Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Довгошей, Л. Л. Потемкина, Модуль непрерывности
кусочно-аналитических функций, *Матем. заметки*, 2003,
том 73, выпуск 1, 63–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:48:46

УДК 517.51

МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. А. Довгошей, Л. Л. Потемкина

Найдены условия, при которых модуль непрерывности кусочно-аналитической функции, заданной на отрезке действительной оси, является функцией, аналитической в окрестности нуля.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В 1941 году М. Я. Перельманом [1] была доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $f(x)$ – функция, вещественно-аналитическая на отрезке $[a, b]$. Тогда ее модуль непрерывности $\omega(f; \delta)$ – функция, аналитическая в нуле.

Хотя вопросы, связанные с изучением свойств модулей непрерывности, встречаются в очень большом количестве работ (см., например, монографии [2]–[7] и библиографию к ним), теорема Перельмана цитируется весьма редко и, по-видимому, остается без дальнейшего развития. Цель настоящей статьи – исследовать условия аналитичности $\omega(f; \delta)$ для кусочно-аналитических на отрезке функций.

Напомним, что *модулем непрерывности* функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, называется функция, определенная при $\delta \geq 0$,

$$\omega(\delta) = \omega(f; \delta) := \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leq \delta \\ x_1, x_2 \in [a, b]}} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *вещественно-аналитической* на $[a, b]$, если она аналитична в каждой точке $x \in [a, b]$, т.е. разлагается в степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности x . Непрерывная функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *кусочно-аналитической* на $[a, b]$, если существует разбиение $[a, b]$ на конечное число отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$, такое, что при всех $i = 0, \dots, n$ ограничения $f|_{[x_i, x_{i+1}]}$ – вещественно-аналитические функции.

2. Формулировка результатов. Пусть $f(x)$ – кусочно-аналитическая функция на $[a, b]$, $f'_r(x)$ и $f'_l(x)$ – ее правая и левая производные.

Рассмотрим функцию

$$\theta(x) := \begin{cases} |f'_r(a)| & \text{при } x = a, \\ \max(|f'_r(x)|; |f'_l(x)|) & \text{при } x \in (a, b), \\ |f'_l(b)| & \text{при } x = b. \end{cases}$$

Положим

$$m := \sup_{x \in [a, b]} \theta(x), \quad (1)$$

$$M_r := \{x \in [a, b] : |f'_r(x)| = m\}, \quad M_l := \{x \in (a, b] : |f'_l(x)| = m\}, \quad M := M_l \cup M_r.$$

Так как $\theta(x)$ полунепрерывна сверху на $[a, b]$, то $M \neq \emptyset$.

При любом $t_0 \in (a, b]$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $f'_l(x)$ разлагается на $[t_0 - \varepsilon, t_0]$ по формуле Тейлора

$$f'_l(x) = f'_l(t_0) + k_l(x - t_0)^{d_l} + o(x - t_0)^{d_l}, \quad (2)$$

где $d_l = d_{lt_0}$ – кратность нуля функции $(f'_l(x) - f'_l(t_0))$ в точке t_0 , а

$$k_l = k_{lt_0} := \frac{1}{(d_l)!} f_l^{(1+d_l)}(t_0).$$

Если при некотором $\varepsilon > 0$ для всех $x \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$ $f'_l(x) = f'_l(t_0)$, то полагаем $d_{lt_0} := \infty$, $k_{lt_0} := 0$. Аналогично для $t_0 \in [a, b]$ определяем $d_r = d_{rt_0}$, $k_r = k_{rt_0}$. Тогда

$$f'_r(x) = f'_r(t_0) + k_r(x - t_0)^{d_r} + o(x - t_0)^{d_r}. \quad (3)$$

Зададим на множестве M функцию

$$d(x) := \begin{cases} d_{lx} & \text{при } x \in M_l \setminus M_r, \\ \max(d_{lx}; d_{rx}) & \text{при } x \in M_l \cap M_r, \\ d_{rx} & \text{при } x \in M_r \setminus M_l. \end{cases} \quad (4)$$

Кроме того, пусть “ $\dot{:}$ ” – символ бинарного отношения, заданного на $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ следующим правилом: $(a \dot{:} b)$ тогда и только тогда, когда либо a и b – натуральные числа и b делит a , либо $a = \infty$, а b любое.

