Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Марчелан, Б. П. Осиленкер, Оценки полиномов, ортогональных по отношению к скалярному произведению Лежандра–Соболева, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 871–880

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:41:46

УДК 517.538.3

ОЦЕНКИ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО ОТНОШЕНИЮ К СКАЛЯРНОМУ ПРОИЗВЕДЕНИЮ ЛЕЖАНДРА–СОБОЛЕВА

Ф. Марчелан, В. П. Осиленкер

Для ортонормированных полиномов Лежандра–Соболева $\hat{B}_n(x) = \hat{B}_n(x; M, N)$, зависящих от параметров $M \geq 0, N \geq 0$, получены весовые и равномерные оценки на промежутке ортогональности.

Показано, что в отличие от ортонормированных полиномов Лежандра полиномы $\hat{B}_n(x)$ при $M > 0, N > 0$ убывают со скоростью $n^{-3/2}$ в точках 1 и -1 . Вычислены значения $\hat{B}'_n(\pm 1)$.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Целью настоящей работы является анализ полиномов Лежандра–Соболева $B_n(x)$, ортогональных по отношению к симметричному скалярному произведению

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx + M(f(1)g(1) + f(-1)g(-1)) + N(f'(1)g'(1) + f'(-1)g'(-1)), \quad M, N \geq 0. \quad (1)$$

Они были введены в [1], где в терминах полиномов Лежандра

$$P_n(x) = k_n^{(n,0)} x^n + \dots, \quad k_n^{(n,0)} > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2)$$

было доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 1 [1]. *Имеет место следующее представление:*

$$B_n(x) = \frac{a_n}{24}(1-x^2)^2 P_n^{(4)}(x) + d_n(1-x^2)P_n''(x) + e_n P_n(x), \quad (3)$$

где

$$a_n = \frac{MN}{2}(n-1)n(n+1)(n+2) + Nn(n+1), \quad (4)$$

$$d_n = -\frac{1}{12}Nn(n+1)(n-2)(n+3) - M, \quad (5)$$

$$e_n = 1 - \frac{1}{24}N(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3). \quad (6)$$

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Comision Intersterial de Ciencia y Tecnologia (CICYT) of Spain, грант PB-C00-01. Работа второго автора выполнена при поддержке комитета Высшего образования РФ, грант № 2-16-4-24, и Международного научного фонда, грант МБ6300.

Очевидно, что $B_n(x)$ – симметрические полиномы, т.е.

$$B_n(-x) = (-1)^n B_n(x). \quad (7)$$

С другой стороны (см. [1]),

$$B_n(1) = e_n, \quad B'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2} + M \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}. \quad (8)$$

Нас будут интересовать оценки роста полиномов $B_n(x)$ на промежутке $[-1, 1]$. В некотором смысле будет продолжено начатое в [1] и [2] изучение полиномов в дискретных пространствах Соболева, где авторы получили представления таких полиномов и распределение их нулей. В более общей ситуации эти вопросы рассмотрены в [3]. Обзор результатов, связанных с рекуррентными соотношениями, имеется в [4]. Несимметричный случай с единичной точечной массой изучен в [5], следуя изложению [1]. Ортогональные полиномы в дискретном пространстве с нестандартным скалярным произведением изучены в [6].

В п. 2 заметки приведены вспомогательные утверждения, содержащие полиномы Лежандра и их производные. Эти результаты необходимы для п. 3, где получены оценки для полиномов, ортонормальных по отношению к скалярному произведению (1), порядок роста этих полиномов в интервале $(-1, 1)$ и значения их в точках 1 и -1 .

