Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Смагин, Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения абстрактного параболического уравнения, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 898–909

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1679>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 11:33:08

УДК 517.988.8

ОЦЕНКИ В СИЛЬНЫХ НОРМАХ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ АБСТРАКТНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. В. Смагин

Непрерывно дифференцируемые по времени решения параболического уравнения в гильбертовом пространстве отыскиваются проекционно-разностным методом приближенно. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галёркина, а по времени – неявным методом Эйлера. В работе установлены оценки в сильных нормах погрешности приближенных решений. Эти оценки позволяют получать не только сходимость приближенных решений к точному, но и дают числовые характеристики скорости сходимости. В частности, в работе получены точные по порядку аппроксимации оценки погрешности для подпространств типа конечных элементов.

Библиография: 10 названий.

1. Обсуждение задачи и вспомогательные результаты. В сепарабельном гильбертовом пространстве H на отрезке $[0, T]$ рассматривается задача

$$u'(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u^0. \quad (1)$$

Предполагается, что оператор $A(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ является самосопряженным положительно определенным с областью определения $D[A(t)]$. Без ограничения общности считаем, что

$$(A(t)u, u) \geq \|u\|^2, \quad t \in [0, T], \quad u \in D[A(t)],$$

где $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ – скалярное произведение и норма в H соответственно. Для множества $D[A(t)]$ допускается зависимость от t . Считаем, однако, что у положительно определенных самосопряженных операторов $A^{1/2}(t)$ области определения $D[A^{1/2}(t)] = D_{1/2}$ от t не зависят.

Через V обозначим энергетическое пространство, порожденное оператором $A(0)$, т.е.

$$V = \{u \in D_{1/2} \mid \|u\|_V = \|A^{1/2}(0)u\|\}.$$

Для $u, v \in V$ определим форму

$$a(t, u, v) = (A^{1/2}(t)u, A^{1/2}(t)v).$$

Пусть при всех $t \in [0, T]$ и $u, v \in V$ выполнено

$$|a(t, u, v)| \leq M_1 \|u\|_V \cdot \|v\|_V, \quad a(t, u, u) \geq \delta \|u\|_V^2, \quad \delta > 0, \quad (2)$$

функция $a(t, u, v)$ дифференцируема по t и справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} a(t, u, v) \right| \leq M_2 \|u\|_V \cdot \|v\|_V.$$

Предполагается также существование гильбертова пространства E такого, что для всех $t \in [0, T]$ выполнено $D[A(t)] \subset E \subset V \subset H$, причем пространство V совпадает с точностью до эквивалентной нормы с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ (см. [1, с. 23]) и для всех $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$\|u\|_E \leq d \|A(t)u\|, \quad u \in D[A(t)].$$

Заметим, что для операторов $A(t)$ с областью определения $D[A(t)] = D$, не зависящей от t , в качестве E следует взять

$$E = \{u \in D \mid \|u\|_E = \|A(0)u\|\}.$$

Для описания примера операторов $A(t)$ с переменной областью определения, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, рассмотрим пространство $H = L_2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $A(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ является эллиптическим самосопряженным оператором, порожденным в пространстве $L_2(\Omega)$ симметричным дифференциальным выражением второго порядка

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a(t, x)u$$

и третьим краевым условием на $\partial\Omega$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \cos(\nu, x_i) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sigma(t, x)u = 0, \quad (3)$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Коэффициенты $a_{ij}(t, x)$, $a(t, x)$, $\sigma(t, x)$ предполагаются достаточно гладкими. Для таких операторов (см. [2, с. 384], [3, с. 249]) $D[A(t)]$ состоит из функций пространства $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих краевому условию (3), $D_{1/2} = W_2^1(\Omega)$, причем нормы пространств V и $W_2^1(\Omega)$ эквивалентны. Положим $E = W_2^2(\Omega)$, тогда (см. [1, с. 56])

$$[E, H]_{1/2} = [W_2^2(\Omega), L_2(\Omega)]_{1/2} = W_2^1(\Omega).$$

Считаем, что операторы $B(t)$ линейны при всех $t \in [0, T]$, области определения $D[B(t)] \supset D_{1/2}$, функция $B(t)u$ для $u \in D_{1/2}$ дифференцируема в H по t , так что $\|B'(t)u\| \leq c \|A^{1/2}(0)u\|$. Отметим, что отсюда следует оценка $\|B(t)A^{-1/2}(0)\| \leq b < \infty$.