Положим

$$D_N := M_l \cap M_r \cap \{x \in (a, b) : f'_r(x) = f'_l(x), \neg(d_{lx} \dot{:} d_{rx}), \neg(d_{rx} \dot{:} d_{lx})\},$$

т.е. при $x \in D_N$ ни одно из “чисел” d_{rx}, d_{lx} не является “делителем” другого и $f'_l(x) = f'_r(x) = \pm m$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x)$ – кусочно-аналитическая функция на $[a, b]$. Тогда если

$$\sup_{x \in D_N} d(x) < \sup_{x \in M \setminus D_N} d(x), \quad (5)$$

то $\omega(f; \delta)$ – функция, аналитическая в нуле, а если

$$\sup_{x \in D_N} d(x) > \sup_{x \in M \setminus D_N} d(x), \quad (6)$$

то $\omega(f; \delta)$ не является функцией, аналитической в нуле.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $D_N = \emptyset$ или $M \setminus D_N = \emptyset$ считаем

$$\sup_{x \in \emptyset} d(x) = -\infty.$$

Положим

$$d := \sup_{x \in M} d(x) \quad (7)$$

и выделим следующие подмножества M :

$$\begin{aligned} M_{dl} &:= M_l \cap \{x \in (a, b] : d_{lx} = d\}, & M_{dr} &:= M_r \cap \{x \in [a, b) : d_{rx} = d\}, \\ M_d &:= M_{dl} \cup M_{dr}. \end{aligned}$$

На множестве M_d определим функцию $k(x) = k_d(x)$. Положим при $d = \infty$

$$\forall x \in M_d : \quad k(x) = 0, \quad (8)$$

а при $d < \infty$

$$k(x) := \begin{cases} |k_{lx}| & \text{при } x \in M_{dl} \setminus M_{dr}, \\ (|k_{lx}|^{-1/d} + |k_{rx}|^{-1/d})^{-d} & \text{при } x \in M_{dl} \cap M_{dr} \text{ и } f'_l(x) = f'_r(x), \\ \max(|k_{lx}|; |k_{rx}|) & \text{при } x \in M_{dl} \cap M_{dr} \text{ и } f'_l(x) = -f'_r(x), \\ |k_{rx}| & \text{при } x \in M_{dr} \setminus M_{dl}. \end{cases} \quad (9)$$

Если ни одно из неравенств (5), (6) не выполняется, т.е.

$$\sup_{x \in D_N} d(x) = d = \sup_{x \in M \setminus D_N} d(x), \quad (10)$$

то теорема 1 уточняется следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x)$ – кусочно-аналитическая функция на $[a, b]$ и выполняется (10). Тогда если

$$\inf_{x \in D_N \cap M_d} k(x) > \inf_{x \in M_d \setminus D_N} k(x),$$

то $\omega(f; \delta)$ – функция, аналитическая в нуле, а если

$$\inf_{x \in D_N \cap M_d} k(x) < \inf_{x \in M_d \setminus D_N} k(x),$$

то $\omega(f; \delta)$ не является функцией, аналитической в нуле.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно,

$$\sup_{x \in D_N} d(x) < \infty,$$

причем равенство $d = \infty$ равносильно тому, что на некотором интервале $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ $f'(x) \equiv m$ или $f'(x) \equiv -m$, а в окрестности нуля $\omega(\delta) = m\delta$.

Учитывая в разложениях $f'_l(x)$ и $f'_r(x)$ большее число членов, чем в (2) и (3), можно получать дальнейшие уточнения теорем 1 и 2, однако получающиеся формулы весьма громоздки и не будут здесь приводиться.

Перейдем к следствиям теоремы 1, два из которых выделим в самостоятельные утверждения.

Пусть I – множество точек из (a, b) , в которых нарушается аналитичность $f(x)$. Очевидно, $D_N \subseteq I$ и $f(x)$ – вещественно-аналитическая функция тогда и только тогда, когда $I = \emptyset$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $f(x)$ – кусочно-аналитическая функция на $[a, b]$ и

$$\forall x \in M \cap I : (f'_r(x) = f'_l(x)) \implies ((d_{rx} : d_{lx}) \vee (d_{lx} : d_{rx})).$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что на $[0, \varepsilon]$ $\omega(f; \delta)$ – вещественно-аналитическая функция.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема Перельмана, очевидно, является частным случаем утверждения 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $f(x)$ – кусочно-аналитическая функция на $[a, b]$. Предположим, что множество M состоит из единственной точки $x_0 \in (a, b)$ и $f'_r(x_0) = f'_l(x_0)$. Тогда для аналитичности $\omega(f; \delta)$ в нуле необходимо и достаточно, чтобы имело место, по крайней мере, одно из двух отношений $d_{rx_0} : d_{lx_0}$ или $d_{lx_0} : d_{rx_0}$.

