightarrow & F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \operatorname{coker} \alpha'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (10)$$

где $\mathcal{E}_{12} = U_1 \otimes E_1 \oplus U_2 \otimes E_2$. Заметим, что мономорфность α' следует из леммы о змее.

Если обозначить

$$K^{\cdot}: U_0 \otimes E_0 \rightarrow \mathcal{E}_{12}, \quad K^0 = \mathcal{E}_{12}, \quad L^{\cdot}: U'_0 \otimes E_0 \rightarrow \mathcal{E}'_{12}, \quad L^0 = \mathcal{E}'_{12},$$

то по предположению и лемме 4 справедливо неравенство $d(K^{\cdot}, L^{\cdot}) > 0$. В силу замечания 5 и формулы (9) оно равносильно $\mu(F) < \mu(F')$.

Средний столбец диаграммы и условие на наклоны расслоений E_i влечет неравенство $\mu(F) > \mu(E_0)$. С другой стороны, $\mu(\ker \alpha'') \leq \mu(E_0)$, поскольку $\ker \alpha''$ – подпучок полустабильного расслоения $E_0 \otimes (U_0/U'_0)$, наклон которого совпадает с $\mu(E_0)$. Собирая вместе полученные неравенства, имеем

$$\mu(\ker \alpha'') < \mu(F'). \quad (11)$$

Рассмотрим последнюю строку диаграммы (10):

$$0 \longrightarrow \ker \alpha'' \xrightarrow{\varphi} F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\psi} \operatorname{coker} \alpha'' \longrightarrow 0.$$

Из ее точности следует, что $\operatorname{coker} \varphi = \ker \psi$. С другой стороны, по лемме о качелях из неравенства (11) следует $\mu(F') < \mu(\operatorname{coker} \varphi)$. Поэтому, если $f \neq 0$, пучок $\operatorname{coker} \varphi$ дестабилизирует F .

Допустим, что f – нулевой морфизм. Тогда $\ker \alpha'' \cong F'$ и $\mu(\ker \alpha'') = \mu(F')$, что противоречит неравенству (11). Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Предположим, что наклон пучка F из точной последовательности*

$$0 \longrightarrow U_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \xrightarrow{\alpha} U_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) \longrightarrow F \longrightarrow 0 \quad (12)$$

удовлетворяет условию $-2 < \mu(F) < 0$. Тогда если пучок F не полустабилен, то существует дестабилизирующий его подпучок F' , включающийся в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & U'_0 \otimes E_0 & \xrightarrow{\alpha'} & U'_1 \otimes E_1 \oplus U'_2 \otimes E_2 & \longrightarrow & F' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & U_0 \otimes E_0 & \xrightarrow{\alpha} & U_1 \otimes E_1 \oplus U_2 \otimes E_2 & \longrightarrow & F \longrightarrow 0 \end{array} \quad (13)$$

где, как и раньше, $E_0 = \mathcal{O}(-1, -1)$, $E_1 = \mathcal{O}(-1, 0)$, $E_2 = \mathcal{O}(0, -1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим фильтрацию Гардера–Нарасимхана пучка F с полустабильными факторами G_i : $\text{Gr}(F) = (G_n, G_{n-1}, \dots, G_1)$. Так как наклоны факторов упорядочены $\mu(G_i) < \mu(G_{i+1})$ и $\mu(G_1) < \mu(F) < \mu(G_n)$, найдется номер p такой, что $\mu(G_{p-1}) < \mu(F) < \mu(G_p)$.

Обозначим через F' подпучок в F такой, что $\text{Gr}(F') = (G_n, \dots, G_p)$. Тогда $F'' = F/F'$ имеет фильтрацию $\text{Gr}(F'') = (G_{p-1}, \dots, G_1)$.

Из точной последовательности (12) следует, что $\text{Ext}^q(\theta, F) = 0$ для всех q . Кроме того, из соображений стабильности $\text{Hom}(\theta, G_i) = 0$ при $i = 1, 2, \dots, p-1$. Тем самым, $\text{Hom}(\theta, F'') = 0$. С другой стороны, по теореме двойственности Серра $\text{Ext}^2(\theta, G_i)^* \cong \text{Hom}(G_i, \theta(-2, -2))$. Поэтому $\text{Ext}^2(\theta, G_i) = 0$ при $i = p, p+1, \dots, n$ и $\text{Ext}^2(\theta, F') = 0$.

Теперь из длинной кохомологической последовательности, соответствующей точной тройке $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$, вытекает, что $\text{Ext}^q(\theta, F') = \text{Ext}^q(\theta, F'') = 0$ для всех q .

Покажем, что

$$\text{Ext}^q(\theta(1, 0), F') = \text{Ext}^q(\theta(0, 1), F') = \text{Ext}^q(\theta(1, 1), F') = 0 \quad \text{при } q \neq 1. \quad (14)$$

Пусть $\mathcal{L}$ – один из пучков $(\theta(1, 0), \theta(0, 1), \theta(1, 1))$. Из точной последовательности (12) следует, что $\text{Hom}(\mathcal{L}, F) = 0$. Поэтому и $\text{Hom}(\mathcal{L}, F') = 0$.

Далее, $\text{Gr}(F') = (G_n, \dots, G_p)$ и $\mu(G_p) > \mu(F) > -2$. С другой стороны, выполнено $\mu(\mathcal{L}(-2, -2)) \leq -2$, поэтому из соображений стабильности

$$\text{Ext}^2(\mathcal{L}, G_i)^* \cong \text{Hom}(G_i, \mathcal{L}(-2, -2)) = 0 \quad \text{при } i = p, p+1, \dots, n,$$

откуда $\text{Ext}^2(\mathcal{L}, F') = 0$. Соотношения (14) доказаны.