Функция $f(t)$ со значениями в H предполагается непрерывной на $[0, T]$. Обозначим через V' пространство, двойственное V по отношению к H . Пусть функция $f(t)$ со значениями в V' сильно дифференцируема на V по $t \in [0, T]$, т.е. существует $f'(t) \in V'$ такая, что для всех $v \in V$ выполняется

$$\frac{d}{dt}(f(t), v) = (f'(t), v),$$

где под $(f'(t), v)$ понимается значение функционала $f'(t)$ на элементе v . Кроме того, считаем $f'(t) \in L_2(0, T; V')$.

Наконец, пусть $u^0 \in D[A(0)]$.

В [4] установлено, что в принятых предположениях задача (1) однозначно разрешима и решение $u(t)$ такое, что

- 1) $u'(t), A(t)u(t) \in C([0, T], H); u'(t) \in L_2(0, T; V);$
- 2) функция $u'(t)$ со значениями в V' при почти всех $t \in [0, T]$ сильно дифференцируема на V и $u''(t) \in L_2(0, T; V')$;
- 3) удовлетворяет уравнению и начальному условию;
- 4) справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u'(t)\|^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T (\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2) dt \leq MP^2(u^0, f), \quad (4)$$

где константа M не зависит от u^0 и $f(t)$, а

$$P(u^0, f) = \left(\|A(0)u^0\|^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|^2 + \int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2 dt \right)^{1/2}.$$

Перейдем к описанию проекционно-разностного метода приближенного решения задачи (1). Пусть V_h (h – положительный параметр) – произвольное конечномерное подпространство пространства V . Через $A_h(t)$ для $t \in [0, T]$ обозначим действующий в V_h самосопряженный положительно определенный оператор, заданный для произвольных $u_h, v_h \in V_h$ соотношением

$$(A_h(t)u_h, v_h) = a(t, u_h, v_h). \quad (5)$$

Задаче (1) сопоставим разностную задачу в V_h :

$$(u_k - u_{k-1})\tau^{-1} + A_h(t_k)u_k + P_h B(t_k)u_k = P_h f(t_k), \quad (6)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$ (N – натуральное число), элемент $u_0 = u_0^h \in V_h$ считается заданным, $\tau N = T$, $t_k = k\tau$, оператор P_h является ортогональным проектором в пространстве H на V_h .

Рассматриваемый в настоящей работе класс гладких решений задачи (1) позволил впервые получить эффективные коэрцитивные в сильных нормах оценки погрешности проекционно-разностного метода. Эти оценки дают сходимость в сильных нормах приближенных решений к точному для произвольной предельно плотной в пространстве V системы подпространств $\{V_h\}$. Кроме того, если известны аппроксимационные свойства подпространств V_h , то из этих оценок погрешности следуют точные по порядку

аппроксимации числовые характеристики скорости сходимости, что иллюстрируется на подпространствах V_h типа конечных элементов.

Для обобщенно разрешимого уравнения (1) подобные вопросы были рассмотрены в [5] и [6], где коэрцитивные оценки погрешности установлены в энергетической норме. При более жестких, чем в [5] и [6], условиях на подпространства V_h энергетические оценки погрешности проекционно-разностного метода получены в [7], где рассматривалось параболическое уравнение второго порядка с краевым условием Дирихле.

Заметим, что оценки погрешности проекционно-разностного метода в сильных нормах даже в простейших случаях (см., например, [8, с. 205]) получены при гораздо больших требованиях на гладкость решения задачи (1), чем в настоящей работе.