В следующих двух примерах указан явный вид $\omega(f; \delta)$ в окрестности нуля (см. п. 3 настоящей работы).

ПРИМЕР 1. Пусть

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ 1 - x^3 & \text{при } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

В окрестности нуля $\omega(f; \delta)$ разлагается в ряд по степеням $\delta^{1/2}$:

$$\omega(f; \delta) = \delta - \frac{1}{4}\delta^4 + \frac{2}{3}\delta^{9/2} + \dots \quad (11)$$

ПРИМЕР 2. Пусть

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ 1 - x^3 & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1 - (2 - x)^4 & \text{при } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

В окрестности нуля

$$\omega(f; \delta) = \delta - \frac{\delta^5}{80}. \quad (12)$$

Приведенные ниже следствия теоремы 1 дают еще целый ряд примеров кусочно-аналитических функций, не являющихся аналитическими, но с аналитическим в окрестности нуля модулем непрерывности.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f(x)$ – вещественно-аналитическая на $[a, b]$ функция,

$$f_1(x) := |f(x)|, \quad f_2(x) := f_+(x), \quad f_3(x) := f_-(x),$$

где

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)), \quad f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)).$$

Тогда функции $\omega(f_i; \delta)$, $i = 1, 2, 3$, аналитичны в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x \in I$, $i = 1, 2, 3$ имеет место равенство

$$f'_{il}(x)f'_{ir}(x)(f'_{ir}(x) + f'_{il}(x)) = 0.$$

Следовательно, во всех трех случаях $D_N = \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $a < b < c$, $f_1(x)$ – вещественно-аналитическая на $[a, b]$ функция, $f_2(x)$ – вещественно-аналитическая на $[b, c]$ функция, $f_1(b) = f_2(b)$. Положим $f(x) = f_1(x)$ на $[a, b]$ и $f(x) = f_2(x)$ на $[b, c]$. Тогда если угол между дугами $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ не равен нулю, то $\omega(f; \delta)$ – функция, аналитическая в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $f'_l(b) \neq f'_r(b)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f(x)$ – сплайн порядка $m \leq 3$ на $[a, b]$. Тогда $\omega(f; \delta)$ – аналитическая в нуле функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из определения порядка сплайна (см., например, [8, с. 7]) и того, что для любых двух “чисел” из $\{1, 2, \infty\}$ меньшее “делит” большее.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $f(x)$ – сплайн произвольного порядка $m \geq 1$ и дефекта один на $[a, b]$. Тогда $\omega(f; \delta)$ – функция, аналитическая в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений порядка сплайна, дефекта сплайна и отношения “ $\vdots$ ” следует, что в узлах сплайна $d_{lx} \vdots d_{rx}$ или $d_{rx} \vdots d_{lx}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция из примера 1 является сплайном порядка 4 и дефекта 2 с не-аналитическим в нуле модулем непрерывности.

Пусть

$$k := \inf_{x \in M_d} k(x), \quad (13)$$

где $k(x)$ – функция, определенная формулами (8) и (9).

Следующая теорема дает определенную информацию о модуле непрерывности произвольной кусочно-аналитической функции.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x)$ – кусочно-аналитическая функция на $[a, b]$. Тогда существуют натуральное $s = s(f) \geq 1$ и вещественное $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$, для которых $\omega(f; \delta)$ на $[0, \varepsilon]$ разлагается в ряд по степеням $\delta^{1/s}$. Справедлива формула

$$\omega(f; \delta) = m\delta - \frac{k}{d+1}\delta^{d+1} + O(\delta^{d+1+1/s}), \quad (14)$$

