Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Падучих, Влияние 2-окрестностей на строение графа,
Матем. заметки, 1997, том 62, выпуск 6, 892–897

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:00:50

УДК 519.14

ВЛИЯНИЕ 2-ОКРЕСТНОСТЕЙ НА СТРОЕНИЕ ГРАФА

Д. В. Падучих

В работе описаны связанные регулярные графы диаметра большего 2, в которых 2-окрестности изоморфны графу Δ диаметра 2, а также регулярные графы диаметра 2, в которых 2-окрестности изоморфны дистанционно регулярному графу Δ диаметра 3. Доказано, что 2-локально графы Шрикханде не существуют.

Библиография: 2 названия.

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Под *расстоянием* $d(a, b)$ между вершинами a, b графа Γ понимается длина кратчайшей цепи, соединяющей a с b . Назовем *i -окрестностью вершины a* графа Γ подграф $\Gamma_i(a)$, индуцированный Γ на множестве всех вершин графа Γ , которые находятся на расстоянии i от вершины a . Если число вершин в $\Gamma_i(a)$ не зависит от выбора вершины $a \in \Gamma$, то оно обозначается через $k_i(\Gamma)$. Подграф $\Gamma_1(a)$ мы будем называть *окрестностью вершины a* и обозначать через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф $\{a\} \cup [a]$ (шар радиуса 1 с центром a).

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый класс графов. Граф Γ назовем *i -локально $\mathcal{F}$ -графом*, если $\Gamma_i(a)$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ . Если при этом класс $\mathcal{F}$ состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ , то граф Γ назовем *i -локально Δ -графом*, при $i = 1$ – локально Δ -графом. Задача описания локально $\mathcal{F}$ -графов является классической и решена для различных классов $\mathcal{F}$ (см., например, [1]). В данной работе исследуются 2-локально $\mathcal{F}$ -графы.

Валентностью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным валентности k* , если валентность любой вершины $a \in \Gamma$ равна k . Граф Γ называется *короберно регулярным*, если найдется натуральное число μ такое, что любые две несмежные вершины имеют точно μ общих соседей. *Сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* называется v -вершинный короберно регулярный граф с соответствующим μ , валентности k , в котором каждое ребро лежит в λ треугольниках. *Треугольным графом $T(t)$* называется граф с множеством неупорядоченных пар из множества X в качестве вершин, $|X| = t$, две пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент. Будем говорить, что граф Γ является *прямой суммой своих подграфов Γ_i* , если подграфы $\bar{\Gamma}_i$ являются связными компонентами графа $\bar{\Gamma}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00478.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\mathcal{F}$ – класс регулярных графов валентности k . Тогда связный регулярный 2-локально $\mathcal{F}$ -граф Γ диаметра 2 является кореберно регулярным и $\mu(\Gamma) = k(\Gamma) - k$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (соответственно через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ . Заметим, что для любого дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{b_i; c_i\}$ параметр b_0 – это валентность графа, $c_1 = 1$. Дистанционно регулярный граф диаметра d называется *антиподальным*, если отношение – находиться на расстоянии d – является отношением эквивалентности на множестве вершин графа.

Сначала рассмотрим 2-локально Δ -графы большого диаметра, в которых диаметр Δ равен 2. *Графом Тейлора* называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$. Регулярный граф Γ назовем *редуцированным*, если для любой вершины $a \in \Gamma$ подграф $\{x \in \Gamma \mid x^\perp = a^\perp\}$ состоит из единственной вершины a .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Δ – регулярный граф диаметра 2. Тогда любой связный регулярный редуцированный 2-локально Δ -граф Γ диаметра большего 2 является графом Тейлора. В этом случае Δ – сильно регулярный граф с $k(\Delta) = 2\mu(\Delta)$. Обратно, для любого сильно регулярного графа Δ с $k(\Delta) = 2\mu(\Delta)$ найдется граф Тейлора Γ такой, что $\Gamma_2(a) \simeq \Delta$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Диаметр Γ ограничивается следующим утверждением.