2. Некоторые результаты для ультрасферических полиномов. Пусть $\{P_n^{(\alpha)}(x)\}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in [-1, 1]$) – система ультрасферических полиномов, т.е. полиномов n -й степени, ортогональных на $(-1, 1)$ по весу $(1-x^2)^\alpha$ ($\alpha > -1$), нормализованных следующим образом:

$$P_n^{(\alpha)}(1) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Хорошо известно (см., например, [7, с. 282]), что

$$\frac{d}{dx}(P_n^{(\alpha)}(x)) = \frac{1}{2}(n+2\alpha+1)P_{n-1}^{(\alpha+1)}(x),$$

откуда для ортогональных полиномов Лежандра $P_n(x) \equiv P_n^{(0)}(x)$ имеем

$$\frac{d^k P_n}{dx^k} = \frac{1}{2^k}(n+1)_k P_{n-k}^{(k)}(x), \quad (10)$$

где $(m)_k$ – символ Похаммера:

$$(m)_0 = 1, \quad (m)_k = m(m+1) \cdots (m+k-1).$$

Следовательно,

$$\left. \frac{d^k P_n}{dx^k} \right|_{x=1} = \frac{1}{2^k}(n+1)_k \binom{n}{k} \quad (11)$$

и также

$$\left. \frac{d^k P_n}{dx^k} \right|_{x=-1} = (-1)^{n-k} \left. \frac{d^k P_n}{dx^k} \right|_{x=1}.$$

С другой стороны, полиномы Лежандра удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению второго порядка [7, с. 124]

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (12)$$

и связаны трехчленным рекуррентным соотношением [7, с. 121]

$$xP_n(x) = \beta_n P_{n+1}(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \quad (13)$$

где

$$\beta_n = \frac{n+1}{2n+1}, \quad \gamma_n = \frac{n}{2n+1}.$$

Последовательно дифференцируя (13), получаем

$$x \frac{d^k P_n}{dx^k} = \beta_n \frac{d^k P_{n+1}(x)}{dx^k} + \gamma_n \frac{d^k P_{n-1}(x)}{dx^k} - k \frac{d^k P_n}{dx^k}. \quad (14)$$

Из (12) и (14) при $k = 1$ вытекает

$$(1 - x^2)P_n''(x) = 2\beta_n P_{n+1}'(x) + 2\gamma_n P_{n-1}'(x) - (n^2 + n + 2)P_n(x). \quad (15)$$

Дифференцируя (15) и используя (14) при $k = 2$, имеем

$$(1 - x^2)P_n'''(x) = 4\beta_n P_{n+1}''(x) + 4\gamma_n P_{n-1}''(x) - (n^2 + n + 6)P_n'(x). \quad (16)$$

Аналогично, в силу (14) при $k = 3$ из соотношения (16) вытекает

$$(1 - x^2)P_n^{(4)}(x) = 6\beta_n P_{n+1}'''(x) + 6\gamma_n P_{n-1}'''(x) - (n^2 + n + 12)P_n''(x). \quad (17)$$

Далее, умножая равенство (17) на $1 - x^2$ и принимая во внимание (15) и (16), выводим

$$\begin{aligned} (1 - x^2)P_n^{(4)}(x) &= 24\beta_n\beta_{n+1}P_{n+2}''(x) + 24\gamma_{n-1}\gamma_n P_{n-2}''(x) \\ &\quad + 24(\beta_{n-1}\gamma_n + \beta_n\gamma_{n+1})P_n''(x) - 4\beta_n(2n^2 + 5n + 18)P_{n+1}'(x) \\ &\quad - 4\gamma_n(2n^2 - n + 15)P_{n-1}'(x) + (n^2 + n + 2)(n^2 + n + 12)P_n(x). \end{aligned} \quad (18)$$

3. Оценки ортогональных полиномов. Мы рассмотрим только случай $N > 0$, так как анализ роста полиномов, ортогональных относительно весовой функции класса В. М. Бадкова, когда точечные массы расположены на промежутке $[-1, 1]$, был проведен в [6], [8], [9].