Установим разрешимость задачи (6), т.е. обратимость в V_h оператора

$$I + \tau A_h(t_k) + \tau P_h B(t_k) = (I + \tau P_h B(t_k)(I + \tau A_h(t_k))^{-1})(I + \tau A_h(t_k)),$$

где $k = 1, 2, \dots, N$. Имеем оценку

$$\|P_h B(t_k)(I + \tau A_h(t_k))^{-1}\| \leq b \|A^{1/2}(0)(I + \tau A_h(t_k))^{-1}\|.$$

Из (2) для $v \in V$

$$\delta \|v\|_V^2 \leq \|A^{1/2}(t)v\|^2 \leq M_1 \|v\|_V^2.$$

Кроме того, из (5) для $v_h \in V_h$ получим

$$\|A^{1/2}(t)v_h\| = \|A_h^{1/2}(t)v_h\|.$$

Таким образом,

$$\|A^{1/2}(0)(I + \tau A_h(t_k))^{-1}\| \leq \delta^{-1/2} \|A_h^{1/2}(t_k)(I + \tau A_h(t_k))^{-1}\|.$$

Из спектрального представления самосопряженного положительно определенного оператора $A_h(t_k)$ следует

$$\|A_h^{1/2}(t_k)(I + \tau A_h(t_k))^{-1}\| \leq \frac{1}{2} \tau^{-1/2}.$$

Итак, для малых $0 < \tau \leq \tau_0$ доказана обратимость в V_h оператора $I + \tau A_h(t_k) + \tau P_h B(t_k)$. Отметим, что τ_0 не зависит от V_h .

Далее через $V(t)$ обозначим энергетическое пространство, порожденное оператором $A(t)$, т.е.

$$V(t) = \{u \in D_{1/2} \mid \|u\|_{V(t)} = \|A^{1/2}(t)u\|\}.$$

Пусть $Q_h(t)$ – ортогональный проектор в гильбертовом пространстве $V(t)$ на V_h . Обозначим $Q_h(0) = Q_h$.

Приведем две леммы, доказанные в [9].

ЛЕММА 1. Для $u \in D_{1/2}$ и $t \in [0, T]$ справедливы оценки

$$\|(I - Q_h(t))u\|_{V(t)} \leq M_1^{1/2} \|(I - Q_h)u\|_V, \quad (7)$$

$$\|(I - Q_h(t))u\| \leq M_1 \|A^{1/2}(0)(I - Q_h)A^{-1}(t)\| \cdot \|(I - Q_h)u\|_V. \quad (8)$$

ЛЕММА 2. Оператор $Q_h(t)$ сильно дифференцируем в V по $t \in [0, T]$ и для $u \in V$

$$\|Q'_h(t)u\|_V \leq M_1^{1/2} M_2 \delta^{-3/2} \|(I - Q_h)u\|_V. \quad (9)$$

2. Оценки погрешности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $z_k = u(t_k) - u_k$, где $k = 1, 2, \dots, N$, $u(t)$ – решение задачи (1), а u_k – решение задачи (6). Тогда выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (\|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|_V^2) + \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|_V^2 \\ & \leq M \left(\|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + \tau P^2(u^0, f) + \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 \right. \\ & \quad \left. + \int_0^T \|(I - Q_h(t))u'(t)\|^2 dt \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $P(u^0, f)$ определена в оценке (4), а константа M не зависит от u^0 , u_0^h , $f(t)$, τ и V_h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $w_h(t) = Q_h(t)u(t)$. Отметим свойство

$$P_h A(t)u(t) = A_h(t)w_h(t), \quad (11)$$

которое следует из (5). Обозначим $z_k^h = w_h(t_k) - u_k \in V_h$. С учетом (11) нетрудно установить тождество

$$(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_h(t_k)z_k^h = P_h B(t_k)(u_k - u(t_k)) + P_h((w_h(t_k) - w_h(t_{k-1}))\tau^{-1} - u'(t_k)). \quad (12)$$

Умножим (12) скалярно в H на $(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}$. При этом появится слагаемое

$$\begin{aligned} (A_h(t_k)z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) &= \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(t, z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) dt \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_t^{t_k} \frac{\partial}{\partial s} a(s, z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) ds \right) dt. \end{aligned}$$

Преобразуем также

$$\begin{aligned} & ((w_h(t_k) - w_h(t_{k-1}))\tau^{-1} - u'(t_k), (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (u'(t) - u'(t_k), (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) dt \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (w'_h(t) - u'(t), (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) dt. \end{aligned}$$

