Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Павлов, О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 881–891

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1677>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:08:34

УДК 511.33+519.115

О ДВУХ КЛАССАХ ПОДСТАНОВОК С ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ДЛИНЫ ЦИКЛОВ

А. И. Павлов

Пусть Λ – произвольное множество натуральных чисел и $S_n(\Lambda)$ – множество всех подстановок степени n , длины всех циклов которых принадлежат множеству Λ . В работе исследуется асимптотика дроби $|S_n(\Lambda)|/n!$ при $n \rightarrow \infty$ в следующих случаях: 1) Λ является объединением конечного числа непересекающихся арифметических прогрессий; 2) Λ состоит из всех натуральных чисел, которые не делятся ни на одно число из заданного конечного множества попарно взаимно простых натуральных чисел. При этом $|S_n(\Lambda)|$ – число элементов в конечном множестве $S_n(\Lambda)$.

Библиография: 7 названий.

Пусть Λ – произвольное множество натуральных чисел и $S_n(\Lambda)$ – множество всех подстановок степени n , длины всех циклов которых принадлежат множеству Λ . Известно [1], что при $|z| < 1$ выполняется равенство

$$f_\Lambda(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|S_n(\Lambda)|}{n!} z^n = \exp \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{z^\lambda}{\lambda} \right\}, \quad (1)$$

где $|S_0(\Lambda)| = 1$ и $|S_n(\Lambda)|$ – число элементов в конечном множестве $S_n(\Lambda)$.

В прикладной математике часто удобно иметь дело с множеством подстановок с известной арифметикой длин циклов. В связи с этим возникает задача: найти асимптотику дроби $|S_n(\Lambda)|/n! = C_n(\Lambda)$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном множестве Λ , которое выделено из множества всех натуральных чисел условиями арифметического характера. В общем виде задача была поставлена в работе [2]. Здесь будет рассмотрен случай $|\Lambda| = \infty$. Случай $|\Lambda| < \infty$ рассматривался в работе [3].

1. Пусть $1 \leq \nu \leq N$, $\Lambda_\nu = \{m \geq 1 : m = a_\nu k + b_\nu, k = 0, 1, 2, \dots\}$, где целые $a_\nu \geq 2$, $1 \leq b_\nu \leq a_\nu - 1$, $(a_\nu, b_\nu) = 1$, $\Lambda = \bigcup_{\nu=1}^N \Lambda_\nu$, прогрессии Λ_ν и Λ_μ при $\nu \neq \mu$ не пересекаются;

$$E_\nu = \{e^{2\pi i q/a_\nu} : q = 0, 1, \dots, a_\nu - 1\}, \quad E = \bigcup_{\nu=1}^N E_\nu;$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00002.

пусть для каждого $\xi \in E$

$$\alpha(\xi) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ E_\nu \ni \xi}}^N \frac{\xi^{b_\nu}}{a_\nu}, \quad \gamma = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{a_\nu}.$$

Здесь и далее (a, b) – наибольший общий делитель натуральных чисел a и b .

ТЕОРЕМА 1. *Существует набор чисел $A(\xi)$, $\xi \in E$, такой, что при $n \rightarrow \infty$*

$$C_n(\Lambda) = \frac{A(1)}{\Gamma(\gamma)} n^{\gamma-1} + \sum_{\xi \in E \setminus \{1\}} \frac{A(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))} \xi^{-n} n^{\alpha(\xi)-1} + O(n^{\gamma-2} \ln^2 n),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существует число $\delta > 0$, которое не зависит от n и такое, что*

$$C_n(\Lambda) = \frac{A}{\Gamma(\gamma)} n^{\gamma-1} (1 + O(n^{-\delta})),$$

где

$$A = \prod_{\nu=1}^N a_\nu^{-1/a_\nu} \exp \left\{ \frac{1}{b_\nu} - \frac{b_\nu}{a_\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(a_\nu m + b_\nu)} \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $\Lambda = \{m \geq 1 : m = ak + b, k = 0, 1, 2, \dots\}$, где целое $a \geq 2$, $1 \leq b \leq a-1$, $(a, b) = 1$, то при $n \rightarrow \infty$ выполняется равенство*

$$C_n(\Lambda) = \frac{A}{\Gamma(1/a)} n^{1/a-1} + \sum_{q=1}^{a-1} \frac{A_q}{\Gamma(\gamma_q)} e^{-2\pi i q n/a} n^{\gamma_q-1} + O(n^{1/a-2} \ln^2 n),$$

