Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, Диагонализация компактных операторов в гильбертовых модулях над C^* -алгебрами нулевого вещественного ранга, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 865–870

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:56:15

УДК 517.98

ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ МОДУЛЯХ НАД C^* -АЛГЕБРАМИ НУЛЕВОГО ВЕЩЕСТВЕННОГО РАНГА

В. М. Мануйлов

Известно, что классическая теорема Гильберта–Шмидта может быть обобщена на случай компактных операторов в гильбертовых $\mathcal{A}$ -модулях над W^* -алгебрами конечного типа, т.е. компактные операторы в $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*$ при незначительных ограничениях могут быть диагонализированы над $\mathcal{A}$. Мы показываем, что если $\mathcal{B}$ – слабо плотная C^* -подалгебра нулевого вещественного ранга в $\mathcal{A}$, то при некотором дополнительном предположении естественное продолжение компактного оператора с $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ на $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^* \supset \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ может быть диагонализировано так, чтобы диагональные элементы были из исходной C^* -алгебры $\mathcal{B}$.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Пусть $\mathcal{A}$ – C^* -алгебра. Мы рассматриваем гильбертовы модули над $\mathcal{A}$ [1], т.е. (правые) $\mathcal{A}$ -модули $\mathcal{M}$, снабженные $\mathcal{A}$ -значным внутренним произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$, которое удовлетворяет следующим условиям:

- i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ для каждого $x \in \mathcal{M}$ и $\langle x, x \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ для всех $x, y \in \mathcal{M}$;
- iii) отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\mathcal{A}$ -линейно по второму аргументу;
- iv) модуль $\mathcal{M}$ замкнут относительно нормы $\|x\|^2 = \|\langle x, x \rangle\|_{\mathcal{A}}$.

Через $\mathcal{M}^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}; \mathcal{A})$ мы обозначим $\mathcal{A}$ -модуль, дуальный для $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ – гильбертов $\mathcal{A}$ -модуль последовательностей $a = (a_k)$, $a_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, таких, что ряд $\sum a_k^* a_k$ сходится в C^* -алгебре $\mathcal{A}$ по норме, со стандартным базисом $\{e_k\}$, а $L_n(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ – его подмодуль, порожденный элементами $e_1, \dots, e_n$ этого базиса. Внутреннее $\mathcal{A}$ -значное произведение на модуле $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ задается формулой $\langle x, y \rangle = \sum x_k^* y_k$ для $x, y \in \mathcal{A}$. Ограниченный оператор $\mathcal{K}: \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ называется *компактным* [2], [3], если он обладает сопряженным оператором и лежит в замыкании линейной оболочки операторов $\theta_{x,y}$ вида $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z \rangle$, $x, y, z \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$. Мы будем предполагать, что компактный оператор $\mathcal{K}$ является строго положительным, т.е. выполнено операторное неравенство $\langle \mathcal{K}x, x \rangle \geq 0$ и $\text{Ker } \mathcal{K} = 0$. Пусть $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*$ – дуальный для $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ модуль. Известно [4], что в случае, когда $\mathcal{A}$ является W^* -алгеброй, внутреннее произведение может быть естественным образом продолжено на модуль $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00108а.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{A}$ – W^* -алгебра. Назовем оператор $\mathcal{K}$ *диагонализируемым*, если найдутся семейства элементов $\{x_i\} \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*$ и операторов $\lambda \in \mathcal{A}$ такие, что

- i) семейство $\{x_i\}$ ортонормировано, т.е. $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$;
- ii) $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*$ совпадает с $\mathcal{A}$ -модулем $\mathcal{M}^*$, дуальным к модулю $\mathcal{M}$, порожденному семейством $\{x_i\}$;
- iii) $\mathcal{K}x_i = x_i\lambda_i$;
- iv) для любых унитарных операторов $u_i, u_{i+1} \in \mathcal{A}$ выполняется операторное неравенство

$$u_i^* \lambda_i u_i \geq u_{i+1}^* \lambda_{i+1} u_{i+1}. \quad (1)$$

Элементы x_i мы будем называть *собственными векторами*, а операторы λ_i – *собственными значениями* оператора $\mathcal{K}$. Следует отметить, что собственные векторы и собственные значения определены неоднозначно.