Слагаемое $(B(t_k)(u_k - u(t_k)), (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1})$ разобьем на два. В результате получим

$$\begin{aligned}
 & \| (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1} \|^2 + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(t, z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) dt \\
 & + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_t^{t_k} \frac{\partial}{\partial s} a(s, z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) ds \right) dt \\
 & = (B(t_k)(w_h(t_k) - u(t_k)), (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) - (B(t_k)z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) \\
 & + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (u'(t) - u'(t_k), (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) dt \\
 & + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (w_h'(t) - u'(t), (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) dt. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим здесь

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \operatorname{Re} a(t, z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) dt \\
 & = \frac{1}{\tau} \|A^{1/2}(t_k)z_k^h\|^2 - \frac{1}{\tau} \|A^{1/2}(t_{k-1})z_{k-1}^h\|^2 + \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A^{1/2}(t)(z_k^h - z_{k-1}^h)\|^2 dt \\
 & + \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (a(t, z_k^h, z_k^h) - a(t_k, z_k^h, z_k^h)) dt \\
 & + \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h) - a(t, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h)) dt.
 \end{aligned}$$

Последнее тождество позволяет записать (13) в виде

$$\begin{aligned}
 & 2\| (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1} \|^2 + \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A^{1/2}(t)(z_k^h - z_{k-1}^h)\|^2 dt \\
 & + \frac{1}{\tau} \|A^{1/2}(t_k)z_k^h\|^2 - \frac{1}{\tau} \|A^{1/2}(t_{k-1})z_{k-1}^h\|^2 \\
 & = \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (a(t_k, z_k^h, z_k^h) - a(t, z_k^h, z_k^h)) dt \\
 & + \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (a(t, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h) - a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h)) dt \\
 & - \frac{2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_t^{t_k} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial s} a(s, z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) ds \right) dt \\
 & + 2\operatorname{Re}(B(t_k)(w_h(t_k) - u(t_k)), (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) - 2\operatorname{Re}(B(t_k)z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) \\
 & + \frac{2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \operatorname{Re}(u'(t) - u'(t_k), (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) dt \\
 & + \frac{2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \operatorname{Re}(w_h'(t) - u'(t), (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}) dt = \sum_{i=1}^7 J_i. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Оценим слагаемые J_i в правой части (14):

$$\begin{aligned} J_1 &\leq M_2 \|z_k^h\|_V^2, \quad J_2 \leq M_2 \|z_{k-1}^h\|_V^2, \quad J_3 \leq \frac{M_2}{\varepsilon_1} \|z_k^h\|_V^2 + M_2 T \varepsilon_1 \frac{1}{\tau} \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_V^2, \\ J_4 &\leq \frac{b}{\varepsilon_2} \max_{0 \leq t \leq T} \|w_h(t) - u(t)\|_V^2 + b \varepsilon_2 \|(z_k^h - z_{k-1}^h) \tau^{-1}\|^2, \\ J_5 &\leq \frac{b}{\varepsilon_3} \|z_k^h\|_V^2 + b \varepsilon_3 \|(z_k^h - z_{k-1}^h) \tau^{-1}\|^2. \end{aligned}$$

При оценке слагаемого J_6 вспомним, что $u''(t) \in L_2(0, T; V')$:

$$\begin{aligned} J_6 &= \frac{2}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t_k}^t \operatorname{Re}(u''(s), z_k^h - z_{k-1}^h) ds \right) dt \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon_4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u''(s)\|_{V'}^2 ds + \varepsilon_4 \frac{1}{\tau} \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_V^2. \end{aligned}$$

Переходим к последнему слагаемому:

$$J_7 \leq \frac{1}{\varepsilon_5 \tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|w_h'(t) - u'(t)\|^2 dt + \varepsilon_5 \|(z_k^h - z_{k-1}^h) \tau^{-1}\|^2.$$

Наконец, оценим снизу левую часть тождества (14):

$$\frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A^{1/2}(t)(z_k^h - z_{k-1}^h)\|^2 dt \geq \frac{\delta}{\tau} \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_V^2.$$