где

$$\gamma_q = \frac{1}{a} e^{2\pi i b q/a}, \quad A_q = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq q}}^{a-2} (1 - e^{2\pi i (q-r)/a})^{-\gamma_r}, \quad 1 \leq q \leq a-1,$$

$$A = a^{-1/a} \exp \left\{ \frac{1}{b} - \frac{b}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(am + b)} \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Далее будет показано, что $\gamma < 1$ и для любого $\xi \in E \setminus \{1\}$ выполняется неравенство $\operatorname{Re} \alpha(\xi) < \gamma$. Легко видеть, что если $\gamma < 1/2$, то каждое ненулевое слагаемое главного члена в формулировке теоремы 1 “больше” остатка.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Покажем, что равенство $\alpha(\xi) = 0$ при некотором $\xi \in E$ возможно. Действительно, пусть $N = 2$, $a_1 = a_2 = a = 2a'$, где $a' \geq 2$ и целое, $b_1 = b$, $b_2 = b + a'$, где $1 \leq b \leq a' - 1$, $(a, b) = 1$. Тогда $E_1 = E_2 = \{e^{2\pi i q/a} : 0 \leq q \leq a - 1\}$ и

$$\alpha(\xi) = \frac{\xi^{b_1}}{a_1} + \frac{\xi^{b_2}}{a_2} = \frac{\xi^b}{a}(1 + \xi^{a'}).$$

Следовательно, из $\xi = e^{2\pi i q/a}$ получим

$$\alpha(\xi) = \frac{\xi^b}{a}(1 + (-1)^q).$$

Значит, если $2 \nmid q$, то $\alpha(\xi) = 0$.

С другой стороны, если $N = 2$ и $a_1 \neq a_2$, то для любого $\xi \in E$ получим $\alpha(\xi) \neq 0$. Действительно, если $\alpha(\xi) = 0$ при $\xi \in E$, то

$$\alpha(\xi) = \frac{\xi^{b_1}}{a_1} + \frac{\xi^{b_2}}{a_2} = 0, \quad \frac{a_2}{a_1} = -\xi^{b_2 - b_1}.$$

Последнее равенство невозможно, так как $a_1 \neq a_2$.

2. Пусть $k_1, \dots, k_s$ – произвольный набор целых чисел, удовлетворяющий условиям:

- а) $k_i \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, s$;
- б) $(k_i, k_j) = 1$ при $i \neq j$.

На множестве всех натуральных чисел определим функцию $\rho(\cdot)$ так, что

$$\rho(m) = \begin{cases} 1 & \text{для } m = 1, \\ (-1)^\tau & \text{для } m = k_{i_1} \cdots k_{i_\tau}, \text{ где } 1 \leq \tau \leq s, \\ 0 & \text{для остальных } m > 1. \end{cases}$$

Пусть $\Lambda = \{m \geq 1 : k_i \nmid m, i = 1, 2, \dots, s\}$.

ТЕОРЕМА 2. Существует набор чисел $A_{a,d}$ такой, что при фиксированном $k = k_1 \cdots k_s$ и $n \rightarrow \infty$

$$C_n(\Lambda) = \sum_{d|k} \left(\sum_{a=1}^d A_{a,d} e^{-2\pi i a n/d} \right) \frac{n^{\gamma_d - 1}}{\Gamma(\gamma_d)} + O(n^{\gamma_1 - 2} \ln^2 n),$$

где

$$\gamma_d = \frac{\rho(d)}{d} \sum_{d_1 | \frac{k}{d}} \frac{\rho(d_1)}{d_1}$$

и суммирование по a во внутренней сумме ведется так, что если $d = k_{i_1} \cdots k_{i_\tau}$, то $k_{i_\nu} \nmid a$ при $\nu = 1, 2, \dots, \tau$.

СЛЕДСТВИЕ 3. При $n \rightarrow \infty$

$$C_n(\Lambda) = \frac{A}{\Gamma(\gamma)} n^{\gamma-1} (1 + O(n^{-\delta})),$$

где

$$\gamma = \prod_{\nu=1}^s \left(1 - \frac{1}{k_\nu}\right), \quad A = \prod_{d|k} d^{-\rho(d)/d},$$

$\delta > 0$ и не зависит от n .