где постоянные m, d, k определены формулами (1), (7) и (13). Если функция $\omega(f; \delta)$ не аналитична в нуле, то

$$d \geq 3, \quad s \leq d-1, \quad d+1 + \frac{1}{s} \geq \frac{9}{2}. \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (4) и (7) следует, что $d + 1 \geq 2$, но если $\omega(f; \delta)$ не является аналитической в нуле, то $d + 1 \geq 4$, так как 3 – первое натуральное число, не делящееся на все меньшие натуральные числа. Формула (11) показывает, что постоянные 4 и $9/2$ точны.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $f(x)$ – кусочно-аналитическая функция на $[a, b]$. Тогда существует $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ такое, что на $(0, \varepsilon]$ функция $\delta^{-1}\omega(f; \delta)$ не возрастает, а $\omega(f; \delta)$ выпукла вверх.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует непосредственно из (14).

3. Леммы и доказательства основных результатов. Пусть $f(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция и $\delta > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Упорядоченную пару точек $x', x'' \in [a, b]$ назовем δ -экстремальной, если

$$\omega(f; \delta) = |f(x') - f(x'')|, \quad 0 < x'' - x' \leq \delta.$$

В леммах 1–3 изучаются свойства δ -экстремальных пар точек.

ЛЕММА 1. Пусть $f(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция, $0 < \delta < b - a$ и x', x'' – δ -экстремальная пара точек, для которой $[x', x''] \subset (a, b)$. Тогда если f дифференцируема в точках x', x'' , то

$$f'(x') = f'(x''), \quad (16)$$

причем если $f(x)$ непостоянна на $[a, b]$ и

$$f'(x') = f'(x'') \neq 0, \quad (17)$$

то

$$x'' - x' = \delta. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$F(t) := (f(x' + t) - f(x'' + t))^2,$$

заданную при $|t| < \min(|x' - a|; |x'' - b|)$. В точке $t = 0$ эта функция достигает своего максимума. Следовательно, $F'(0) = 0$, что дает (16).

Если (18) ложно, то рассмотрим функцию

$$\Psi(t) := (f(x' + t) - f(x'' - t))^2.$$

Учитывая (16) и то, что $f(x) \neq \text{const}$, получим $|\Psi'(0)| = 4\omega(f; \delta)|f'(x')| = 0$, т.е. $f'(x') = 0$. Последнее противоречит (17).

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналоги леммы имеют место и для модулей непрерывности порядка выше первого.

Для кусочно-гладкой функции $f(x)$ на $[a, b]$ положим

$$Y_H := \{x \in (a, b) : f'_r(x) \neq f'_l(x)\}.$$

ЛЕММА 2. Пусть $f(x)$ – кусочно-гладкая функция на $[a, b]$. Тогда существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $0 < \delta < \delta_1$ для любой пары δ -экстремальных точек x', x''

$$Y_H \cap (x', x'') = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y_H \neq \emptyset$. Положим

$$\Delta_1 := \inf\{|x_i - x_j| : x_i \neq x_j, x_i, x_j \in Y_H \cup \{a\} \cup \{b\}\}.$$

Так как Y_H конечно, то $\Delta_1 > 0$. Для любого $c \in Y_H$ $f(x)$ дифференцируема на $[c, c + \Delta_1]$ и $[c - \Delta_1, c]$, а $f'(x)$ непрерывна на этих сегментах. Следовательно, найдется $\Delta_2 > 0$ такое, что

$$\forall c \in Y_H : \{f'_l(x) : x \in [c - \Delta_2, c]\} \cap \{f'_r(x) : x \in [c, c + \Delta_2]\} = \emptyset. \quad (19)$$

Возьмем $\delta_1 := \min(\Delta_1; \Delta_2)$. Если лемма не верна при таком выборе δ_1 , то найдется пара δ -экстремальных точек, для которой $\delta < \delta_1$ и

$$\exists! c \in (x', x'') \cap Y_H, \quad x' \in (c - \Delta_2, c), \quad x'' \in (c, c + \Delta_2).$$

Так как $[x', x''] \subset (a, b)$, то по (16) $f'_l(x') = f'_r(x'')$, что противоречит (19).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $Y_H \cup \{a\} \cup \{b\} = \{y_i\}_{i=0}^{l+1}$, $a = y_0 < \dots < y_{l+1} = b$. Положим $f_i := f|_{[y_i, y_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, l$. Если f – кусочно-аналитическая функция, то из доказанной леммы следует, что при $\delta \leq \delta_1$

$$\omega(f; \delta) = \max_{0 \leq i \leq l} \omega(f_i; \delta), \quad (20)$$

где f_i – функции с кусочно-аналитической производной.