Теперь утверждение леммы следует из предложения 1 и замечания 1.

ЛЕММА 7. В предположениях леммы 6 обозначим через

$$t: U_0 \rightarrow U_1 \otimes H_{01} \oplus U_2 \otimes H_{02}$$

представление колчана, соответствующее морфизму α . Тогда полустабильность представления t влечет полустабильность пучка F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F не является полустабильным. Тогда согласно лемме 6 возникает коммутативная диаграмма (13), что позволяет построить подпредставление t' представления t :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U'_0 & \xrightarrow{t'} & U'_1 \otimes H_{01} \oplus U'_2 \otimes H_{02} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_0 & \xrightarrow{t} & U_1 \otimes H_{01} \oplus U_2 \otimes H_{02} \end{array}.$$

Обозначим через

$$K: U_0 \otimes E_0 \xrightarrow{\alpha} U_1 \otimes E_1 \oplus U_2 \otimes E_2, \quad K^{-1} = U_0 \otimes E_0,$$

$$L: U'_0 \otimes E_0 \xrightarrow{\alpha'} U'_1 \otimes E_1 \oplus U'_2 \otimes E_2, \quad L^{-1} = U'_0 \otimes E_0.$$

Так как $d(K, L) = d(F, F')$ и F' дестабилизирует F , то $d(K, L) > 0$. Это по лемме 4 равносильно тому, что подпредставление t' дестабилизирует представление t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть вектор размерностей (u_0, u_1, u_2) удовлетворяет условиям:

- 1) $\text{НОД}(u_0, u_1 + u_2) = 1$;
- 2) $-1 < \frac{u_0}{u_1 + u_2 - u_0} < 1$.

Тогда существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных стабильных представлений

$$\mathbb{C}^{u_0} \rightarrow \mathbb{C}^{u_1} \otimes L_1 \oplus \mathbb{C}^{u_1} \otimes L_1$$

колчана Q_{12} и классами изоморфных стабильных пучков E ранга $u_1 + u_2 - u_0$ с $c_1(E) = (u_0 - u_1, u_0 - u_2)$ и вторым классом Черна $c_2 = u_0 + (u_0 - u_1)(u_0 - u_2)$. Более того, все такие пучки локально свободны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду условия 1) на вектор размерностей любое полустабильное представление является стабильным.

Перепишем условие 2) на вектор размерностей в виде

$$-1 < \frac{\nu_{12}}{1 - \nu_{12}} < 1, \quad \text{где } \nu_{12} = \frac{u_0}{u_1 + u_2}.$$

Если $\nu_{12} > 1$, то левое неравенство равносильно $\nu_{12} - 1 > \nu_{12}$, что невозможно. Поэтому $\nu_{12} < 1$ и правое неравенство равносильно тому, что $\nu_{12} < 1/2$. С учетом этого неравенства и леммы 3 стабильное представление соответствует вложению расслоений

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^{u_0} \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^{u_1} \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus \mathbb{C}^{u_2} \otimes \mathcal{O}(0, -1).$$

Его коядро E локально свободно и имеет дискретные инварианты, как в формулировке предложения. Ввиду условия 2) на вектор размерностей наклон расслоения E удовлетворяет неравенству $-2 < \mu(E) < 0$. Поэтому из леммы 7 следует, что E полустабильно. Покажем, что дробь $(2u_0 - u_1 - u_2)/(u_1 + u_2 - u_0)$ несократима, т.е. полустабильность расслоения E влечет его стабильность.

Условие 1) леммы означает, что найдутся целые числа p и q такие, что определитель

$$\det \begin{pmatrix} u_0 & p \\ u_1 + u_2 & q \end{pmatrix} = 1.$$

При элементарных преобразованиях строк определитель не меняется, поэтому

$$\det \begin{pmatrix} u_0 & p \\ u_1 + u_2 & q \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_0 & p \\ u_1 + u_2 - u_0 & q - p \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2u_0 - u_1 - u_2 & 2p - q \\ u_1 + u_2 - u_0 & q - p \end{pmatrix} = 1.$$

Пусть теперь E – стабильный пучок с дискретными инвариантами, удовлетворяющими условиям 1), 2). Тогда по лемме 2 он является коядром мономорфизма

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^{u_0} \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^{u_1} \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus \mathbb{C}^{u_2} \otimes \mathcal{O}(0, -1) \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Учитывая лемму 5, мы видим, что соответствующее представление колчана полустабильно, а значит, и стабильно. Следовательно, α – вложение расслоений и E локально свободен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В условиях предложения 2 существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных стабильных представлений

$$H_{01}^* \otimes \mathbb{C}^{u_1} \oplus H_{01}^* \otimes \mathbb{C}^{u_2} \rightarrow \mathbb{C}^{u_0}$$

колчана Q_{21} и классами изоморфных стабильных пучков E ранга $u_1 + u_2 - u_0$ с $c_1 = (-u_2, -u_1)$ и $c_2 = u_1 u_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наклон пучка E равен $-(u_1 + u_2)/(u_1 + u_2 - u_0)$ и ввиду условия 2) предложения 2 лежит в интервале $(-2, 0)$. Из соображений стабильности мы видим, что это влечет условие

$$\mathrm{Ext}^q(\mathcal{L}, E) = 0 \quad \text{при } q \neq 1,$$

где $\mathcal{L}$ – один из пучков $\mathcal{O}(-1, -1)$, $\mathcal{O}(-1, 0)$, $\mathcal{O}(0, -1)$, $\mathcal{O}$.