ЛЕММА. Пусть a – вершина графа Γ такая, что $\Gamma_2(a)$ – граф диаметра не большего 3. Тогда a не лежит в геодезическом 4-пути вида $bcade$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $bcade$ – геодезический 4-путь, то $b, e \in \Gamma_2(a)$, причем расстояние между b, e в графе $\Gamma_2(a)$ не меньше 4. Противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть граф Γ удовлетворяет условиям предложения 1, a – вершина из Γ такая, что $\Gamma_3(a)$ непусто. Покажем сначала, что любая вершина $x \in \Gamma_2(a)$ смежна с любой вершиной $y \in \Gamma_3(a)$. В противном случае $\Gamma_2(a)$ содержит вершину z , находящуюся на расстоянии 2 от y . Противоречие с тем, что $\Gamma_2(z)$ содержит a, y и расстояние в Γ между a, y равно 3.

Покажем теперь, что $\Gamma_3(a)$ является кликой (полным подграфом). В противном случае $\Gamma_3(a)$ содержит вершины b, c с $d(b, c) = 2$. Согласно лемме вершина $a \in \Gamma_3(b)$ должна быть смежна с c . Противоречие.

Итак, $x^\perp = y^\perp$ для любых вершин $x, y \in \Gamma_3(a)$. В силу редуцированности графа $|\Gamma_3(a)| = 1$ и $[a] = \Gamma_2(b)$ для $b \in \Gamma_3(a)$. Ввиду регулярности графа Δ для любой вершины $c \in \Gamma_2(a)$ имеем $\mu(a, c) = |\Delta| - k(\Delta) - 1$. Так как Γ – регулярный граф, то для любой вершины $x \in \Gamma$ подграф $\Gamma_3(x)$ непуст.

Таким образом, Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{|\Delta|, |\Delta| - k(\Delta) - 1, 1; 1, |\Delta| - k(\Delta) - 1, |\Delta|\}$. По теореме Тейлора–Ливингстона [1, теорема 1.5.3] граф Δ является сильно регулярным с $k(\Delta) = 2\mu(\Delta)$.

Обратное утверждение следует из [1, теоремы 1.5.2, 1.5.3].

Рассмотрим теперь графы диаметра 2 с 2-окрестностями больших диаметров.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть Γ – регулярный граф диаметра 2 и для любой вершины $a \in \Gamma$ $\Gamma_2(a) \simeq \Delta$, где Δ – регулярный связный граф. Тогда диаметр графа Δ не больше 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что диаметр Δ не меньше 4. Пусть $a \in \Gamma$, b, c – вершины из $\Delta = \Gamma_2(a)$ такие, что $d_\Delta(b, c) = 4$, и $bdefc$ – кратчайший путь в Δ . В силу замечания граф Γ является кореберно регулярным, причем $[b] \cap [f]$ содержится в $[a]$, поэтому

$$[a] \cap [f] = [a] \cap [b] = [b] \cap [c] = [d] \cap [c] = [a] \cap [d].$$

Противоречие с тем, что $[d] \cap [f]$ содержит еще вершину $e \in \Delta$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Δ – дистанционно регулярный граф диаметра большего 2 с параметрами (v, k, λ, μ) . Если Γ – регулярный 2-локально Δ -граф диаметра 2, то выполняются следующие утверждения:

- i) Δ – антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3;
- ii) Γ – прямая сумма графов Γ_i , $i = 1, \dots, n$, где Γ_i – сильно регулярный граф с параметрами

$$v' = v + 1 + \frac{k(k+1)}{k-\mu+1}, \quad k' = \frac{k(k+1)}{k-\mu+1}, \quad \lambda' = \frac{k^2 + \mu - 1}{k - \mu + 1} - \frac{\mu v}{k + 1}, \quad \mu' = \frac{k\mu}{k - \mu + 1}.$$