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $k \geq 2$ и $\Lambda = \{m \geq 1 : (m, k) = 1\}$, то при фиксированном k и $n \rightarrow \infty$

$$C_n(\Lambda) = \sum_{d|k} \left(\sum_{\substack{a=1 \\ (a,d)=1}}^d A_{a,d} e^{-2\pi i a n/d} \right) \frac{n^{\gamma_d-1}}{\Gamma(\gamma_d)} + O(n^{\gamma_1-2} \ln^2 n),$$

где

$$\gamma_d = \frac{\mu(d)}{d} \prod_{p|\frac{k}{d}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

p – простое число и

$$A_{a,d} = d^{-\gamma_d} \prod_{d_1|\frac{k}{d}} d_1^{-\mu(dd_1)/(dd_1)} \prod_{\substack{d_2|\frac{k}{d} \\ d \nmid d_2}} (1 - e^{2\pi i a d_2/d})^{-\mu(d_2)/d_2},$$

$\mu(\cdot)$ – функция Мёбиуса.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Далее будет доказано, что если $d \mid k$ и $d > 1$, то $\gamma_d < \gamma_1$, и если $s \geq 2$, то при любом $d \mid k$, $\rho(d) \neq 0$, выполняется неравенство $\gamma_d > \gamma_1 - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теоремы 1 и 2 существенно усиливают соответствующие результаты работ [4]–[7].

3. Доказательству теоремы 1 и 2 предшествует ряд лемм.

ЛЕММА 1. Если $|z| < 1$ и Λ – множество из n . 1, то

$$\exp \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{z^\lambda}{\lambda} \right\} = \prod_{\nu=1}^N \prod_{q=0}^{a_\nu-1} \left(1 - \frac{z}{z_q^{(\nu)}} \right)^{-(z_q^{(\nu)})^{b_\nu}/a_\nu},$$

где $z_q^{(\nu)} = e^{2\pi i q/a_\nu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму достаточно доказать при $N = 1$. Согласно равенству

$$\ln \frac{1}{1-z} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}, \quad |z| < 1,$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{z^\lambda}{\lambda} &= \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv b_1 \pmod{a_1}}} \frac{z^m}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \frac{1}{a_1} \sum_{q=0}^{a_1-1} e^{2\pi i(b_1-m)/a_1} \\ &= \frac{1}{a_1} \sum_{q=0}^{a_1-1} e^{2\pi i b_1 q/a_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (ze^{-2\pi i q/a_1})^m = -\frac{1}{a_1} \sum_{q=0}^{a_1-1} (z_q^{(1)})^{b_1} \ln \left(1 - \frac{z}{z_q^{(1)}}\right). \end{aligned}$$

Потенцируя, получим лемму 1.

ЛЕММА 2. Если множество Λ и функция $\rho(\cdot)$ определены в п. 2, а функция $f_\Lambda(z)$ определена равенством (1), то при $|z| < 1$ выполняется равенство

$$f_\Lambda(z) = \prod_{d|k} (1-z^d)^{-\rho(d)/d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению множества Λ и принципу включения-исключения при $|z| < 1$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{z^\lambda}{\lambda} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} - \sum_{i=1}^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{mk_i}}{mk_i} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{mk_{i_1}k_{i_2}}}{mk_{i_1}k_{i_2}} - \dots + (-1)^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{mk_1 \dots k_s}}{mk_1 \dots k_s} \\ &= \ln \frac{1}{1-z} - \sum_{i=1}^s \frac{1}{k_i} \ln \frac{1}{1-z^{k_i}} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq s} \frac{1}{k_{i_1}k_{i_2}} \ln \frac{1}{1-z^{k_{i_1}k_{i_2}}} - \dots + (-1)^s \frac{1}{k_1 \dots k_s} \ln \frac{1}{1-z^{k_1 \dots k_s}}. \end{aligned}$$

Значит, согласно равенству (1)

$$f_\Lambda(z) = \frac{\prod_{i=1}^s (1-z^{k_i})^{1/k_i} \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq s} (1-z^{k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3}})^{1/(k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3})} \dots}{(1-z) \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq s} (1-z^{k_{i_1}k_{i_2}})^{1/(k_{i_1}k_{i_2})} \dots}.$$

Поэтому, пользуясь определением функции $\rho(\cdot)$, получим лемму 2.