Обозначим через $\{\widehat{B}_n(x)\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in [-1, 1]$) систему ортонормированных полиномов по отношению к скалярному произведению (1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \widehat{B}_m(x) \widehat{B}_n(x) dx + M(\widehat{B}_m(1)\widehat{B}_n(1) + \widehat{B}_m(-1)\widehat{B}_n(-1)) \\ + M(\widehat{B}_m'(1)\widehat{B}_n'(1) + \widehat{B}_m'(-1)\widehat{B}_n'(-1)) = \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\widehat{B}_n(x) &= \lambda_n B_n(x), \\ \lambda_n^{-2} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 B_n^2(x) dx + M(B_n^2(1) + B_n^2(-1)) + N(B_n'^2(1) + B_n'^2(-1)).\end{aligned}\quad (19)$$

Так как

$$B_n^2(-1) = B_n^2(1), \quad B_n'^2(-1) = B_n'^2(1),$$

то, принимая во внимание (6)–(8), имеем

$$\begin{aligned}M(B_n^2(1) + B_n^2(-1)) + N(B_n'^2(1) + B_n'^2(-1)) \\ = 2M\left(1 - \frac{1}{24}N(n-2)_6\right)^2 + 2N\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{4}M(n-1)_4\right)^2.\end{aligned}\quad (20)$$

С другой стороны, в силу (3)

$$\begin{aligned}I_n &:= \int_{-1}^1 B_n^2(x) dx = \frac{a_n^2}{576} \int_{-1}^1 (1-x^2)^4 (P_n^{(4)}(x))^2 dx + d_n^2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 (P_n''(x))^2 dx \\ &+ e_n^2 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx + \frac{1}{12} a_n d_n \int_{-1}^1 (1-x^2)^3 P_n^{(4)}(x) P_n''(x) dx \\ &+ \frac{a_n e_n}{12} \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 P_n^{(4)}(x) P_n(x) dx + 2d_n e_n \int_{-1}^1 (1-x^2) P_n''(x) P_n(x) dx.\end{aligned}$$

Откуда, используя (10), получаем

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{a_n^2}{576} \frac{((n+1)_4)^2}{256} \int_{-1}^1 (P_{n-4}^{(4)}(x))^2 (1-x^2)^4 dx \\ &+ \frac{1}{12} a_n d_n \frac{(n+1)_2}{4} \int_{-1}^1 (1-x^2) P_n^{(4)}(x) P_{n-2}''(x) (1-x^2)^2 dx \\ &+ d_n^2 \frac{((n+1)_2)^2}{16} \int_{-1}^1 (P_{n-2}''(x))^2 (1-x^2)^2 dx + e_n^2 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \\ &+ a_n e_n \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 P_n^{(4)}(x) P_n(x) dx + 2d_n e_n \int_{-1}^1 (1-x^2) P_n''(x) P_n(x) dx.\end{aligned}$$

Как хорошо известно [7, с. 272], для нормы ультрасферического полинома

$$\|P_n^{(\alpha)}\|_{2,\alpha}^2 = \int_{-1}^1 (P_n^{(\alpha)}(x))^2 (1-x^2)^\alpha dx$$

имеем

$$\|P_n^{(\alpha)}\|_{2,\alpha}^2 = \frac{2^{2\alpha+1} \Gamma^2(n+\alpha+1)}{n! (2n+2\alpha+1) \Gamma(n+2\alpha+1)}.\quad (21)$$

Покажем, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^3 P_n^{(4)}(x) P_{n-2}''(x) dx &= -\frac{(n-3)(n-2)(n+1)(n+2)}{4} \|P_{n-2}''\|_{2,2}^2, \\ \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 P_n^{(4)}(x) P_n(x) dx &= \frac{(n-3)_4}{2} \|P_n\|_{2,0}^2, \\ \int_{-1}^1 (1-x^2) P_n''(x) P_n(x) dx &= -n(n-1) \|P_n\|_{2,0}^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как доказательства этих соотношений аналогичны, докажем только первое из них (наиболее сложное). Отметим, прежде всего, следующие простые соотношения (см. (2)):