Примеры графов, удовлетворяющих условиям теоремы 1, дают графы, дополнительные к треугольным. В этих графах Δ является регулярным двудольным графом с долями порядка t и валентностью $t - 1$. Граф Хоффмана–Синглтона (сильно регулярный граф с параметрами $(50, 7, 0, 1)$) также удовлетворяет условиям теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть граф Γ удовлетворяет условиям теоремы 1. Ввиду предложения 2 $d(\Delta) = 3$. Выберем вершину $a \in \Gamma$ и вершины b, c на расстоянии 3 в графе $\Delta = \Gamma_2(a)$. Как и выше,

$$[b] \cap [c] = [a] \cap [b] = [a] \cap [c],$$

поэтому отношение – находиться на расстоянии 3 – является отношением эквивалентности на множестве вершин графа Δ . Утверждение i) теоремы доказано.

Положим $r - 1 = k_3(\Delta)$ и покажем, что любая вершина $b \in [a]$ смежна в Δ либо с $r\mu$, либо со всеми вершинами. Действительно, пусть c – несмежная с b вершина из Δ . Тогда $a, b \in \Gamma_2(c)$ и $[b] \cap [d]$ содержит μ вершин из $\Gamma_2(c) \cap \Delta$ для любого антипода d к вершине a в графе $\Gamma_2(c)$. Таким образом, вершина b смежна с $(r - 1)\mu$ вершинами из $\Gamma_2(c) \cap \Delta$ для любой несмежной с b вершины $c \in \Delta$.

Так как для любой вершины $d \in \Delta$ такой, что $d_\Delta(c, d) = 3$, имеем $[a] \cap [c] = [a] \cap [d]$, то $d_{\Gamma_2(c)}(a, d) = 3$. Отсюда $d_{\Gamma_2(c)}(b, d) = 2$, следовательно, вершины b, d имеют μ общих соседей в $\Gamma_2(c)$. Значит, вершина b смежна с $\mu' - \mu$ вершинами из $[a] \cap [c]$, поэтому b, c имеют точно μ общих соседей в Δ .

Пусть Γ' – подграф, содержащий вершины из $[a]$, смежные с каждой вершиной из Δ , $\Gamma_0 = \Gamma - \Gamma'$. Покажем, что граф Γ является прямой суммой графов Γ_0 и Γ' . Для этого достаточно показать, что любая вершина $b \in \Gamma_0(a)$ смежна с любой вершиной из Γ' . По определению Γ_0 граф Δ содержит несмежную с b вершину c .

Рассмотрим $\Gamma_2(c)$. Очевидно, что каждая отличная от b вершина d из класса антиподов вершины b в графе $\Gamma_2(c)$ лежит в Δ , поэтому подграф $[c] \cap [d] = [b] \cap [c]$ содержит Γ' .

Выше мы установили сильную регулярность графа Γ_0 . Далее, граф Γ' удовлетворяет условиям теоремы, и по индукции граф Γ' является прямой суммой сильно регулярных графов. Нам осталось вычислить параметры графа Γ в случае, когда Γ – сильно регулярный граф.

Мы показали, что $b'_1 = b_1(\Gamma) = r\mu$. Подставив это выражение в прямоугольное соотношение $k'b'_1 = k'_2\mu'$ для графа Γ и учитывая, что $k'_2 = r(k+1)$, получим $k'\mu = (k+1)\mu'$. Заменяя k' на $k + \mu'$, имеем

$$\mu' = \frac{k\mu}{k - \mu + 1}.$$

Отсюда несложно вычислить и остальные параметры. Теорема 1 доказана.

Ситуация, в которой сам граф и его 2-окрестности имеют диаметр 2, представляется более сложной, чем рассмотренные выше. В некоторых задачах (см. [2]) по индукции для любой вершины $a \in \Gamma$ граф $\Gamma_2(a)$ оказывается графом Зейделя, т.е. сильно регулярным графом с наименьшим собственным значением -2 . В связи с этим представляет интерес проблема описания связанных регулярных графов, в которых 2-окрестности вершин являются графами Зейделя.