ЛЕММА 3. Для любого комплексного ρ при $n \rightarrow \infty$ получим

$$\text{coef}_{z^n} (1-z)^{-\rho} = \frac{n^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно разложению бинома $(1 - z)^{-\rho}$ в степенной ряд при $|z| < 1$ получим

$$\begin{aligned} \text{coef}_{z^n} (1 - z)^{-\rho} &= \frac{(-\rho)(-\rho - 1) \cdots (-\rho - n + 1)}{n!} (-1)^n \\ &= \frac{\rho(\rho + 1) \cdots (\rho + n - 1)}{n!} = \frac{\rho}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\rho}{k}\right) \\ &= \frac{\rho}{n} \exp \left\{ \rho \ln n + \rho C + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\rho}{k}\right) e^{-\rho/k} \\ &= \rho e^{C\rho} n^{\rho-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\rho}{k}\right) e^{-\rho/k}, \end{aligned}$$

где C – постоянная Эйлера. Значит, пользуясь равенством

$$\frac{1}{\Gamma(\rho)} = \rho e^{C\rho} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\rho}{k}\right) e^{-\rho/k},$$

получим лемму 3.

ЛЕММА 4. *Прогрессии Λ_ν и Λ_μ из п. 1 не пересекаются тогда и только тогда, когда $(a_\nu, a_\mu) \nmid b_\nu - b_\mu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прогрессии Λ_ν и Λ_μ не пересекаются тогда и только тогда, когда сравнение

$$a_\nu x + b_\nu \equiv b_\mu \pmod{a_\mu}$$

не имеет решений в классе вычетов по модулю a_μ . Из теории чисел известно, что это сравнение разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие $(a_\nu, a_\mu) \mid b_\nu - b_\mu$.

ЛЕММА 5. *Если γ – число, определенное в п. 1, то выполняется неравенство $\gamma < 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что множество $\Lambda = \bigcup_{\nu=1}^N \Lambda_\nu$ не содержит чисел, делящихся на a_1 . Действительно, если $m \in \Lambda$ и $a_1 \mid m$, то при некотором ν , $2 \leq \nu \leq N$, получим $m \in \Lambda_\nu$. Значит, $m = a_\nu x + b_\nu$, где x – целое неотрицательное число. Так как прогрессии Λ_1 и Λ_ν не пересекаются, то по лемме 4 заключаем, что $(a_1, a_\nu) = d > 1$. Поэтому из $d \mid b_\nu$ следует $(a_\nu, b_\nu) > 1$. Это противоречит условию $(a_\nu, b_\nu) = 1$. Итак, если $a_1 \mid m$, то $m \notin \Lambda$. Значит,

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ m \in \Lambda}} 1 \leq x - \left\lfloor \frac{x}{a_1} \right\rfloor. \quad (2)$$

Так как плотность множества натуральных чисел, образующих прогрессию Λ_ν , равна $1/a_\nu$, то плотность множества Λ равна

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{a_\nu} = \gamma.$$

Следовательно, пользуясь (2), получим

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{m \leq x \\ m \in \Lambda}} 1 \leq 1 - \frac{1}{a_1} < 1.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Будем пользоваться обозначениями п. 1. Согласно равенству (1) и лемме 1 при $|z| < 1$ получим

$$f_{\Lambda}(z) = \prod_{\xi \in E} \left(1 - \frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha(\xi)}.$$

Пусть для каждого $\xi \in E$

$$\Gamma_{\xi}(R) = \{z : 1 \leq |z| \leq R, \arg z = \arg \xi\}, \quad 1 < R < \infty,$$

и $\Gamma'_{\xi}(R)$ – берега разреза $\Gamma_{\xi}(R)$. Тогда

$$\text{coef}_{z^n} f_{\Lambda}(z) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \sum_{\xi \in E} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_{\xi}(R)} \frac{f_{\Lambda}(z)}{z^{n+1}} dz, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f_{\Lambda}(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Если

$$f_{\Lambda}^{(\xi)}(z) = \prod_{\substack{\xi' \in E \\ \xi' \neq \xi}} (1 - z\bar{\xi}')^{-\alpha(\xi')},$$