$$\begin{aligned} P_n''(x) &= n(n-1)k_n^{(n,0)}x^{n-2} + \dots, \\ (1-x^2)P_n^{(4)}(x) &= (n-3)_4 k_n^{(n,0)}x^{n-2} + \dots, \end{aligned} \quad (23)$$

$$P_{n-2}''(x) = k_{n-2}^{(n-2,2)}x^{n-2} + \dots. \quad (24)$$

В силу (10) при $k=2$ и (24), сравнивая коэффициенты при x^{n-2} , получаем

$$\frac{k_n^{(n,0)}}{k_{n-2}^{(n-2,2)}} = \frac{(n+1)(n+2)}{4n(n-1)}. \quad (25)$$

Так как полиномы $P_k''(x)$ образуют базис в пространстве полиномов степени $\leq n-2$, то

$$(1-x^2)P_n^{(4)}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \delta_k^{(n-2)} P_k''(x). \quad (26)$$

Сравнивая в (23) и (26) коэффициенты при x^{n-2} и учитывая (25), имеем

$$\delta_{n-2}^{(n-2)} = -\frac{(n-3)(n-2)(n+1)(n+2)}{4}. \quad (27)$$

В силу ортогональности системы $\{P_k''(x)\}$ по весу $(1-x^2)^2$ и соотношений (26), (27) получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)P_n^{(4)}(x)P_{n-2}''(x)(1-x^2)^2 dx &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=0}^{n-2} \delta_k^{(n-2)} P_k''(x) \right)^2 P_{n-2}''(x)(1-x^2)^2 dx \\ &= \delta_{n-2}^{(n-2)} \|P_{n-2}''\|_{2,2}^2 \\ &= -\frac{(n-3)(n-2)(n+1)(n+2)}{4} \|P_{n-2}''\|_{2,2}^2, \end{aligned}$$

что и доказывает первое из соотношений (22).

Учитывая значение $\|P_n\|_{2,2}^2$ (см. (21)), имеем

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{a_n^2}{576} \frac{((n+1)_4)^2}{256} \|P_{n-4}^{(4)}\|_{2,4}^2 + \frac{d_n}{16} ((n+1)_2)^2 \left(d_n - \frac{a_n}{12} (n-2)(n-3) \right) \|P_{n-2}''\|_{2,2}^2 \\ &\quad + e_n \left(e_n + \frac{a_n}{12} (n-3)_4 - 2d_n(n-1)_2 \right) \|P_n\|_{2,0}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_n^2}{576} \frac{2(n-3)_8}{2n+1} + 2d_n \frac{(n+1)_2}{2n+1} \left(d_n - \frac{a_n}{12} (n-2)(n-3) \right) \\
&\quad + e_n \frac{2}{2n+1} \left(e_n + \frac{a_n}{12} (n-3)_4 - 2d_n(n-1)_2 \right).
\end{aligned} \tag{28}$$

Для оценки λ_n^{-2} надо различать следующие две ситуации:

- i) $M > 0, N > 0$;
- ii) $M = 0, N > 0$.

Рассмотрим случай i). В силу (19), (20) и (28)

$$\lambda_n^{-2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 B_n^2(x) dx + 2MB_n^2(1) + 2NB_n'^2(1) \asymp n^{15}, \tag{29}$$

где соотношение $f(n) \asymp g(n)$ понимается в том смысле, что существуют абсолютные положительные постоянные C и D такие, что $Cf(n) \leq g(n) \leq Df(n)$ для достаточно больших n . Действительно, из равенства (28), учитывая (4)–(6) и (20), получаем

$$\lambda_n^{-2} = \frac{1}{576} \frac{M^2 N^2}{4(2n+1)} (n^{16} + 8n^{15} + \dots).$$

Следовательно,

$$\lambda_n^{-2} \leq \frac{1}{576} \frac{M^2 N^2}{4(2n+1)} kn^{16} \leq \frac{1}{576} \frac{M^2 N^2}{8n} kn^{16} = \frac{M^2 N^2}{8 \cdot 576} kn^{15} = Cn^{15}.$$