Положив теперь $M_2 T \varepsilon_1 = \varepsilon_4 = \delta/4$, $b \varepsilon_2 = b \varepsilon_3 = \varepsilon_5 = 1/3$, из (14) получим неравенство

$$\begin{aligned} &\|(z_k^h - z_{k-1}^h) \tau^{-1}\|^2 + \frac{1}{\tau} \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_V^2 + \frac{1}{\tau} \|A^{1/2}(t_k) z_k^h\|^2 - \frac{1}{\tau} \|A^{1/2}(t_{k-1}) z_{k-1}^h\|^2 \\ &\leq c_1 \max_{0 \leq t \leq T} \|w_h(t) - u(t)\|_V^2 + c_2 \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|w_h'(t) - u'(t)\|^2 dt \\ &\quad + c_3 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u''(t)\|_{V'}^2 dt + c_4 \|z_k^h\|_V^2 + c_5 \|z_{k-1}^h\|_V^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножим (15) на τ и просуммируем по k от 1 до $m \leq N$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^m (\|(z_k^h - z_{k-1}^h) \tau^{-1}\| \tau + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_V^2) + \|A^{1/2}(t_m) z_m^h\|^2 - \|A^{1/2}(0) z_0^h\|^2 \\ &\leq c_1 \max_{0 \leq t \leq T} \|w_h(t) - u(t)\|_V^2 + c_2 \int_0^T \|w_h'(t) - u'(t)\|^2 dt \\ &\quad + c_3 \tau \int_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2 dt + c_4 \sum_{k=1}^m \|z_k^h\|_V^2 \tau + c_5 \|z_0^h\|_V^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Выделяя в (16) суммарное неравенство для $\|z_m^h\|_V^2$, а именно:

$$\begin{aligned} \|z_m^h\|_V^2 \leq c_1 & \left(\|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|w_h(t) - u(t)\|_V^2 \right. \\ & \left. + \int_0^T \|w'_h(t) - u'(t)\|^2 dt + \tau \int_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2 dt \right) + c_2 \sum_{k=1}^m \|z_k^h\|_V^2 \tau, \end{aligned}$$

получим стандартными рассуждениями оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (\|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2 \tau + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_V^2) + \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k^h\|_V^2 \\ & \leq M \left(\|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + \tau \int_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2 dt \right. \\ & \quad \left. + \max_{0 \leq t \leq T} \|w_h(t) - u(t)\|_V^2 + \int_0^T \|w'_h(t) - u'(t)\|^2 dt \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Оценку (17) преобразуем к виду, который позволил бы оценить погрешность $z_k = (u(t_k) - w_h(t_k)) + z_k^h$. Очевидно, что

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|_V^2 \leq 2 \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k^h\|_V^2 + 2 \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t) - w_h(t)\|_V^2. \quad (18)$$

Из соотношения

$$z_k - z_{k-1} = (z_k^h - z_{k-1}^h) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (u'(t) - w'_h(t)) dt$$

следует оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (\|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|_V^2) \\ & \leq 2 \sum_{k=1}^N (\|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2 \tau + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_V^2) \\ & \quad + 2 \int_0^T \|u'(t) - w'_h(t)\|^2 dt + 2\tau \int_0^T \|u'(t) - w'_h(t)\|_{V'}^2 dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что при почти всех $t \in [0, T]$

$$w'_h(t) = Q_h(t)u'(t) + Q'_h(t)u(t).$$

Следовательно, учитывая оценки (7), (9) и (4), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|u'(t) - w'_h(t)\|^2 dt \leq c_1 \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 + c_2 \int_0^T \|(I - Q_h(t))u'(t)\|^2 dt, \\ & \int_0^T \|u'(t) - w'_h(t)\|_{V'}^2 dt \leq c_1 \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 + c_2 \int_0^T \|(I - Q_h)u'(t)\|_{V'}^2 dt \\ & \leq c \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right) \leq MP^2(u^0, f). \end{aligned} \quad (20)$$

Оценка (10) следует теперь из оценок (18)–(20), (7) и (4).

Обратим внимание, что в левой части оценки (10)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (\|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|_V^2) \\ &= \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right) dt \right\|^2 \tau + \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right) dt \right\|_V^2. \end{aligned}$$

Покажем эффективность оценки (10). Предположим, что задана последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$, предельно плотная в V при $h \rightarrow 0$, иными словами, $\|(I - Q_h)v\|_V \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ для любого $v \in V$. Пусть также $\|Q_h u^0 - u_0^h\|_V \rightarrow 0$. В таком случае при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$ из (10) следует

$$\sum_{k=1}^N (\|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|_V^2) + \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|_V^2 \rightarrow 0,$$

так как $u(t) \in C([0, T], V)$ и $u'(t) \in L_2(0, T; V)$.