то

$$I_1 = \sum_{\xi \in E} \frac{\xi^{-n}}{2\pi i} \int_{\Gamma'_1(R)} \frac{f_{\Lambda}(z\xi)}{z^{n+1}} dz = \sum_{\xi \in E} \frac{\xi^{-n}}{2\pi i} \int_{\Gamma'_1(R)} (1-z)^{-\alpha(\xi)} f_{\Lambda}^{(\xi)}(z\xi) \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Пусть $R = 1 + (C \ln n)/n$, $C > 0$ и не зависит от n . Тогда при $z \in \Gamma'_1(R)$ получим

$$f_{\Lambda}^{(\xi)}(z\xi) = \prod_{\substack{\xi' \in E \\ \xi' \neq \xi}} \left(1 - \frac{\xi}{\xi'} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{-\alpha(\xi')} = A(\xi) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

где

$$A(\xi) = \prod_{\substack{\xi' \in E \\ \xi' \neq \xi}} (1 - \xi\bar{\xi}')^{-\alpha(\xi')}.$$

Значит, из неравенства $|\alpha(\xi)| \leq \gamma$ получим

$$I_1 = \sum_{\xi \in E} \xi^{-n} \frac{A(\xi)}{2\pi i} \int_{\Gamma'_1(R)} (1-z)^{-\alpha(\xi)} \frac{dz}{z^{n+1}} + O(n^{\gamma-2} \ln^2 n).$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_1(R)} (1-z)^{-\alpha(\xi)} \frac{dz}{z^{n+1}} = \text{coef}_{z^n} (1-z)^{-\alpha(\xi)} + O\left(\frac{n^{|\alpha(\xi)|}}{R^n}\right).$$

Ясно, что $R^n \sim n^C$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому по лемме 3

$$I_1 = \sum_{\xi \in E} A(\xi) \xi^{-n} \frac{n^{\alpha(\xi)-1}}{\Gamma(\alpha(\xi))} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O(n^{\gamma-C} + n^{\gamma-2} \ln^2 n).$$

Нетрудно показать, что $I_2 = O(n^{\gamma-C})$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, если выбрать $C = \gamma + 2$, то теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Покажем, что если $\xi \in E \setminus \{1\}$, то $\operatorname{Re} \alpha(\xi) < \gamma$. Действительно, если $\xi \in E \setminus \{1\}$, то $\xi = e^{2\pi i q_\nu / a_\nu}$, где $1 \leq q_\nu \leq a_\nu - 1$. Значит, из $(a_\nu, b_\nu) = 1$ следует, что

$$\operatorname{Re} \xi^{b_\nu} = \cos\left(2\pi \frac{q_\nu b_\nu}{a_\nu}\right) < 1.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re} \alpha(\xi) \leq \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{a_{\nu_1}} \cos\left(2\pi \frac{q_{\nu_1} b_{\nu_1}}{a_{\nu_1}}\right) < \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{a_{\nu_1}} = \gamma.$$

Следовательно, если

$$\delta = \gamma - \max_{\xi \in E \setminus \{1\}} \operatorname{Re} \alpha(\xi),$$

то $\delta > 0$ и не зависит от n .

Для завершения доказательства следствия 1 осталось выразить $A(1)$ через параметры, определяющие множество Λ . Согласно определению $f_\Lambda^{(\xi)}(z)$ и $A(\xi)$ имеем $A(1) = f_\Lambda^{(1)}(1)$ и

$$\begin{aligned} f_\Lambda^{(1)}(z) &= (1-z)^\gamma \exp\left\{\sum_{\nu=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{a_\nu m + b_\nu}}{a_\nu m + b_\nu}\right\} \\ &= (1-z)^\gamma \exp\left\{\sum_{\nu=1}^N \left(z^{b_\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{a_\nu m}}{a_\nu m} - b_\nu z^{b_\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{a_\nu m}}{a_\nu m(a_\nu m + b_\nu)} + \frac{z^{b_\nu}}{b_\nu}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{\nu=1}^N \left((z^{b_\nu} - 1) \frac{1}{a_\nu} \ln \frac{1}{1-z} + \frac{z^{b_\nu}}{a_\nu} \ln \frac{1-z}{1-z^{a_\nu}} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{z^{b_\nu}}{b_\nu} - \frac{b_\nu z^{b_\nu}}{a_\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{a_\nu m}}{m(a_\nu m + b_\nu)}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Значит, из равенств

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} (z^{b_\nu} - 1) \ln \frac{1}{1-z} = 0, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \frac{z^{b_\nu}}{a_\nu} \ln \frac{1-z}{1-z^{a_\nu}} = -\frac{\ln a_\nu}{a_\nu}$$