Используя формулу Римана–Роха, легко убедиться в том, что $\chi(\mathcal{O}(1, 1), E) = 0$. Поэтому пучок E включается в точную последовательность

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow U_1 \otimes \mathcal{O}(0, -1) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \xrightarrow{\alpha} U_0 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0, \quad (15)$$

где $U_1 = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(0, 1), E)$, $U_2 = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(1, 0), E)$, $U_0 = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}, E)$ (см. (3)).

Заметим, что пучок E , как ядро эпиморфизма расслоений, является локально свободным. Следовательно, применение функтора $\mathcal{E}\mathrm{xt}(\cdot, \mathcal{O})$ к последовательности (15) сохраняет ее точность. Тензорное умножение на обратимый пучок – также точный функтор. Поэтому последовательность (15) влечет точную тройку

$$0 \longrightarrow U_0^* \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \xrightarrow{\alpha'} U_1^* \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2^* \otimes \mathcal{O}(0, -1) \longrightarrow E^*(-1, -1) \longrightarrow 0. \quad (16)$$

Поскольку операция $'\ast'$ и тензорное умножение на обратимый пучок не влияют на стабильность расслоений, мы видим, что $E^*(-1, -1)$ – стабильное расслоение. Значит, представление

$$t_{\alpha'}: U_0^* \rightarrow U_1^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1, -1), \mathcal{O}(-1, 0)) \oplus U_2^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1, -1), \mathcal{O}(0, -1)),$$

соответствующее морфизму α' стабильно.

Кроме того, представление колчана Q_{21}

$$t_{\alpha}: U_0 \rightarrow U_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(0, -1), \mathcal{O}) \oplus U_2 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}),$$

соответствующее морфизму α из точной тройки (16), двойственно представлению $t_{\alpha'}$. Поэтому $t_{\alpha'}$ стабильно (замечание 4).

С другой стороны, стабильность представления t_{α} влечет стабильность представления $t_{\alpha'}$ и расслоения $E^*(-1, -1)$, откуда следует стабильность пучка E .

ТЕОРЕМА 3. Пусть целые числа r, a, b удовлетворяют условиям ii) (см. введение). Предположим, что на квадрике Q существует стабильный пучок ранга r с $c_1 = (a, b)$ и $c_2 = r + a + b + ab$. Тогда существует тонкое гладкое компактное многообразие модулей стабильных расслоений с такими дискретными инвариантами, база которого изоморфна $N(r + a + b, r + b, r + a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства в ii) и соображений стабильности следует, что $\text{Ext}^q({}^\vee E_i, E) = 0$ при $q \neq 1$, где упорядоченный набор $({}^\vee E_3, {}^\vee E_2, {}^\vee E_1, {}^\vee E_0)$ – полный исключительный набор линейных расслоений на квадрике $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(0, 1), \mathcal{O}(1, 0), \mathcal{O}(1, 1))$. Кроме того, размерности групп $\text{Ext}^1({}^\vee E_i, E)$ вычисляются по формуле Римана–Роха:

$$h^1({}^\vee E_0, E) = r + a + b, \quad h^1({}^\vee E_1, E) = r + b, \quad h^1({}^\vee E_2, E) = r + a, \quad h^1({}^\vee E_3, E) = 0.$$

Легко проверить, что вектор размерностей $(r + a + b, r + b, r + a)$ удовлетворяет условиям 1), 2) предложения 2. Поэтому существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных стабильных представлений

$$\mathbb{C}^{r+a+b} \rightarrow \mathbb{C}^{r+b} \otimes H_{01} \oplus \mathbb{C}^{r+a} \otimes H_{02}$$

и классами изоморфных стабильных пучков E из формулировки теоремы, причем все такие пучки локально свободны. По теореме 2 существует тонкое компактное многообразие модулей $N = N(r + a + b, r + b, r + a)$ таких представлений. Докажем, что оно является тонким многообразием модулей наших стабильных расслоений. Для этого на прямом произведении $Q \times N$ нам необходимо построить пучок, слой которого над $Q \times [E]$ изоморфен E , и доказать его универсальность.

Обозначим через π_Q и π_N проекции прямого произведения $Q \times N$ на сомножители. На многообразии N существует морфизм универсальных расслоений $\tau: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1 \otimes H_{01} \oplus \mathcal{U}_2 \otimes H_{02}$, слой которого над точкой $[t]$, изображающей представление t , совпадает с ним.