Изучение задачи диагонализации операторов в гильбертовых модулях было начато Р. Кэйдисоном [5] и продолжено в различных аспектах в [6]–[9] и др. В [10], [11] была доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если $\mathcal{A}$ – конечная σ -конечная W^* -алгебра, то компактный строго положительный оператор $\mathcal{K}$ является диагонализируемым, а его собственные значения определены однозначно с точностью до унитарной эквивалентности.*

Известно, что в коммутативном случае, т.е. когда $\mathcal{C} = C(X)$, компактные операторы не могут быть диагонализированы в модуле $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, однако это становится возможным, если перейти к большему модулю над большей W^* -алгеброй $L^\infty(X) \supset \mathcal{C}$. Это приводит к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{C} = C^*$ -алгебра, допускающая слабо плотное вложение в конечную σ -конечную W^* -алгебру $\mathcal{A}$, а $\mathcal{K}$ – компактный строго положительный оператор в $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Этот оператор естественным образом продолжается на модуль $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, где он остается компактным и строго положительным, и по теореме 1 он может быть диагонализирован в этом модуле. Назовем C^* -алгебру $\mathcal{C}$ допускающей *слабую диагонализацию*, если диагональные элементы каждого $\mathcal{K}$ могут быть выбраны из C^* -алгебры $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$.

ПРОБЛЕМА. Описать класс C^* -алгебр, допускающих слабую диагонализацию.

Обозначим через $\mathcal{Z} = C(Z)$ центр W^* -алгебры $\mathcal{A}$, а через T – стандартный точный след на $\mathcal{A}$, принимающий значения в $\mathcal{Z}$, $T(1) = 1$. Предположим, что C^* -подалгебра $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$ обладает следующим свойством:

- (*) для любых двух проекторов $p, q \in \mathcal{B}$ найдутся в C^* -алгебре $\mathcal{B}$ эквивалентные (в $\mathcal{B}$) проекторы $r_p \sim r_q$, $r_p \leq p$, $r_q \leq q$, такие, что $T(r_p) = T(r_q) = \min\{T(p)(z), T(q)(z)\}$, $z \in Z$.

Цель настоящей работы – показать, что класс C^* -алгебр, допускающих слабую диагонализацию, содержит наряду с коммутативными также слабо плотные C^* -подалгебры со свойством (*) нулевого вещественного ранга в конечных σ -конечных W^* -алгебрах.

Напомним, что нулевой вещественный ранг ($r_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}) = 0$) означает [12], что каждый самосопряженный оператор в $\mathcal{B}$ может быть аппроксимирован операторами с конечным спектром, т.е. имеющими вид $\sum \alpha_i p_i$, где $p_i \in \mathcal{B}$, самосопряженными взаимно ортогональными проекторами, и $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Согласно [12] в этом случае также $r_{\mathbb{R}}(\text{End}_{\mathcal{B}}(L_n(\mathcal{B}))) = 0$.

2. Непрерывность собственных значений. Покажем, что собственные значения компактных операторов в гильбертовых модулях над W^* -алгебрами обладают свойством непрерывности. Всюду далее через $\mathcal{A}$ будем обозначать конечную σ -конечную W^* -алгебру.

ЛЕММА. Пусть $\mathcal{K}_1 = \sum \alpha_i^{(1)} P_i^{(1)}$, $\mathcal{K}_2 = \sum \alpha_i^{(2)} P_i^{(2)}$ — строго положительные операторы в $L_n(\mathcal{A})$ с конечным спектром и $\|\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2\| < \varepsilon$. Тогда