Для дифференцируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ положим

$$\begin{aligned} m &= \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}, \\ M_1 &:= \{x \in [a, b] : \exists \varepsilon = \varepsilon(x) > 0 \ \forall t \in [a, b] \ (|x - t| \leq \varepsilon) \implies (f'(t) \leq f'(x))\}, \\ M_2 &:= \{x \in [a, b] : \exists \varepsilon = \varepsilon(x) > 0 \ \forall t \in [a, b] \ (|x - t| \leq \varepsilon) \implies (f'(t) \geq f'(x))\}, \\ M &:= \{x \in [a, b] : |f'(x)| = m\}, \quad A_i := \{f'(x) : x \in M_i\} \text{ при } i = 1, 2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть $f'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а множество $A_1 \cup A_2$ конечно. Тогда $\exists \delta_2 > 0 \ \forall \delta \in (0, \delta_2)$ и для любой пары δ -экстремальных точек x', x''

$$[x', x''] \cap M \neq \emptyset. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что при любом $\delta > 0$ для любой пары δ -экстремальных точек x', x''

$$[x', x''] \cap (M_1 \cup M_2) \neq \emptyset. \quad (22)$$

Пусть $x' = a$. Возьмем точки $y_1 \in [x', x'']$ и $y_2 \in [x', x'']$ такие, что

$$f'(y_1) = \max_{x \in [x', x'']} f'(x), \quad f'(y_2) = \min_{x \in [x', x'']} f'(x).$$

Если $y_1 \in [x', x'']$ или $y_2 \in [x', x'']$, то (22) очевидно. В противном случае $y_1 = y_2 = x''$ и на $[x', x'']$ $f'(x) = \text{const}$, что опять приводит к (22). Случай $x'' = b$ рассматривается аналогично, а при $[x', x''] \subset (a, b)$ используем (16).

Если $M_1 \cup M_2 = M$, то лемма доказана. Пусть $M_\Delta := (M_1 \cup M_2) \setminus M \neq \emptyset$. Из конечности $A_1 \cup A_2$ и непрерывности $f'(x)$ следует, что M_Δ – компакт. Следовательно, можно найти $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, для которых

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b]: \quad (\text{dist}(x; M_\Delta) < \Delta_1) &\implies (|f'(x)| < m - \frac{r}{4}), \\ \forall x \in [a, b]: \quad (\text{dist}(x; M) < \Delta_2) &\implies (|f'(x)| > m - \frac{r}{4}), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$r := \inf_{x \in M_\Delta} (m - |f'(x)|) > 0.$$

Положим $\delta_2 = \min(\Delta_1, \Delta_2)$. Если $\emptyset = [x', x''] \cap M$, то из (22) следует $[x', x''] \cap M_\Delta \neq \emptyset$, а из (23) $-\omega(f; \delta) < (m - r/4)\delta$. С другой стороны, так как $\delta < \Delta_2$, то $\omega(f; \delta) > (m - r/4)\delta$. Следовательно, (21) выполнено.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f'(x)$ – кусочно-аналитическая на $[a, b]$ функция. Тогда либо существует $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$, на котором

$$(f'(x) \equiv m) \vee (f'(x) \equiv -m), \quad (24)$$

либо M конечно и $\exists \delta_3 > 0 \quad \forall \delta \in (0, \delta_3) \quad \forall x', x''$ – δ -экстремальных точек – множество $[x', x''] \cap M$ одноточечно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть f_i – кусочно-аналитические функции с кусочно-аналитическими производными такие, как в (20). Пусть при $i = 0, \dots, l$

$$m_i := \max_{x \in [y_i, y_{i+1}]} |f'_i(x_i)|, \quad M_i := \{x \in [y_i, y_{i+1}] : |f'_i(x)| = m_i\}.$$