Пусть $\widetilde{\mathcal{U}}_i = \pi_N^* \mathcal{U}_i$. Символами $\widetilde{E}_i$ обозначим обратные образы линейных расслоений на квадрике при проекции π_Q :

$$\widetilde{E}_i = \pi_Q^* E_i, \quad E_0 = \mathcal{O}(-1, -1), \quad E_1 = \mathcal{O}(-1, 0), \quad E_2 = \mathcal{O}(0, -1).$$

Тогда пространства H_{0i} можно интерпретировать как $\text{Hom}(\widetilde{E}_0, \widetilde{E}_i)$, и на прямом произведении $Q \times N$ возникает морфизм расслоений

$$\widetilde{\alpha}: \widetilde{E}_0 \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_0 \rightarrow \widetilde{E}_1 \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \widetilde{E}_2 \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_2,$$

соответствующий морфизму

$$\widetilde{\tau}: \widetilde{\mathcal{U}}_0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{U}}_1 \otimes H_{01} \oplus \widetilde{\mathcal{U}}_2 \otimes H_{02}.$$

Для каждой точки $[t] \in N$ ограничение морфизма $\widetilde{\alpha}$ на $Q \times [t]$ совпадает с морфизмом расслоений на квадрике

$$\widetilde{\alpha}_t: E_0 \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_{0,t} \rightarrow E_1 \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_{1,t} \oplus E_2 \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_{2,t},$$

соответствующим стабильному представлению. Поэтому $\tilde{\alpha}_t$ – вложение расслоений, а его коядро – стабильное расслоение E_t . Следовательно, $\tilde{\alpha}_t$ также является вложением расслоений и его коядро $\mathcal{E}$ – нужный нам пучок на прямом произведении.

Рассмотрим произвольное семейство $\mathcal{F}$ стабильных расслоений с нашими дискретными инвариантами с базой M . К пучку $\mathcal{F}$ на $Q \times M$ сходится спектральная последовательность Бейлинсона–Горденцева с первым членом

$$\mathbf{E}_1^{p,q} = \pi_M^* \mathcal{E} \mathrm{xt}_{\pi_M}^q(\pi_Q^*(\vee E_{3+p}), \mathcal{F}) \otimes \pi_Q^* E_{3+p}, \quad q = 0, 1, 2, \quad p = -3, -2, -1, 0,$$

где $\mathcal{E} \mathrm{xt}_{\pi_M}^q(\pi_Q^*(\vee E_{3+p}), \mathcal{F}) = R^q(\pi_M)_* \mathcal{H} \mathrm{om}(\pi_Q^*(\vee E_{3+p}), \mathcal{F})$. В силу стабильности пучков в семействе $(\mathcal{F}, M)$ и условий на их дискретные инварианты получаем, что

$$\mathcal{E} \mathrm{xt}_{\pi_M}^q(\pi_Q^*(\vee E_{3+p}), \mathcal{F}) = 0 \quad \text{при } q \neq 1,$$

т.е. спектральная последовательность, сходящаяся к пучку $\mathcal{F}$, вырождается в точную тройку. Чтобы ее выписать, положим по определению

$$H_{3+p} = \mathcal{E} \mathrm{xt}_{\pi_M}^1(\pi_Q^*(\vee E_{3+p}), \mathcal{F}).$$

Тогда

$$0 \longrightarrow \pi_M^* H_0 \otimes \pi_Q^* E_0 \xrightarrow{\tilde{\beta}} \pi_M^* H_1 \otimes \pi_Q^* E_1 \oplus \pi_M^* H_2 \otimes \pi_Q^* E_2 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Легко видеть, что многообразие M с тавтологическим глобальным сечением пучка $H_0^* \otimes (H_1 \otimes H_{01} \oplus H_2 \otimes H_{02})$ интерпретируется как семейство представлений колчана с вектором размерностей $(r + a + b, r + b, r + a)$. В силу универсальности семейства $\mathcal{U}_0^* \otimes (\mathcal{U}_1 \otimes L_1 \oplus \mathcal{U}_2 \otimes L_2)$ над базой $N(r + a + b, r + b, r + a)$ существует морфизм $M \xrightarrow{\varphi} N$ такой, что $H_i = \varphi^* \mathcal{U}_i$. Тогда, очевидно, пучок $\mathcal{F}$ вычисляется как $(\mathrm{id} \times \varphi)^*(\mathcal{E})$, где $\mathrm{id} \times \varphi: Q \times M \rightarrow Q \times N$. Таким образом, $(M, \mathcal{E})$ является тонким многообразием модулей стабильных пучков. Его компактность очевидна, а гладкость следует из того факта, что касательное пространство к многообразию модулей стабильных пучков на поверхности $\mathrm{Ext}^1(E, E)$ имеет постоянную размерность. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть целые числа r, a, b удовлетворяют условиям ii). Предположим, что на квадрике Q существует стабильный пучок ранга r с $c_1 = (a, b)$ и $c_2 = ab$. Тогда существует тонкое гладкое компактное многообразие модулей стабильных расслоений с такими дискретными инвариантами, база которого изоморфна $N(-r - a - b, -a, -b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема доказывается аналогично теореме 3 с использованием предложения 3.

4. Многообразие модулей $\mathcal{M}(r, (a, b), k)$. Этот пункт посвящен доказательству основной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Из условия 2) теоремы следует, что наклон пучка E лежит в интервале $(-2, 0)$. Поэтому из соображений стабильности этот пучок удовлетворяет условиям предложения 1, т.е. является когомологией монады (2). Размерности пространств U_i легко вычисляются по формуле Римана–Роха:

$$\begin{aligned} \dim U_0 &= -\chi(\mathcal{O}(1, 1), E) = k - ab, & \dim U_1 &= -\chi(\mathcal{O}(1, 0), E) = -k - ab - a, \\ \dim U_2 &= -\chi(\mathcal{O}(0, 1), E) = -k - ab - b, & \dim U_3 &= -\chi(\mathcal{O}, E) = k - r - (a + b) - ab. \end{aligned}$$

Монада представляется в виде двух точных троек

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow E' \longrightarrow U_1 \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \oplus U_2 \otimes \mathcal{O}(0, -1) \xrightarrow{\beta} U_3 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow U_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \xrightarrow{\alpha} E' \longrightarrow E \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из этих последовательностей вычисляются дискретные инварианты пучка E' :

$$r(E') = r + k - ab, \quad c_1(E') = (a - k + ab, b - k + ab), \quad c_2(E') = (a - k + ab)(b - k + ab). \quad (18)$$

Заметим, что $\text{Hom}(E', \mathcal{O}(-1, -1)) = 0$. Действительно, из точной тройки (17) следует, что E' принадлежит подкатегории, порожденной тройкой $\langle \mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}(0, -1), \mathcal{O} \rangle_{\text{cat}}$, и $\text{Ext}^q(E', \mathcal{O}(-1, -1)) = 0$ для всех q . Покажем теперь, что стабильность пучка E равносильна стабильности пучка E' .