С другой стороны,

$$\lambda_n^{-2} \geq \frac{1}{576} \frac{M^2 N^2}{12n} (n^{16} + 8n^{15} + \dots) = \frac{M^2 N^2}{576 \cdot 12} (n^{15} + 8n^{14} + \dots) = \tilde{C}n^{15} \left(1 + \frac{8}{n} + \dots \right).$$

Тогда $\tilde{C}(1 + 8/n + \dots) \leq \lambda_n^{-2} n^{-15} \leq C$, где $\tilde{C}$, C – положительные постоянные, не зависящие от n .

В случае ii) из (4) имеем $a_n = Nn(n+1)$. Поэтому, рассуждая как и выше, выводим

$$\lambda_n^{-2} = \frac{N^2}{576} \frac{2}{2n+1} (n^{12} + \dots).$$

Тогда

$$\lambda_n^{-2} \leq \frac{N^2}{576} \frac{2}{2n+1} kn^{12} \leq \frac{N^2}{576} kn^{11} = Cn^{11},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от n .

С другой стороны,

$$\lambda_n^{-2} \geq \frac{N^2}{576} \frac{2}{3n} (n^{12} + \dots) = \tilde{C}n^{11} (1 + \dots).$$

Тогда $\tilde{C} \leq \lambda_n^{-2} n^{-11} \leq C$. Значит, в случае ii) $\lambda_n^{-1} \asymp n^{11/2}$. Объединяя проделанные вычисления, из (29) и последнего соотношения получаем утверждение.

ЛЕММА 2. Для нормирующего множителя λ_n справедливы соотношения

$$\lambda_n^{-1} = \|B_n\| \asymp \begin{cases} n^{15/2}, & \text{если } M > 0, N > 0, \\ n^{11/2}, & \text{если } M = 0, N > 0. \end{cases} \quad (30)$$

Далее, принимая во внимание (10) и хорошо известную оценку ультрасферических полиномов (см. [10, с. 204], [7, с. 299])

$$|P_n^{(\alpha)}(x)| \leq C n^{-1/2} (1-x^2)^{-(\alpha/2+1/4)},$$

получим

$$\begin{aligned} |P_n(x)| &\leq C_1 (1-x^2)^{-1/4} n^{-1/2}, & (1-x^2)|P_n''(x)| &\leq C_2 n^{3/2} (1-x^2)^{-1/4}, \\ (1-x^2)^2 |P_n^{(4)}(x)| &\leq C_3 n^{7/2} (1-x^2)^{-1/4}, \end{aligned} \quad (31)$$

где C_1, C_2, C_3 – абсолютные положительные постоянные, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$, $x \in (-1, 1)$.

Поэтому в случае i) в силу (3)–(6), (19), (30), (31)

$$\begin{aligned} |\hat{B}_n(x)| &\leq n^{-15/2} \left(\frac{a_n}{24} C_3 n^{7/2} + C_2 |d_n| n^{3/2} + C_1 n^{-1/2} |e_n| \right) (1-x^2)^{-1/4} \\ &\leq C n^{-15/2} n^{15/2} (1-x^2)^{-1/4} \leq \tilde{C}_1 (1-x^2)^{-1/4}, \quad x \in (-1, 1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (32)$$

а в случае ii)

$$|\hat{B}_n(x)| \leq \tilde{C}_2 (1-x^2)^{-1/4}, \quad x \in (-1, 1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (33)$$

при этом $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ – абсолютные положительные постоянные, не зависящие от n, x .

Таким образом, оценки (32) и (33) дают следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Для всех $x \in (-1, 1)$ справедлива весовая оценка

$$|\hat{B}_n(x)| \leq C (1-x^2)^{-1/4},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{Z}_+$ и x .