Предположим, что $M_i = \{z_{ij}\}_{j=1}^{n(i)}$ – конечные множества. Выберем для f_i постоянные δ_{3i} таким же образом, как δ_3 выбиралась для f в следствии, приведенном выше. Положим при $i = 0, \dots, l$ и $j = 1, \dots, n(i)$

$$[\alpha_{ij}, \beta_{ij}] := [y_i, y_{i+1}] \cap \left[z_{ij} - \frac{\delta_{3i}}{2}, z_{ij} + \frac{\delta_{3i}}{2} \right], \quad f_{ij} := f_i|_{[\alpha_{ij}, \beta_{ij}]} = f|_{[\alpha_{ij}, \beta_{ij}]}.$$

Из следствия леммы 3 вытекает, что при $0 < \delta < \delta_{3i}/2$

$$\omega(f_i; \delta) = \max_{1 \leq j \leq n(i)} \omega(f_{ij}; \delta). \quad (25)$$

В частности, если $f'(x)$ – кусочно-аналитическая функция, то $f = f_0$ и

$$\omega(f; \delta) = \max_{1 \leq j \leq n(0)} \omega(f_{0j}; \delta). \quad (26)$$

Докажем теперь утверждение 2 для случая функции с кусочно-аналитической производной.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2'. Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ – кусочно-аналитические на $[a, b]$ функции и $(a, b) \supset M = \{x_0\}$. Тогда для аналитичности $\omega(f; \delta)$ в нуле необходимо и достаточно, чтобы выполнялось, по крайней мере, одно из отношений $d_{rx_0} : d_{lx_0}$ или $d_{lx_0} : d_{rx_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно считать $f'(x_0) = m$. (Если $f'(x_0) = -m$, то перейдем к функции $-f(x)$, при этом модуль непрерывности не изменится.) Выберем $\delta_4 > 0$ так, что $[x_0 - \delta_4, x_0 + \delta_4] \subset (a, b)$ и

$$\forall x \in [x_0 - \delta_4, x_0 + \delta_4] : f'(x) > 0. \quad (27)$$

Пусть $0 < \delta < \min(\delta_2; \delta_4)$, где δ_2 выбрано, как в лемме 3. Если x', x'' – δ -экстремальная пара точек, то по лемме 3 $x_0 \in [x', x'']$, а в силу (16) и односточности M $x_0 \in (x', x'')$. Кроме того, очевидно, (27) влечет (17) и, значит, $x'' - x' = \delta$.

Выберем $\delta_5 > 0$ так, что $f'_l(x)$ разлагается на $[x_0 - \delta_5, x_0]$ в сходящийся ряд Тейлора

$$f'_l(x) = m + k_l(x - x_0)^{d_l} + \dots, \quad (28)$$

и, аналогично, на $[x_0, x_0 + \delta_5]$

$$f'_r(x) = m + k_r(x - x_0)^{d_r} + \dots. \quad (29)$$

Так как x_0 – точка строгого максимума производной, то $(-1)^{d_l} k_l < 0$, $k_r < 0$ и, следовательно, при некотором $\delta_6 > 0$ $f'_l(x)$ строго возрастает на $[x_0 - \delta_6, x_0]$, а $f'_r(x)$ строго убывает на $[x_0, x_0 + \delta_6]$.

Удобно ввести новые обозначения

$$x_1 \stackrel{d_n}{=} x_0 - x', \quad x_2 \stackrel{d_n}{=} x'' - x_0, \quad a \stackrel{d_n}{=} (-1)^{d_l} k_l, \quad b \stackrel{d_n}{=} -k_r,$$

x_1, x_2, a и b – положительные величины. С учетом леммы 1 и (28), (29) получим систему

$$\begin{cases} ax_1^{d_l}(1 + a_1x_1 + \dots) = bx_2^{d_r}(1 + b_1x_2 + \dots), \\ x_1 + x_2 = \delta, \\ x_1 > 0, x_2 > 0. \end{cases} \quad (A)$$

При $0 < \delta < \min(\delta_2; \delta_4; \delta_5; \delta_6)$ система (A) имеет единственное решение.

В самом деле, любая пара x', x'' δ -экстремальных точек дает решение $x_1 = x_0 - x'$, $x_2 = x'' - x_0$. А так как функции в правых и левых частях первого уравнения системы (A) строго возрастают на $[0, \delta_6]$, то решение единственно.

Покажем, что при $d_l : d_r$ или $d_r : d_l$ функции $x_1(\delta)$ и $x_2(\delta)$ аналитичны в нуле.