ЛЕММА 8. Пусть в точной последовательности пучков без кручения на поверхности

$$0 \longrightarrow V \otimes E'' \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

пучок E'' локально свободен, стабилен и пространство $\text{Hom}(E', E'')$ тривиально. Предположим, что наклоны пучков E'' и E ($\mu(E) = \deg E / r(E)$) удовлетворяют условию

$$\det \begin{pmatrix} \deg E'' & \deg E \\ r(E'') & r(E) \end{pmatrix} = -1.$$

Тогда стабильность пучка E равносильна стабильности пучка E' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из условия леммы следует неравенство $\mu(E'') < \mu(E') < \mu(E)$. Предположим, что пучок E имеет факторпучок $E \rightarrow G \rightarrow 0$ с $\mu(E) \geq \mu(G)$. Без ограничения общности можно считать, что пучок G стабилен. Поскольку ранг пучка G строго меньше ранга пучка E , условие на определитель влечет неравенство $\mu(E'') \geq \mu(G)$. С другой стороны, $\mu(E') > \mu(E'')$, поэтому $\mu(E') > \mu(G)$. Тем самым, G является дестабилизирующим факторпучком у E' .

Предположим теперь, что пучок E стабилен, а E' имеет стабильный факторпучок G' , удовлетворяющий условию $\mu(G') \leq \mu(E')$. Как следует из предположений на определитель либо $\mu(G') < \mu(E'')$, что противоречит стабильности пучка E'' и наличию ненулевого отображения $\varphi: V \otimes E'' \rightarrow E' \rightarrow G'$, либо $\mu(G') = \mu(E'')$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \ker \varphi & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & V \otimes E'' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E \longrightarrow 0. \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} \varphi & \xrightarrow{\psi} & G' & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (19)$$

Так как $\operatorname{im} \varphi$ – образ морфизма полустабильных пучков равных наклонов, то $\mu(\operatorname{im} \varphi) = \mu(E'')$. Индукцией по числу стабильных факторов в фильтрации Жордана–Гёльдера покажем, что каждый фактор такой фильтрации пучка $\operatorname{im} \varphi$ изоморфен E'' . Из левого столбца коммутативной диаграммы (19) следует, что пучок $\operatorname{im} \varphi$ E'' -порожден, т.е. каноническое отображение

$$\operatorname{can}: \operatorname{Hom}(E'', \operatorname{im} \varphi) \otimes E'' \rightarrow \operatorname{im} \varphi$$

является эпиморфизмом, в частности, $\operatorname{Hom}(E'', \operatorname{im} \varphi) \neq 0$. Пусть $\varphi_1: E'' \rightarrow \operatorname{im} \varphi$ – произвольное ненулевое отображение.

Если $\operatorname{im} \varphi$ стабилен, то ввиду стабильности E'' и равенства $\mu(\operatorname{im} \varphi) = \mu(E'')$ отображение φ_1 – изоморфизм вне конечного числа точек [8]. Кроме того, так как пучок E'' локально свободен и не существует нетривиальных расширений расслоений при помощи пучков с нульмерным носителем [9], φ_1 – изоморфизм всюду.

Предположим теперь, что $\operatorname{im} \varphi$ всего лишь полустабилен, тогда φ_1 – вложение, а к его коядру можно применить предположение индукции.

Теперь обратим внимание на морфизм ψ из диаграммы (19). Он вкладывает локально свободный полустабильный пучок $\operatorname{im} \varphi$ в стабильный пучок G' , и $\mu(G') = \mu(\operatorname{im} \varphi)$. Ясно, что такое возможно лишь в случае $\operatorname{im} \varphi \cong G' \cong E''$. Тем самым, мы получили ненулевой элемент из пространства $\operatorname{Hom}(E', E'')$, что противоречит предположению леммы.

Из леммы 8 следует, что каждому классу изоморфных стабильных пучков E из $\mathcal{M}(r, (a, b), k)$ можно однозначно сопоставить класс изоморфных стабильных пучков E' с дискретными инвариантами (18). Простыми вычислениями проверяется, что они удовлетворяют условиям ii). Поэтому согласно теореме 4 каждому классу пучков из $\mathcal{M}(r, (a, b), k)$ сопоставляется точка на многообразии

$$N = N(k - r - a - b - ab, -k - ab - a, -k - ab - b).$$

На многообразии N существует универсальное расслоение с сечением, которое интерпретируется как эпиморфизм расслоений

$$\tau: \mathcal{U}_1 \otimes H_{13}^* \oplus \mathcal{U}_2 \otimes H_{23}^* \rightarrow \mathcal{U}_3 \rightarrow 0,$$