- i) в $L_n(\mathcal{A})$ существует унитарный оператор U , отображающий собственные векторы оператора $\mathcal{K}_2$ в собственные векторы оператора $\mathcal{K}_1$, такой, что $\|U^* \mathcal{K}_1 U - \mathcal{K}_2\| < \varepsilon$;
- ii) собственные значения $\{\lambda_i^{(r)}\}$ операторов $\mathcal{K}_r$ ($r = 1, 2$) могут быть выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $\|\lambda_i^{(1)} - \lambda_i^{(2)}\| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку алгебра $\mathcal{A}$ может быть разложена в прямой интеграл конечных факторов, достаточно доказать лемму для случая, когда $\mathcal{A}$ — фактор типа II_1 (доказательство для случая факторов типа I_n очевидно). Обозначим через $E_{\mathcal{K}}(\lambda)$ спектральный проектор оператора $\mathcal{K}$, отвечающий множеству $(-\infty, \lambda)$. Если τ — точный конечный след на $\mathcal{A}$, он может быть продолжен до (бесконечного) следа $\bar{\tau} = \text{tr} \otimes \tau$ на алгебре $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*)$ и до конечного следа на меньшей алгебре $\text{End}_{\mathcal{A}}(L_n(\mathcal{A}))$, где $\bar{\tau}(1) = n$. Положим

$$\varepsilon_{\mathcal{K}}(\alpha) = \inf_{\bar{\tau}(E_{\mathcal{K}}(\lambda)) \geq \alpha} \{\lambda\}, \quad 0 \leq \alpha \leq n.$$

Как показано в [13] (непрерывный принцип минимакса),

$$\varepsilon_{\mathcal{K}}(\alpha) = \inf_{P \in \mathcal{P}, \bar{\tau}(P) \geq \alpha} \left\{ \sup_{\xi \in \text{Im } P, \|\xi\|=1} (\mathcal{K}\xi, \xi) \right\}, \quad (2)$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в гильбертовом пространстве, в котором представлена алгебра $\text{End}_{\mathcal{A}}(L_n(\mathcal{A}))$, а $\mathcal{P}$ — множество проекторов в $\text{End}_{\mathcal{A}}(L_n(\mathcal{A}))$. Из (2) следует, что если $\|\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2\| < \varepsilon$, то имеет место неравенство

$$|\varepsilon_{\mathcal{K}_1}(\alpha) - \varepsilon_{\mathcal{K}_2}(\alpha)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Пусть $Q_i^{(r)}$ — проекторы на собственные векторы $x_i^{(r)}$ операторов $\mathcal{K}_r$, отвечающие наибольшим собственным значениям $\lambda_i^{(r)}$, $\bar{\tau}(Q_i^{(r)}) = 1$. По двум разбиениям единицы — $\{P_i^{(1)}, Q_i^{(1)}\}$ и $\{P_i^{(2)}, Q_i^{(2)}\}$, — заданным разложениями $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, можно построить более тонкое разбиение единицы. Согласно [14] существуют множества взаимно ортогональных проекторов $R_m^{(r)} \in \text{End}_{\mathcal{A}}(L_n(\mathcal{A}))$ такие, что

- i) $\bigoplus_m R_m^{(r)} = 1$;
- ii) $\bar{\tau}(R_m^{(1)}) = \bar{\tau}(R_m^{(2)})$;
- iii) для каждого m $R_m^{(r)} \leq Q_i^{(r)}$ или $R_m^{(r)} \leq P_j^{(r)}$ для некоторого i или j .

После перенумерации операторы $\mathcal{K}_r$ могут быть записаны в виде $\mathcal{K}_r = \sum \alpha_m^{(r)} R_m^{(r)}$, где $\alpha_1^{(r)} \leq \alpha_2^{(r)} \leq \dots, \alpha_m^{(r)} \in \mathbb{R}$. Это дает возможность определить унитарный оператор $U: L_n(\mathcal{A}) \rightarrow L_n(\mathcal{A})$ такой, что

$$U(\text{Im } R_m^{(2)}) = \text{Im } R_m^{(1)}, \quad (4)$$

следовательно, $U(\operatorname{Im} Q_i^{(2)}) = \operatorname{Im} Q_i^{(1)}$, и значит, U отображает $\mathcal{A}$ -модули, порожденные собственными векторами $x_i^{(2)}$ в модули, порожденные $x_i^{(1)}$, т.е. $Ux_i^{(2)} = x_i^{(1)} \cdot u_i = \bar{x}_i^{(1)}$ для некоторых унитарных элементов $u_i \in \mathcal{A}$. Положим

$$n(\alpha) = \min \left\{ n \mid \tau \left(\bigoplus_{m \geq n} R_m^{(r)} \right) \geq \alpha \right\}.$$