Так как

$$\omega(f; \delta) = m\delta - a \int_0^{x_1(\delta)} x^{d_l}(1 + a_1x + \dots) dx - b \int_0^{x_2(\delta)} x^{d_r}(1 + b_1x + \dots) dx, \quad (30)$$

этого достаточно для аналитичности $\omega(f; \delta)$ в нуле.

Для определенности считаем, что $d_r \nmid d_l$. Тогда существует натуральное p , для которого $d_r = p d_l$. Используя систему (A), находим, что

$$a^{1/d_l}(\delta - x_2)(1 + a_1(\delta - x_2) + \dots)^{1/d_l} - b^{1/d_l}x_2^p(1 + b_1x_2 + \dots)^{1/d_l} = 0. \quad (31)$$

Применив к (31) “вещественно-аналитический” вариант теоремы о неявной функции (см., например, [9, § 1.3]), убеждаемся в голоморфности $x_2(\delta)$, а значит, и $x_1(\delta)$.

При $p = 1$ и $d_r = d_l = d$ из (31) находим

$$x'_1(0) = \frac{b^{1/d}}{a^{1/d} + b^{1/d}}, \quad x'_2(0) = \frac{a^{1/d}}{a^{1/d} + b^{1/d}}. \quad (32)$$

А при $p > 1$, используя (31) и первое уравнение системы (A), видим, что

$$x'_2(0) = 1, \quad x'_1(0) = \dots = x_1^{(p-1)}(0) = 0, \quad x_1^{(p)}(0) = p! \left(\frac{b}{a}\right)^{1/d_l}. \quad (33)$$

Рассмотрим случай, когда ни одно из соотношений $d_l \nmid d_r$, $d_r \nmid d_l$ не выполняется.

Тогда $d_r = p s_1$, $d_l = p s_2$, где $s_1 > 1$ и $s_2 > 1$, s_1 и s_2 взаимно простые, а p – наибольший общий делитель d_l и d_r . Можно считать, что $s_1 > s_2$.

Выберем вспомогательный параметр $Y = Y(\delta) > 0$ так, чтобы

$$a x_1^{d_l}(1 + a_1 x_1 + \dots) = Y^{p s_1 s_2}, \quad b x_2^{d_r}(1 + b_1 x_2 + \dots) = Y^{p s_1 s_2}.$$

Отсюда

$$x_1 = a^{-1/d_l} Y^{s_1} + \dots, \quad x_2 = b^{-1/d_r} Y^{s_2} + \dots, \quad (34)$$

а учитывая, что $s_1 > s_2$ и $x_1(\delta) + x_2(\delta) = \delta$, получим

$$\delta^{1/s_2} = b^{-1/(d_r s_2)} Y(1 + \dots).$$

Решив последнее уравнение относительно Y и подставив в (34), найдем

$$x_2(\delta) = \delta - \left(\frac{b}{a}\right)^{1/d_l} \delta^{s_1/s_2} + \dots, \quad (35)$$

$$x_1(\delta) = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/d_l} \delta^{s_1/s_2} + \dots. \quad (36)$$

В (35) и (36) справа стоят степенные ряды переменной δ^{1/s_2} ; следовательно, $x_1(\delta)$ и $x_2(\delta)$ не аналитичны в нуле.

Предположим, что $\omega(f; \delta)$ аналитична в нуле. Тогда аналитичны в нуле функция $F(\delta) := t\delta - \omega(f; \delta)$ и ее производная $F'(\delta)$.

Используя (30), найдем

$$F'(\delta) = a(x_1(\delta))^{d_l} [1 + a_1 x_1(\delta) + \dots] x'_1(\delta) + b(x_2(\delta))^{d_r} [1 + b_1 x_2(\delta) + \dots] x'_2(\delta)$$

$(x_1(\delta)$ и $x_2(\delta)$ дифференцируемы, это следует из (35), (36) и того, что $s_1 > s_2$). Из последнего уравнения и тождества $x_1'(\delta) + x_2'(\delta) \equiv 1$ получим

$$F'(\delta) = b(x_2(\delta))^{d_r} [1 + b_1 x_2(\delta) + \dots]. \quad (37)$$

Из (35) следует, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x_2(\delta)}{\delta} = 1.$$

Тогда если $F'(\delta)$ аналитична, то она имеет в нуле нуль порядка d_r . Выберем подходящую однозначную ветвь функции $(F'(\delta))^{1/d_r}$. Из (37)

$$b^{1/d_r} x_2(\delta) [1 + b_1 x_2(\delta) + \dots] = (F'(\delta))^{1/d_r}.$$

Обращая степенной ряд слева, видим, что из аналитичности $\omega(f; \delta)$ следует аналитичность $x_2(\delta)$, что противоречит (35). Доказательство закончено.