Мы рассмотрим один конкретный случай этой проблемы.

ТЕОРЕМА 2. *Регулярные графы, в которых 2-окрестности вершин являются графами Шрикханде, не существуют.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В графе на рис. 1 отождествим вершины i^+, i^- ($i = 1, 2, \dots, 5$). Затем отождествим вершины $1, 5$ и j^+, j^- ($j = 6, 7, 8$). Полученный сильно регулярный граф с параметрами $(16, 6, 2, 2)$ называется графом Шрикханде.

Рис. 1. Граф Шрикханде

Рис. 2. Граф Δ_0

Пусть граф Γ удовлетворяет условиям теоремы 2. Из предложения 1 следует, что диаметр Γ равен 2, так как в графе Шрикханде $k \neq 2\mu$. В силу замечания граф Γ кореберно регулярен. Пусть $\Delta = \Gamma_2(a)$ для вершины $a \in \Gamma$. Тогда граф $\Delta_0 = \Delta \cap \Gamma_2(b)$ для $b \in \Delta$ изображен на рис. 2.

Пусть $c \in [a] \cap \Gamma_2(b)$. По строению графа $\Gamma_2(b)$ вершина c смежна в Δ_0 с одним из 2-путей: 258, 456, 239, 136, 479, 178. Без ограничения общности можно считать, что вершина c смежна с вершинами 2, 5, 8. Далее, $\Delta(b)$ – шестиугольник, и точно три вершины, скажем 3, 5, 7, смежны в нем с парами антиподальных вершин, а остальные вершины из Δ_0 смежны с ребрами шестиугольника.

Пусть вершина 5 смежна с парой антиподальных вершин 5^+ , 5^- в шестиугольнике $\Delta(b)$. Очевидно, что $c \in \Gamma_2(4)$. Так как вершины 2, 5 не лежат в $\Gamma_2(4)$, то c смежна еще с двумя вершинами $d, e \in \Delta(b)$. Вершины $d, e, 8$ образуют 2-путь в $\Gamma_2(4) \cap \Delta$, причем вершина 8 является крайней в этом 2-пути, так как она смежна с ребром ef графа $\Delta(b)$.

Рис. 3. Граф $\Delta(b)$

Напомним, что в графе Шрикханде $\mu = 2$, поэтому вершины 2, 8 имеют в $\Delta(b)$ единственного общего соседа. Аналогично, пары вершин 5, 8 и 5, 2 имеют по одному общему

соседу в $\Delta(b)$. С другой стороны, вершины 5^+ , 5^- находятся на расстоянии 3 в $\Delta(b)$, следовательно, тройка вершин 2, 5, 8 имеет в $\Delta(b)$ общего соседа. По симметрии то же самое верно для тройки вершин 4, 5, 6.

Пусть вершина 4 смежна с ребром xu графа $\Delta(b)$, а вершина 6 – с ребром yz (см. рис. 3). Покажем, что вершина 2 смежна с ребром de .

В противном случае вершина 2 смежна с ребром fw графа $\Delta(b)$ (см. рис. 4). Рассмотрим подграф $\Gamma_2(6)$. Из рассуждений, проведенных для вершины 4, следует, что вершина s смежна с ребром в 2-пути $\Gamma_2(6) \cap \Delta(b)$. Противоречие с тем, что вершина s смежна с e и не смежна с f .

Рис. 4. Граф $\Delta(b)$

Таким образом, мы показали, что вершина 5 смежна с e . Но тогда одна из вершин 3, 7 не смежна ни с e , ни с d . Пусть для определенности это будет вершина 3. В этом случае вершина s смежна с вершинами 5, 8, e , d в $\Gamma_2(3) \cap \Delta(b)$. Противоречие. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Berlin: Springer, 1989.
- [2] Кабанов В. В., Махнев А. А. Кореберно регулярные графы без 3-лап // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 4. С. 495–503.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

Поступило
19.12.95