следует указанное в формулировке следствия 1 выражение для $A(1) = A$. Можно показать, что для любого $\xi \in E$

$$A(\xi) = \exp\left\{\sum_{\substack{\nu=1 \\ \xi \in E_\nu}}^N \left(-\frac{\xi^{b_\nu}}{a_\nu} \ln a_\nu + \frac{\xi^{b_\nu}}{b_\nu} - \frac{b_\nu \xi^{b_\nu}}{a_\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(a_\nu m + b_\nu)}\right)\right\}.$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Будем пользоваться обозначениями п. 2. Если $d \mid k$, то при $d > 1$ и $\rho(d) \neq 0$ существуют $i_1, \dots, i_\tau$ такие, что $d = k_{i_1} \cdots k_{i_\tau}$. Пусть для каждого из таких d число a – любое целое число, удовлетворяющее условию $1 \leq a \leq d - 1$ и $k_{i_\nu} \nmid a$ при $\nu = 1, 2, \dots, \tau$. Если $d = 1$, то считаем $a = 0$. Покажем, что каждая точка $e^{2\pi ia/d}$, где $d \mid k$ и $\rho(d) \neq 0$, является особой точкой функции $f_\Lambda(z)$. Так как для любого $d \mid k$, $\rho(d) \neq 0$, выполняется неравенство $0 < |\gamma_d| < 1$, то для этого достаточно доказать, что предел

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} (1 - z)^{\gamma_d} f_\Lambda(z e^{2\pi ia/d}) = A_{a,d}$$

существует и $A_{a,d} \neq 0$. Числа γ_d определены в формулировке теоремы 2.

Пользуясь леммой 2, получим

$$f_\Lambda(z e^{2\pi ia/d}) = H_d^{(1)}(z) H_{a,d}^{(2)}(z), \quad (3)$$

где

$$H_d^{(1)}(z) = \prod_{d_1 \mid \frac{k}{d}} (1 - z^{dd_1})^{-\rho(dd_1)/(dd_1)}, \quad H_{a,d}^{(2)}(z) = \prod_{\substack{d_2 \mid k \\ d \nmid d_2}} (1 - z^{d_2} e^{2\pi ia d_2/d})^{-\rho(d_2)/d_2}.$$

Согласно определению чисел a легко видеть, что если $d \mid k$, $d_2 \mid k$, $\rho(d) \neq 0$ и $d \nmid d_2$, то $e^{2\pi ia d_2/d} \neq 1$. Значит, существует предел

$$\lim_{z \rightarrow 1} H_{a,d}^{(2)}(z) = H_{a,d}^{(2)}(1) = \prod_{\substack{d_2 \mid k \\ d \nmid d_2}} (1 - e^{2\pi ia d_2/d})^{-\rho(d_2)/d_2}.$$

С другой стороны, согласно определению функции $\rho(\cdot)$ и чисел γ_d

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} (1 - z)^{\gamma_d} H_d^{(1)}(z) \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \left((1 - z)^{\gamma_d} \prod_{d_1 \mid \frac{k}{d}} (1 - z)^{-\rho(d)\rho(d_1)/(dd_1)} \prod_{d_1 \mid \frac{k}{d}} \left(\frac{1 - z^{dd_1}}{1 - z} \right)^{-\rho(dd_1)/(dd_1)} \right) \\ &= \prod_{d_1 \mid \frac{k}{d}} (dd_1)^{-\rho(dd_1)/(dd_1)} = d^{-\gamma_d} \prod_{d_1 \mid \frac{k}{d}} d_1^{-\rho(dd_1)/(dd_1)}. \end{aligned}$$

Значит,

$$A_{a,d} = d^{-\gamma_d} H_{a,d}^{(2)}(1) \prod_{d_1 \mid \frac{k}{d}} d_1^{-\rho(dd_1)/(dd_1)} \neq 0.$$

Из приведенных рассуждений видно, что функция $(1 - z)^{\gamma_d} f_\Lambda(z e^{2\pi ia/d})$ при $d \mid k$ и $\rho(d) \neq 0$ в окрестности точки $z = 1$ однозначна и аналитична. Значит, согласно равенству (3) множеством точек $e^{2\pi ia/d}$, $d \mid k$, $\rho(d) \neq 0$, исчерпывается множество всех особых точек функции $f_\Lambda(z)$. С учетом этого доказательство теоремы 2 проходит аналогично доказательству теоремы 1.