где $H_{13} = \text{Hom}(\mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O})$, $H_{23} = \text{Hom}(\mathcal{O}(0, -1), \mathcal{O})$. Зафиксируем векторные пространства $H_{0i} = \text{Hom}(\mathcal{O}(-1, -1), E_i)$, где $E_1 = \mathcal{O}(-1, 0)$, $E_2 = \mathcal{O}(0, -1)$, $E_3 = \mathcal{O}$, и определим тензоры $\delta_i \in H_{0i}^* \otimes H_{i3}^* \otimes H_{03}$, которые соответствуют спариванию Ионеды $\delta_i: H_{0i} \otimes H_{i3} \rightarrow H_{03}$. С другой стороны, их можно рассматривать как отображения $\delta_i: H_{0i} \rightarrow H_{i3}^* \otimes H_{03}$. Композицию отображений

$$\mathcal{U}_1 \otimes H_{01} \oplus \mathcal{U}_2 \otimes H_{02} \xrightarrow{\delta} \mathcal{U}_1 \otimes H_{13}^* \otimes H_{03} \oplus \mathcal{U}_2 \otimes H_{23}^* \otimes H_{03} \xrightarrow{\tau \otimes \text{id}} \mathcal{U}_3 \otimes H_{03}$$

обозначим через ψ , где $\delta = \text{id} \otimes \delta_1 \oplus \text{id} \otimes \delta_2$.

Пусть $\mathbf{Gr} = \text{Gr}(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1 \otimes H_{01} \oplus \mathcal{U}_2 \otimes H_{02})$ – грассманизация расслоения с подрасслоениями ранга $\dim U_0$ и $\mathcal{S}$ – соответствующее универсальное подрасслоение на $\mathbf{Gr}$. Обозначим через π_N проекцию относительного грассманиана на базу $\pi_N: \mathbf{Gr} \rightarrow N$ и $\widetilde{\mathcal{U}}_i = \pi_N^* \mathcal{U}_i$. Тогда на $\mathbf{Gr}$ возникает последовательность расслоений

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\eta} \widetilde{\mathcal{U}}_1 \otimes H_{01} \oplus \widetilde{\mathcal{U}}_2 \otimes H_{02} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \widetilde{\mathcal{U}}_3 \otimes H_{03}. \quad (20)$$

Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество нулей композиции $\tilde{\psi} \circ \eta$ и покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{M}(r, (a, b), k)$ и $\mathcal{Z}$. Для этого достаточно проверить, что каждому классу изоморфных монад (2) соответствует единственная точка на $\mathcal{Z}$, и наоборот.

Монода (2) определяется парой морфизмов α и β , которым однозначно соответствуют линейные отображения

$$t_\alpha: U_0 \rightarrow U_1 \otimes H_{01} \oplus U_2 \otimes H_{02} \quad \text{и} \quad t_\beta: U_1 \otimes H_{13}^* \oplus U_2 \otimes H_{23}^* \rightarrow U_3.$$

Так как α – мономорфизм, то t_α – очевидно, вложение. Следовательно, монода (2), построенная по стабильному пучку E , задает точку $z_E = (t_\alpha, t_\beta)$ в $\mathbf{Gr}$. Покажем, что $z_E \in \mathcal{Z}$.

Поскольку $\eta|_{z_E} = t_\alpha$, а $\tilde{\psi}|_{z_E} = t_\beta$, нам достаточно проверить, что композиция

$$U_0 \xrightarrow{t_\alpha} U_1 \otimes H_{01} \oplus U_2 \otimes H_{02} \xrightarrow{\delta} U_1 \otimes H_{13}^* \otimes H_{03} \oplus U_2 \otimes H_{23}^* \otimes H_{03} \xrightarrow{t_\beta \otimes \text{id}} U_3 \otimes H_{03}$$

нулевая.

Зафиксируем базисы: $\{a_i\}$ в пространстве U_0 , $\{b_j\}$ в пространстве U_1 , $\{c_s\}$ в пространстве U_2 и $\{d_l\}$ в пространстве U_3 . В этих базисах морфизм α моноды задается парой матриц $F^1 = (f_{ji}^1)$ и $F^2 = (f_{si}^2)$, где $f_{ji}^1 \in H_{01}$, $f_{si}^2 \in H_{02}$. Морфизм β также задается парой матриц $G^1 = (g_{lj}^1)$ и $G^2 = (g_{ls}^2)$, где $g_{lj}^1 \in H_{13}$, $g_{ls}^2 \in H_{23}$. Тем самым, композиция $\beta \circ \alpha$ в матричном виде представляется суммой $G^1 \cdot F^1 + G^2 \cdot F^2$, где произведения $g_{lj}^1 \circ f_{ji}^1$ и $g_{ls}^2 \circ f_{si}^2$ понимаются как композиции отображений. Следовательно, условие $\beta \circ \alpha = 0$ равносильно равенству

$$\sum_{j=1}^{u_1} g_{lj}^1 \circ f_{ji}^1 + \sum_{s=1}^{u_2} g_{ls}^2 \circ f_{si}^2 = 0. \quad (21)$$

С другой стороны, линейные отображения t_α и t_β в выбранных базисах записываются теми же матрицами, что и морфизмы монады. Поэтому

$$t_\alpha \left(\sum_{i=1}^{u_0} x_i \cdot a_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{u_0} x_i \sum_{j=1}^{u_1} b_j \otimes f_{ji}^1, \sum_{i=1}^{u_0} x_i \sum_{s=1}^{u_2} c_s \otimes f_{si}^2 \right).$$