Тогда $\varepsilon \mathcal{K}_r(\alpha) = \alpha_{n(\alpha)}^{(r)}$, и из (3) следует, что $|\alpha_{n(\alpha)}^{(1)} - \alpha_{n(\alpha)}^{(2)}| < \varepsilon$. Меняя α , мы получаем, что

$$|\alpha_m^{(1)} - \alpha_m^{(2)}| < \varepsilon \quad (5)$$

для всех m . Взяв $\alpha = 1$ (тогда $i = 1$), получим

$$\mathcal{K}_r|_{\operatorname{Im} Q_1^{(r)}} = \Lambda_1^{(r)} = \sum_{m \geq n(1)} \alpha_m^{(r)} P_m^{(r)}.$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\|U^* \Lambda_1^{(1)} U - \Lambda_1^{(2)}\| = \left\| \sum_{m \geq n(1)} (\alpha_m^{(1)} - \alpha_m^{(2)}) P_m^{(2)} \right\| \leq \varepsilon \left\| \bigoplus_{m \geq n(1)} P_m^{(2)} \right\| = \varepsilon. \quad (6)$$

Выбирая $\lambda_1^{(r)}$ так, чтобы выполнялись условия $\Lambda_1^{(1)} \bar{x}_1^{(1)} = \bar{x}_1^{(1)} \lambda_1^{(1)}$ и $\Lambda_1^{(2)} x_1^{(2)} = x_1^{(2)} \lambda_1^{(2)}$, получим оценку

$$\|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(2)}\| < \varepsilon. \quad (7)$$

Аналогично можно получить оценки (6), (7) для остальных i .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{K}_r: \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ ($r = 1, 2$) – компактные строго положительные операторы и $\|\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2\| < \varepsilon$. Тогда

- i) в $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*$ существует унитарный оператор U , отображающий собственные векторы оператора $\mathcal{K}_2$ в собственные векторы оператора $\mathcal{K}_1$, такой, что $\|U^* \mathcal{K}_1 U - \mathcal{K}_2\| < \varepsilon$;
- ii) собственные значения $\{\lambda_i^{(r)}\}$ операторов $\mathcal{K}_r$ ($r = 1, 2$) могут быть выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $\|\lambda_i^{(1)} - \lambda_i^{(2)}\| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L_n^{(r)}(\mathcal{A}) \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*$ обозначает гильбертов подмодуль, порожденный первыми n собственными векторами оператора $\mathcal{K}_r$, $L_n^{(r)}(\mathcal{A}) \cong L_n(\mathcal{A})$. В [11] показано, что ортогональное дополнение к такому подмодулю изоморфно $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*$ и норма ограничения компактного оператора $\mathcal{K}_r$ на ортогональное дополнение к $L_n^{(r)}(\mathcal{A})$ в $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*$ стремится к 0, следовательно, достаточно рассмотреть случай операторов в модуле $L_n(\mathcal{A})$, где эти операторы можно аппроксимировать операторами с конечным спектром.

3. Случай $r_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}) = 0$. Покажем теперь, что C^* -алгебры нулевого вещественного ранга со свойством (*) допускают слабую диагонализацию.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{B}$ – слабо плотная C^* -подалгебра в $\mathcal{A}$ со свойством (*) такая, что $r_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}) = 0$. Если $\mathcal{K}$ – компактный строго положительный оператор в $\mathcal{B}$ -модуле $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, то собственные значения $\{\lambda_i\}$ диагонализации естественного продолжения $\mathcal{K}$ на $\mathcal{A}$ -модуль $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*$ могут быть выбраны так, что $\lambda_i \in \mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на результаты С. Жанг [15]. Согласно [12],[15] оператор $\mathcal{K}$ может быть аппроксимирован операторами $\mathcal{K}_n \in \text{End}_{\mathcal{B}}(L_n(\mathcal{B}))$ с конечным спектром. Согласно [15, следствие 3.5] существуют унитарные операторы $U_n \in \text{End}_{\mathcal{B}}(L_n(\mathcal{B}))$ такие, что операторы

$$U_n^* \mathcal{K}_n U_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(n)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