Оценка (10) позволяет также получать числовые характеристики скорости сходимости. Предположим, что подпространства V_h обладают следующим аппроксимационным свойством, типичным (см., например, [10, с. 128]) для метода конечных элементов:

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq ch\|v\|_E, \quad v \in E, \quad (21)$$

где константа c не зависит от v и h . Из (21) следуют оценки

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq cdh\|A(t)v\|, \quad v \in D[A(t)], \quad \|A^{1/2}(0)(I - Q_h)A^{-1}(t)\| \leq cdh. \quad (22)$$

В результате из оценки (10), условия (21), оценок (8), (22) и (4) получим для погрешности $z_k = u(t_k) - u_k$ оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (\|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|_V^2) + \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|_V^2 \\ & \leq M (\|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + (\tau + h^2)P^2(u^0, f)). \end{aligned} \quad (23)$$

Докажем теперь, что порядок сходимости к 0, установленный в оценках (10) и (23), для более слабой нормы можно увеличить.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $z_k = u(t_k) - u_k$, где $k = 1, 2, \dots, N$, $u(t)$ – решение задачи (1), а u_k – решение задачи (6). Тогда выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|^2 + \sum_{k=1}^N (\|z_k\|_V^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|^2) \\ & \leq M \left(\|u^0 - u_0^h\|^2 + \tau^2 P^2(u^0, f) + \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 \right. \\ & \quad \left. + (P(u^0, f) + \|u_0^h\|_V) \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h(t))u(t)\| \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где $P(u^0, f)$ определена в оценке (4), а константа M не зависит от u^0 , u_0^h , $f(t)$, τ и V_h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} & ((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, z_k) + \|A_h^{1/2}(t_k)(w_h(t_k) - u_k)\|^2 \\ &= ((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, u(t_k) - w_h(t_k)) + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (u'(t) - u'(t_k), w_h(t_k) - u_k) dt \\ & \quad - (B(t_k)z_k, w_h(t_k) - u_k), \end{aligned}$$

из которого получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \|z_k\|^2 - \frac{1}{\tau} \|z_{k-1}\|^2 + \frac{1}{\tau} \|z_k - z_{k-1}\|^2 + 2 \|A_h^{1/2}(t_k)(w_h(t_k) - u_k)\|^2 \\ &= 2 \operatorname{Re}((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, u(t_k) - w_h(t_k)) + \frac{2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \operatorname{Re}(u'(t) - u'(t_k), w_h(t_k) - u_k) dt \\ & \quad - 2 \operatorname{Re}(B(t_k)z_k, w_h(t_k) - u_k) = \sum_{i=1}^3 J_i. \end{aligned} \quad (25)$$

Оценим слагаемые J_i в правой части (25):

$$J_1 \leq 2 \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\| \cdot \|(I - Q_h(t_k))u(t_k)\|.$$

Слагаемое J_2 оценим подобно слагаемому J_6 в (14):

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t_k}^t \operatorname{Re}(u''(s), w_h(t_k) - u_k) ds \right) dt \\ &\leq \frac{\tau}{\varepsilon_1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u''(s)\|_{V'}^2 ds + \varepsilon_1 \|w_h(t_k) - u_k\|_V^2. \end{aligned}$$

Слагаемое J_3 разобьем на три:

$$\begin{aligned} J_3 &= 2 \operatorname{Re}(B(t_k)(u_k - w_h(t_k)), w_h(t_k) - u(t_k)) \\ & \quad + 2 \operatorname{Re}(B(t_k)(u_k - w_h(t_k)), z_k) + 2 \operatorname{Re}(B(t_k)(w_h(t_k) - u(t_k)), w_h(t_k) - u_k). \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} J_3 &\leq b^2 \varepsilon_2 \|u_k - w_h(t_k)\|_V^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \|w_h(t_k) - u(t_k)\|_V^2 \\ & \quad + b^2 \varepsilon_3 \|u_k - w_h(t_k)\|_V^2 + \frac{1}{\varepsilon_3} \|z_k\|^2 + \frac{b^2}{\varepsilon_4} \|w_h(t_k) - u(t_k)\|_V^2 + \varepsilon_4 \|w_h(t_k) - u_k\|_V^2. \end{aligned}$$