Фиксируя базис $\{h_k\}$ в пространстве H_{03} , можно записать элемент

$$\delta \circ t_\alpha \left(\sum_{i=1}^{u_0} x_i \cdot a_i \right)$$

как

$$\left(\sum_{j=1}^{u_1} b_j \otimes \sum_{i=1}^{u_0} x_i \sum_{k=1}^n \lambda_{ji}^{1k} \otimes h_k, \sum_{s=1}^{u_2} c_s \otimes \sum_{i=1}^{u_0} x_i \sum_{k=1}^n \lambda_{si}^{2k} \otimes h_k \right), \quad (22)$$

где $\lambda_{ji}^{1k} \in H_{13}^*$, $\lambda_{si}^{2k} \in H_{23}^*$ и $\sum_{k=1}^n \lambda_{ji}^{1k} \otimes h_k$ – морфизм из H_{13} в H_{03} , переводящий элемент $g \in H_{13}$ в композицию $g \circ f_{ji}^1$. Сумма

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{si}^{2k} \otimes h_k$$

определяется аналогично.

Теперь, применяя к (22) отображение $t_\beta \otimes \text{id}$, имеем

$$\sum_{l=1}^{u_3} d_l \otimes \sum_{i=1}^{u_0} x_i \left(\sum_{j=1}^{u_1} g_{lj}^1 \circ f_{ji}^1 + \sum_{s=1}^{u_2} g_{ls}^2 \circ f_{si}^2 \right).$$

Отсюда и из равенства (21) видно, что точка $z_E = (t_\alpha, t_\beta)$, соответствующая стабильному пучку E , попадает в $\mathcal{X}$. Более того, эти рассуждения можно обратить и доказать, что если $z_E = (t_\alpha, t_\beta) \in \mathcal{X}$, то композиция $\beta \circ \alpha = 0$. Итак, мы доказали следующее утверждение:

точки замкнутой подсхемы $\mathcal{X} \subset \mathbf{Gr}$ взаимно однозначно соответствуют классам изоморфных комплексов (2), причем β в них всегда эпиморфно.

Проверим, что α в этих комплексах – вложение. Поскольку β соответствует стабильному представлению t_β , то его ядро $\ker \beta$ – стабильное расслоение, причем, как легко следует из простых вычислений, наклон $\ker \beta$ удовлетворяет соотношению

$$\det \begin{pmatrix} -2 & \deg \ker \beta \\ 1 & r(\ker \beta) \end{pmatrix} = -1. \quad (23)$$

Далее, поскольку композиция $\beta \circ \alpha$ тривиальна, то существует единственное отображение $\alpha': U_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1) \rightarrow \ker \beta$, ядро которого совпадает с ядром α . Пусть $I = \text{im } \alpha$. Тогда из стабильности расслоений $\mathcal{O}(-1, -1)$ и $\ker \beta$ следует

$$-2 \leq \mu(I) < \mu(\ker \beta),$$

что вместе с соотношением (23) и неравенством $r(I) < r(\ker \beta)$ влечет $\mu(I) = -2$. Отсюда, как и при доказательстве леммы 8, вытекает $I = U'_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1)$, т.е. $\ker \alpha = \ker \alpha' = U''_0 \otimes \mathcal{O}(-1, -1)$. А этот факт противоречит мономорфности t_α .

Таким образом, мы доказали, что точки замкнутой подсхемы $\mathcal{Z} \subset \mathbf{Gr}$ взаимно однозначно соответствуют точкам $\mathcal{M}(r, (a, b), k)$. Теперь осталось ввести структуру тонкого многообразия модулей на $\mathcal{Z}$.

Обозначим ограничение пучков $\widetilde{\mathcal{U}}_i$ на $\mathcal{Z}$ символами $\overline{\mathcal{U}}_i$ и ограничение $\mathcal{S}$ на $\mathcal{Z}$ через $\overline{\mathcal{S}}$. Тогда последовательность (20) при ограничении на $\mathcal{Z}$ дает комплекс

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{S}} \longrightarrow \overline{\mathcal{U}}_1 \otimes H_{01} \oplus \overline{\mathcal{U}}_2 \otimes H_{02} \longrightarrow \overline{\mathcal{U}}_3 \otimes H_{03} \longrightarrow 0. \quad (24)$$

Обозначим проекции прямого произведения $Q \times \mathcal{Z}$ на сомножители Q и $\mathcal{Z}$ через p_1 и p_2 соответственно и положим по определению $p_2^* \overline{\mathcal{U}}_i = \mathcal{V}_i$, $p_2^* \overline{\mathcal{S}} = \mathcal{V}_0$. Тогда на прямом произведении $Q \times \mathcal{Z}$ возникает монада

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_0 \otimes p_1^* \mathcal{O}(-1, -1) \longrightarrow \mathcal{V}_1 \otimes p_1^* \mathcal{O}(-1, 0) \oplus \mathcal{V}_2 \otimes p_1^* \mathcal{O}(0, -1) \longrightarrow \mathcal{V}_3 \otimes p_1^* \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

с пучком $\mathcal{E}$ в качестве когомологии в среднем члене. Заметим, что по построению ограничение этой последовательности на точку $z_E \in \mathcal{Z}$ является монадой, когомология которой изоморфна пучку E . Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно проверить универсальность семейства $\mathcal{E}$ над базой $\mathcal{Z}$, т.е. доказать, что для любого семейства стабильных пучков $\mathcal{F}$ с дискретными инвариантами из условия основной теоремы над базой S существует отображение $\varphi: S \rightarrow \mathcal{Z}$ такое, что пучок $\mathcal{F}$ на $Q \times S$ изоморфен $(\text{id} \times \varphi)^* \mathcal{E}$, где $\text{id} \times \varphi: Q \times S \rightarrow Q \times \mathcal{Z}$.