диагональны, а $\lambda_i^{(n)} \in \mathcal{B}$ имеют конечный спектр. Покажем, что, пользуясь свойством (*) и выбирая такие U_n подходящим образом, можно добиться выполнения условия (1) для собственных значений $\{\lambda_i^{(n)}\}$. Пусть $\lambda_a = \sum \alpha_k q_k$, $\lambda_b = \sum \beta_l r_l$, где $q_k, r_l \in \mathcal{B}$ – проекторы. Предположим, что $a < b$, но для каких-то m и n имеет место неравенство $\beta_m > \alpha_n$. Пользуясь возможностью диагонализировать проекторы [15], мы можем найти проекторы $s_l \in \mathcal{B}$, эквивалентные r_l и такие, что $s_l = \bigoplus_k s_k^{(l)}$ и $s_k^{(l)} \leq q_k$. Положим

$$\lambda'_a = \sum_{k \neq n} \alpha_k q_k \oplus \sum_{l \neq m} \alpha_n s_n^{(l)} \oplus \beta_n s_n^{(m)}, \quad \lambda'_b = \sum_{l \neq m} \beta_l s_l \oplus \sum_{k \neq n} \beta_k s_k^{(m)} \oplus \alpha_n s_n^{(m)}$$

и заметим, что операторы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda'_n \end{pmatrix}$$

унитарно эквивалентны. Повторяя эту процедуру для всех случаев, когда $\beta_l > \alpha_k$, можно добиться выполнения (1) для λ'_a и λ'_b . Таким же образом можно упорядочить все собственные значения $\mathcal{K}_n$, оставаясь в $\mathcal{B}$. Но согласно свойству (*) если $\|\mathcal{K}_n - \mathcal{K}_{n-1}\| < \varepsilon_n$, то можно найти унитарные элементы $u_{i,n}$ в $\mathcal{B}$ такие, что

$$\|u_{i,n}^* \lambda_i^{(n)} u_{i,n} - \lambda_i^{(n-1)}\| < \varepsilon_n. \quad (8)$$

Поэтому $u_{i,n}^* \lambda_i^{(n)} u_{i,n} \in \mathcal{B}$. Используя (если необходимо) подпоследовательность $\{\mathcal{K}_n\}$, мы можем считать, что в (8) $\varepsilon_n = 1/2^n$. Тогда последовательность

$$\bar{\lambda}_i^{(1)} = \lambda_i^{(1)}, \quad \bar{\lambda}_i^{(2)} = u_{i,2}^* \lambda_i^{(2)} u_{i,2}, \quad \bar{\lambda}_i^{(3)} = u_{i,3}^* u_{i,2}^* \lambda_i^{(3)} u_{i,2} u_{i,3}, \quad \dots$$

является фундаментальной в $\mathcal{B}$. Обозначим ее предел через $\bar{\lambda}_i \in \mathcal{B}$. По следствию для всех $\mathcal{K}_n$ можно найти унитарные операторы U_n , отображающие первые n собственных векторов $\mathcal{K}$ в собственные векторы $\mathcal{K}_n$. Положим $\mathcal{K}'_n = U_n^* \mathcal{K}_n U_n \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^*)$. Тогда

$$\mathcal{K}'_n x_i = x_i \bar{\lambda}_i^{(n)} \quad (9)$$

и $\|\mathcal{K}'_n - \mathcal{K}\| \rightarrow 0$. Переходя к пределу в (9), получим $\mathcal{K} x_i = x_i \bar{\lambda}_i$, следовательно, $\bar{\lambda}_i$ – собственные значения оператора $\mathcal{K}$.