Оценим сверху

$$2 \|A_h^{1/2}(t_k)(w_h(t_k) - u_k)\|^2 \geq 2\delta \|w_h(t_k) - u_k\|_V^2.$$

Выбирая $\varepsilon_1 = b^2 \varepsilon_2 = b^2 \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \delta/4$, получим из (25) неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \|z_k\|^2 - \frac{1}{\tau} \|z_{k-1}\|^2 + \frac{1}{\tau} \|z_k - z_{k-1}\|^2 + \delta \|w_h(t_k) - u_k\|_V^2 \\ & \leq \frac{4b^2}{\delta} \|z_k\|^2 + 2 \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\| \cdot \|(I - Q_h(t_k))u(t_k)\| \\ & \quad + \frac{4\tau}{\delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u''(t)\|_{V'}^2 dt + \frac{8b^2}{\delta} \|(I - Q_h(t_k))u(t_k)\|_V^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Умножим (26) на τ и просуммируем по k от 1 до $m \leq N$. В полученном таким образом неравенстве выделим суммарное неравенство для $\|z_m\|^2$, а именно:

$$\begin{aligned} \|z_m\|^2 \leq & c_1 \sum_{k=1}^m \|z_k\|^2 \tau + c_2 \left(\sum_{k=1}^N \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau \right)^{1/2} \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h(t))u(t)\| \\ & + c_3 \tau^2 \int_0^T \|u''(t)\|_V^2 dt + c_4 \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h(t))u(t)\|_V^2. \end{aligned} \quad (27)$$

В результате из (27), (26) и (4) получим оценку

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|^2 + \sum_{k=1}^N (\|z_k\|_V^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|^2) \\ & \leq M \left(\|u^0 - u_0^h\|^2 + \tau^2 P^2(u^0, f) + \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{k=1}^N \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau \right)^{1/2} \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h(t))u(t)\| \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Оценка (24) следует теперь из (28) и оценки

$$\left(\sum_{k=1}^N \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau \right)^{1/2} \leq M(P(u^0, f) + \|u_0^h\|_V),$$

вытекающей из оценок (10) и (4).

Если, как и ранее, $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств, $\|u^0 - u_0^h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и последовательность $\{\|u_0^h\|_V\}$, допустим, ограничена (хотя возможен даже некоторый рост), то из (24) при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$ следует

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|^2 + \sum_{k=1}^N (\|z_k\|_V^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|^2) \rightarrow 0.$$

Предположим, что подпространства V_h обладают свойством (21). Тогда из (24), подобно оценке (23), получим

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|^2 + \sum_{k=1}^N (\|z_k\|_V^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|^2) \\ & \leq M(\|u^0 - u_0^h\|^2 + \tau^2 P^2(u^0, f) + h^2(P^2(u^0, f) + \|u_0^h\|_V^2)). \end{aligned} \quad (29)$$

При более жестких условиях на подпространства V_h , функцию $f(t)$ и начальные условия u_0^h в заметке [7] анонсирована энергетическая оценка погрешности того же порядка по τ и h , что и оценка (29).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [2] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
- [3] С. Г. Крейн (ред.) Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека. 2-е изд. М.: Наука, 1972.
- [4] Смагин В. В. О разрешимости абстрактного параболического уравнения с оператором, область определения которого зависит от времени // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 5. С. 711–712.
- [5] Смагин В. В. Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 11. С. 79–94.
- [6] Смагин В. В. Коэрцитивные оценки погрешностей проекционно-разностного метода для абстрактного параболического уравнения с оператором, область определения которого зависит от времени // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 2. С. 406–418.
- [7] Злотник А. А. Оценки скорости сходимости в $V_2(Q_T)$ проекционно-разностных схем для параболических уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислит. матем., киберн. 1980. № 1. С. 27–35.
- [8] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
- [9] Смагин В. В. Оценки погрешности полудискретных приближений по Галёркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана // Изв. вузов. Матем. 1996. № 3. С. 50–57.
- [10] Стрэнг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.

Воронежский государственный университет

Поступило

15.03.94

Исправленный вариант

16.06.97