Как уже отмечалось, к пучку $\mathcal{F}$ на $Q \times S$ сходится спектральная последовательность Бейлинсона–Горденцева с первым членом

$$E_1^{p,q} = \pi_S^* \mathcal{E} \text{xt}_{\pi_S}^q(\pi_Q^*(\vee E_{3+p}), \mathcal{F}) \otimes \pi_Q^* E_{3+p}, \quad q = 0, 1, 2, \quad p = -3, -2, -1, 0,$$

где π_S и π_Q – проекции прямого произведения $Q \times S$ на сомножители, и

$$(E_0, E_1, E_2, E_3) = (\mathcal{O}(-1, -1), \mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}(0, -1), \mathcal{O}), \\ (\vee E_3, \vee E_2, \vee E_1, \vee E_0) = (\mathcal{O}, \mathcal{O}(0, 1), \mathcal{O}(1, 0), \mathcal{O}(1, 1)).$$

Как при доказательстве теоремы 3, мы видим, что эта спектральная последовательность вырождается в монаду

$$0 \longrightarrow \pi_S^* F_0 \otimes \pi_Q^* E_0 \xrightarrow{\alpha} \pi_S^* F_1 \otimes \pi_Q^* E_1 \oplus \pi_S^* F_2 \otimes \pi_Q^* E_2 \xrightarrow{\beta} \pi_S^* F_3 \otimes \pi_Q^* E_3 \longrightarrow 0$$

с когомологией $\mathcal{F}$, где $F_i = \mathcal{E} \text{xt}_{\pi_S}^1(\pi_Q^*(\vee E_{3+p}), \mathcal{F})$.

Ограничение этой монады на точку $s_E \in S$, соответствующую пучку E , является стандартной монадой (2) на квадрике, построенной по E . Сопоставляя каждой точке $s_E \in S$ представление колчана, соответствующее ограничению β на $Q \times s_E$, мы получим отображение $\nu: S \rightarrow N$, причем $\nu^* \mathcal{U}_i = F_i$, $i = 0, 1, 2$, где $\mathcal{U}_i$ – универсальные расслоения на N .

Ввиду универсальности относительного грассманиана это отображение поднимается до отображения в $\mathbf{Gr}$ $\varphi: S \rightarrow \mathbf{Gr}$, причем образ $\nu(S)$ этого отображения содержится в $\mathcal{X}$, а обратный образ комплекса (24) при отображении φ является монадой

$$0 \longrightarrow F_0 \otimes L_3^* \longrightarrow F_1 \otimes V_1^* \oplus F_2 \otimes V_2^* \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0.$$

Следовательно, $(\mathrm{id} \times \varphi)^* \mathcal{E} \cong \mathcal{F}$ и теорема доказана.

В заключение мы покажем, что для любого натурального $k \geq 4$ многообразие модулей $\mathcal{M}(3, (-4, -1), k)$ непусто, т.е. существует стабильный пучок ранга 3 с $c_1 = (-4, -1)$ и $c_2 = k$.

Рассмотрим пару обратимых пучков $(\mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}(0, 1))$ на квадрике. Очевидно, она является исключительной, т.е.

$$\mathrm{Ext}^q(\mathcal{O}(0, 1), \mathcal{O}(-1, 0)) = 0 \quad \forall q, \quad \mathrm{Ext}^q(\mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}(0, 1)) = 0 \quad \text{при } q > 0.$$

Левая перестройка этой пары (см. [2]) определяет исключительное расслоение E :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}(0, 1)) \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathcal{O}(0, 1) \longrightarrow 0.$$

Так как $\dim \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1, 0), \mathcal{O}(0, 1)) = 4$, то $r(E) = 3$, $c_1(E) = (-4, -1)$, $c_2(E) = 4$. Кроме того, исключительные расслоения на квадрике, как и на всех поверхностях Дель Пеццо, стабильны [2].

Наконец, рассмотрим произвольный эпиморфизм

$$\pi: E \rightarrow \mathcal{O}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{P_d} \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{O}_{P_i}$ – небоскребы в точках P_i . Его ядро – стабильный пучок ранга 3 с $c_1 = (-4, -1)$ и $c_2 = k + d$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Drezet J.-M. Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ // J. Reine Angew. Math. 1987. V. 380. P. 14–58.
- [2] Карпов Б. В. Полустабильные пучки на двумерной квадрике и модули Кронекера // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 38–74.
- [3] Ellingsrud G., Strømme S. A. Towards the Chow Ring of the Moduli Space for Stable Sheaves on $\mathbb{P}_2$ with $c_1 = 1$. Preprint. Oslo: Oslo Univ., 1991.
- [4] King A. Moduli of representations of finite-dimensional algebras // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1994. V. 45. P. 515–530.
- [5] Bondal A. I. Helices, representation of Quivers and Koszul algebras // Helices and Vector Bundles. London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 148. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. P. 75–95.
- [6] Рудаков А. Н. Исключительные расслоения на квадрике // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 788–812.
- [7] Gorodentsev A. L. Exceptional objects and mutations in derived categories // Helices and Vector Bundles. London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 148. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. P. 57–74.
- [8] Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. М.: Мир, 1984.
- [9] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.