Если $s = 1$, то $k_1 = k$, $\gamma_1 = 1 - 1/k$ и $\gamma_k = -1/k$. Значит, в этом случае при $n \rightarrow \infty$

$$C_n(\Lambda) = A_{0,1} \frac{n^{-1/k}}{\Gamma(1 - 1/k)} + O(n^{-1/k-1} \ln^2 n).$$

Покажем, что при $s \geq 2$ каждое ненулевое слагаемое в равенстве из формулировки теоремы 2 по порядку больше остатка. Для этого нужно показать, что если $s \geq 2$, то для любого $d \mid k$, $\rho(d) \neq 0$, $d > 1$, выполняется неравенство $\gamma_1 - \gamma_d < 1$. Пусть $1 < d < k$. Тогда из $\rho(d) \neq 0$ получим $d = k_{i_1} \cdots k_{i_\tau}$, где $1 \leq \tau \leq s - 1$. Значит,

$$\begin{aligned} \gamma_1 - \gamma_d &= \prod_{\lambda=1}^s \left(1 - \frac{1}{k_\lambda}\right) - \frac{\rho(d)}{d} \prod_{\lambda \neq i_1, \dots, i_\tau} \left(1 - \frac{1}{k_\lambda}\right) \\ &= \prod_{\nu=1}^\tau \left(1 - \frac{1}{k_{i_\nu}}\right) - \frac{\rho(d)}{d} \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq i_1, \dots, i_\tau}}^s \left(1 - \frac{1}{k_\lambda}\right) \\ &= \frac{\prod_{\nu=1}^\tau (k_{i_\nu} - 1) - \rho(d)}{d} \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq i_1, \dots, i_\tau}}^s \left(1 - \frac{1}{k_\lambda}\right) \\ &< d^{-1} \left(1 + \prod_{\nu=1}^\tau (k_{i_\nu} - 1)\right) \leq 1. \end{aligned}$$

Если $d = k$, то

$$\gamma_1 - \gamma_d = \prod_{\lambda=1}^s \left(1 - \frac{1}{k_\lambda}\right) - \frac{\rho(k)}{k} = k^{-1} \left(\prod_{\lambda=1}^s (k_\lambda - 1) - \rho(k) \right) \leq k^{-1} \left(1 + \prod_{\lambda=1}^s (k_\lambda - 1)\right).$$

Если $s \geq 2$, то индукцией по s легко доказать, что

$$\prod_{\lambda=1}^s (k_\lambda - 1) \leq \prod_{\lambda=1}^s k_\lambda - 2 = k - 2.$$

Значит, $\gamma_1 - \gamma_k < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Достаточно доказать, что для любого $d \mid k$, $\rho(d) \neq 0$, $d > 1$, выполняется неравенство $\gamma_d < \gamma_1$. Для указанного d существуют $i_1, \dots, i_\tau$ такие, что $d = k_{i_1} \cdots k_{i_\tau}$, где $1 \leq \tau \leq s$. Значит,

$$k\gamma_d = \rho(d) \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq i_1, \dots, i_\tau}}^s (k_\lambda - 1) < \prod_{\lambda=1}^s (k_\lambda - 1) = k\gamma_1.$$

Поэтому $\gamma_d < \gamma_1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.
- [2] Бендер Э. А. Асимптотические методы в теории перечислений // Перечисленные задачи комбинаторного анализа. М.: Мир, 1979. С. 266–310.
- [3] Павлов А. И. О числе подстановок с конечным множеством длин циклов // Тр. МИАН. 1996. Т. 207. С. 256–267.
- [4] Минеев М. П., Павлов А. И. О числе подстановок специального вида // Матем. сб. 1976. Т. 99. № 3. С. 468–476.
- [5] Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е. О некоторых классах случайных величин на циклах подстановок // Матем. сб. 1979. Т. 108. № 1. С. 91–104.
- [6] Павлов А. И. О числе и цикловой структуре подстановок некоторых классов // Матем. сб. 1984. Т. 124. № 4. С. 536–556.
- [7] Колчин В. Ф. О числе подстановок с ограничениями на длины циклов // Дискретная матем. 1989. Т. 1. № 2. С. 97–109.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
12.02.96