Отметим, что условие (*) является необходимым для того, чтобы C^* -алгебра допускала слабую диагонализацию. Действительно, если оператор $\mathcal{K}$ является прямой суммой двух проекторов, $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, то его собственные значения могут быть упорядочены, только если “общая часть” проекторов $1 - p$ и q есть проектор из алгебры $\mathcal{B}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку для C^* -алгебр A_θ иррационального вращения $r_{\mathbb{R}}(A_\theta) = 0$ (см. [16]) и выполняется свойство (*), теорема 2 дает ответ на вопрос работы [11], где рассматривался оператор Шрёдингера в магнитном поле с иррациональным магнитным потоком. Известно, что такой оператор может рассматриваться как оператор в гильбертовом A_θ -модуле. Поскольку A_θ допускает вложение в фактор $\mathcal{A}$ типа Π_1 как слабо плотная подалгебра [17], этот оператор можно диагонализировать в гильбертовом $\mathcal{A}$ -модуле. Мы показали, что собственные значения этого оператора могут быть выбраны так, чтобы находиться в A_θ . Таким образом, эта ситуация является некоммутативным аналогом случая $\theta = 1$, когда соответствующий оператор может быть диагонализирован над W^* -алгеброй $L^\infty(\mathbb{T}^2)$, но диагональные элементы лежат в меньшей из C^* -алгебр $C(\mathbb{T}^2)$. Аналогичная ситуация имеет место также и в случае рационального θ .

Автор благодарен М. Франку, А. С. Мищенко и Е. В. Троицкому за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Paschke W. L. Inner product modules over B^* -algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 182. P. 443–468.
- [2] Каспаров Г. Г. Топологические инварианты эллиптических операторов. I. K -гомологии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. С. 796–838.
- [3] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Индекс эллиптических операторов над C^* -алгебрами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. С. 831–859.
- [4] Paschke W. L. The double B -dual of an inner product module over a C^* -algebra // Canad. J. Math. 1974. V. 26. P. 1272–1280.
- [5] Kadison R. V. Diagonalizing matrices // Amer. J. Math. 1984. V. 106. P. 1451–1468.
- [6] Grove K., Pedersen G. K. Diagonalizing matrices over $C(X)$ // J. Funct. Anal. 1984. V. 59. P. 64–89.
- [7] Murphy Q. J. Diagonality in C^* -algebras // Math. Z. 1990. V. 199. P. 279–284.
- [8] Frank M., Manuilov V. M. Diagonalizing “compact” operators on Hilbert W^* -modules // Z. Anal. Anwendungen. 1995. V. 14. P. 33–41.
- [9] Sunder V. S., Thomsen K. Unitary orbits of selfadjoints in some C^* -algebras // Houston J. Math. 1992. V. 18. P. 127–137.
- [10] Мануйлов В. М. Диагонализация компактных операторов в гильбертовых модулях над W^* -алгебрами конечного типа // УМН. 1994. Т. 49. №2. С. 159–160.
- [11] Manuilov V. M. Diagonalization of compact operators in Hilbert modules over finite W^* -algebras // Ann. Global Anal. Geom. 1995. V. 13. №3. P. 207–226.
- [12] Brown L. G., Pedersen G. K. C^* -algebras of real rank zero // J. Funct. Anal. 1991. V. 99. P. 131–149.
- [13] Murray F. J., von Neumann J. On rings of operators // Ann. of Math. 1936. V. 37. P. 116–229.
- [14] Takesaki M. Theory of Operator Algebras. V. 1. New York–Heidelberg–Berlin: Springer, 1979.
- [15] Zhang S. Diagonalizing projections // Pacific J. Math. 1990. V. 145. P. 181–200.
- [16] Choi M.-D., Elliot G. A. Density of self-adjoint elements with finite spectrum in an irrational rotation C^* -algebra // Math. Scand. 1990. V. 67. P. 73–86.
- [17] Brenken B. Representations and automorphisms of the irrational rotation algebra // Pacific J. Math. 1984. V. 111. P. 257–282.