Далее, так как

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n^{(\alpha)}(x)| = P_n^{(\alpha)}(1)$$

(см. [7, с. 288]), из (9)–(11) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)| &= 1, & \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n'(x)| &= P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \\ \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n''(x)| &= P_n''(1) = \frac{1}{8}(n-1)_4. \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда (3) и (19) дают

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq x \leq 1} |\hat{B}_n(x)| &\leq \lambda_n \left(\frac{a_n}{24} \max_{-1 \leq x \leq 1} (1-x^2)^2 |P_n^{(4)}(x)| + |d_n| \max_{-1 \leq x \leq 1} (1-x^2) |P_n''(x)| \right. \\ &\quad \left. + |e_n| \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)| \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Нетрудно видеть, что, используя (12), (18), (34), получаем

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(1-x^2)P_n''(x)| \leq C n^2, \quad \max_{-1 \leq x \leq 1} |(1-x^2)^2 P_n^{(4)}(x)| \leq C n^4, \quad (36)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от n . Подставляя оценки (36) в (35) в силу (30), как в случае i), так и в случае ii), имеем

ЛЕММА 4. *Выполнена оценка*

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\hat{B}_n(x)| \leq C(n+1)^{1/2}, \quad (37)$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Сравнение результатов лемм 3 и 4 приводит к задаче об оценке $\hat{B}_n(1)$ и $\hat{B}'_n(1)$. Отметим, прежде всего, что в соответствии с (8) и (19)

$$|\hat{B}_n(1)| = \lambda_n |e_n|, \quad |\hat{B}'_n(1)| = \lambda_n \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{M}{4}(n-1)_4 \right).$$

Поэтому в силу (30) имеет место

ЛЕММА 5. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} |\hat{B}_n(1)| &\asymp \begin{cases} n^{-3/2}, & \text{если } M > 0, N > 0, \\ n^{1/2}, & \text{если } M = 0, N > 0, \end{cases} \\ |\hat{B}'_n(1)| &\asymp n^{-7/2}, \quad \text{если } M \geq 0, N > 0. \end{aligned}$$

Отметим, что $\hat{B}_n(1) < 0$ и $\hat{B}'_n(1) > 0$ для достаточно больших n . Это означает, что существует по крайней мере один нуль $\hat{B}_n(x)$ справа (и по симметрии по крайней мере один нуль слева) от промежутка $[-1, 1]$. Но по лемме, предшествующей теореме 2.1 в [2], $\hat{B}_n(x)$ имеет по крайней мере $n-2$ различных нуля нечетной кратности в $(-1, 1)$. Как следствие, получаем, что для достаточно больших n $\hat{B}_n(x)$ имеет ровно два нуля вне $[-1, 1]$.

Суммируя полученные результаты (см. (32), (33), (37)), получаем

ТЕОРЕМА. *Для последовательности полиномов $\hat{B}_n(x)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), ортонормированных на $[-1, 1]$ по отношению к скалярному произведению (1), имеют место следующие оценки:*

1) в случае i)

$$\begin{aligned} |\hat{B}_n(x)| &\leq \tilde{C}_1(1-x^2)^{-1/4}, \quad x \in (-1, 1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ \max_{-1 \leq x \leq 1} |\hat{B}_n(x)| &\leq C_1(n+1)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ |\hat{B}_n(1)| &\asymp n^{-3/2}, \quad |\hat{B}_n(-1)| \asymp n^{-3/2}, \\ |\hat{B}'_n(1)| &\asymp n^{-7/2}, \quad |\hat{B}'_n(-1)| \asymp n^{-7/2}; \end{aligned}$$

2) в случае ii)

$$\begin{aligned} |\hat{B}_n(x)| &\leq \tilde{C}_2(1-x^2)^{-1/4}, \quad x \in (-1, 1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ \max_{-1 \leq x \leq 1} |\hat{B}_n(x)| &\leq C_2(n+1)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ |\hat{B}_n(1)| &\asymp n^{1/2}, \quad |\hat{B}_n(-1)| \asymp n^{1/2}, \\ |\hat{B}'_n(1)| &\asymp n^{-7/2}, \quad |\hat{B}'_n(-1)| \asymp n^{-7/2}. \end{aligned}$$

При этом все $\tilde{C}_1, C_1, \tilde{C}_2, C_2$ – абсолютные положительные постоянные, не зависящие от $n \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in (-1, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Интересно сравнить оценки для нестандартного ($N > 0$) и стандартного ($N = 0$) скалярных произведений. Если обозначить через $\{q_n\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) соответствующую последовательность ортонормированных полиномов, то в [9] получены следующие оценки: $|q_n(x)| \leq C(1-x^2)^{-1/4}$ для $x \in (-1, 1)$ (как в лемме 3);

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |q_n(x)| \leq C(n+1)^{1/2}$$

(как в лемме 4); $|q_n(\pm 1)| \leq C(n+1)^{-3/2}$ (как в лемме 5 для $M > 0$, $N > 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как хорошо известно [7, с. 128], для ортонормированных полиномов Лежандра $\hat{P}_n(x)$ максимальное значение

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\hat{P}_n(x)|$$

достигается в точках 1 и -1 . Представляет интерес следующий вопрос: где достигается

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\hat{B}_n(x)|$$

в случае i), т.е. при $M > 0$, $N > 0$?

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Дальнейший анализ должен быть проведен для полиномов Гегенбауэра–Соболева порядка α (см. [1]) для получения оценок в терминах α .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Интересно провести анализ роста полиномов, ортогональных по отношению к скалярному произведению

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx + M(f(c)g(c) + f(-c)g(-c)) + N(f'(c)g'(c) + f'(-c)g'(-c)).$$

Когда $|c| < 1$ и $|c| > 1$, в работе [3] изучено расположение нулей этих полиномов и найдена их связь с полиномами Лежандра.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Аналогичные вопросы можно поставить для полиномов, ортогональных относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) d\mu(x) + Mf(c)g(c) + Nf'(c)g'(c),$$

где

$$d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \prod_{i=1}^n |x-x_i|^{\gamma_i} dx$$

и $\gamma_i > -1$ – обобщенный якобиевый вес. Моделью для сравнения служат результаты статьи [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bavinck H., Meijer H. G. Orthogonal polynomials with respect to a symmetric inner product involving derivatives // *Appl. Anal.* 1992. V. 33. P. 103–117.
- [2] Bavinck H., Meijer H. G. On orthogonal polynomials with respect to an inner product involving derivatives: zeros and recurrence relations // *Indag. Math. (N.S.)* 1990. V. 1. P. 7–18.
- [3] Alfaro M., Marcellan F., Meijer H. G., Rezola M. L. Symmetric orthogonal polynomials for Sobolev-type inner products // *J. Math. Anal.* 1989. V. 184. P. 360–381.
- [4] Evans W. D., Littlejohn L. L., Marcellan F., Markett C., Ronveaux A. On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials // *SIAM J. Math. Anal.* 1995. V. 26. P. 446–467.
- [5] Alfaro M., Marcellan F., Rezola M. L., Ronveaux A. On orthogonal polynomials of Sobolev type: algebraic properties and zeros // *SIAM J. Math. Anal.* 1992. V. 23. P. 737–757.
- [6] Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new results // *J. Comput. Appl. Math.* 1993. V. 48. P. 113–132.
- [7] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
- [8] Guadalupe J. J., Perez M., Varona J. L. Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials relative to measures with mass points // *Mathematika*. 1993. V. 40. P. 331–334.
- [9] Рафальсон С. З. О полиномах, ортогональных с нагрузкой // *Изв. вузов. Матем.* 1965. № 3. С. 146–154.
- [10] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962.

Escuela Politecnica Superior Universidad Carlos III de Madrid
Московский государственный строительный университет

Поступило
02.04.96