Перед тем как перейти к доказательству теорем 1–3, докажем еще две леммы.

На множестве непрерывных функций

$$f: [0, a) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a = a(f) > 0, \quad (38)$$

определим бинарные отношения “ $\ll$ ” и “ $\asymp$ ”

$$\begin{aligned} (f_1 \ll f_2) &\stackrel{\text{df}}{\iff} (\exists \varepsilon = \varepsilon(f_1; f_2) > 0 \quad \forall x \in (0, \varepsilon) : f_1(x) < f_2(x)), \\ (f_1 \asymp f_2) &\stackrel{\text{df}}{\iff} (\exists \varepsilon = \varepsilon(f_1; f_2) > 0 \quad \forall x \in [0, \varepsilon) : f_1(x) = f_2(x)). \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Пусть U – некоторое подмножество непрерывных функций вида (38), которые удовлетворяют следующему условию единственности:

$$(0 \in Cl\{x : x > 0, f_1(x) = f_2(x)\}) \implies (f_1 \asymp f_2). \quad (39)$$

Тогда для любых f_1 и f_2 из U выполнено одно и только одно из соотношений

$$f_1 \ll f_2, \quad f_2 \ll f_1, \quad f_1 \asymp f_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\neg(f_1 \ll f_2)$ и $\neg(f_2 \ll f_1)$, то нуль – предельная точка множества $\{x : f_1(x) = f_2(x), x > 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для функций вещественно-аналитических в нуле лемма имеется в [1] с другим доказательством. В настоящей работе лемма используется для функций, представимых рядами вида

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i/s}, \quad (40)$$

где $s = s(f) \in \mathbb{N}$. Условие (39) в этом случае вытекает из теоремы единственности вещественно-аналитических функций.

ЛЕММА 5. Пусть $f(x)$ – кусочно-аналитическая функция на $[0, b]$. Тогда функция

$$G(\delta) := \max_{0 \leq x \leq \delta} |f(x)|$$

также является кусочно-аналитической на $[0, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем $[0, b]$ на отрезки $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, m-1$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$, так, что на каждом $[t_i, t_{i+1}]$ $f(x)$ дифференцируема и $f'(x)$ сохраняет знак. Доказательство проведем индукцией по числу отрезков.

При $m = 1$ для любого $\delta \in [0, b]$ в силу монотонности $f(x)$

$$\begin{aligned} 2G(\delta) &= 2 \max \left(|f(0)|; \left| f(0) + \int_0^\delta f'(x) dx \right| \right) \\ &= \left| \left| f(0) + \int_0^\delta f'(x) dx \right| - |f(0)| \right| + |f(0)| + \left| f(0) + \int_0^\delta f'(x) dx \right|. \end{aligned} \quad (41)$$

Пусть лемма верна для некоторого $m - 1$. Если число отрезков равно m , то $G(\delta)$ – кусочно-аналитическая на $[0, t_{m-1}]$ функция, а при $\delta \in [t_{m-1}, b]$ аналогично (41)

$$\begin{aligned} 2G(\delta) &= 2 \max \left(G(t_{m-1}); \left| f(t_{m-1}) + \int_{t_{m-1}}^\delta f'(x) dx \right| \right) \\ &= \left| \left| f(t_{m-1}) + \int_{t_{m-1}}^\delta f'(x) dx \right| - G(t_{m-1}) \right| \\ &\quad + G(t_{m-1}) + \left| f(t_{m-1}) + \int_{t_{m-1}}^\delta f'(x) dx \right|. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $f(x)$ – кусочно-аналитическая на $[a, b]$ функция. Покажем, что вблизи нуля $\omega(f; \delta)$ имеет вид (40) и выполнено (14). Допустим, что $f'(x)$ – кусочно-аналитическая на $[a, b]$ функция. Если M – одноточечное подмножество (a, b) , то (14) и (40) следуют из утверждения 2', (30), (32), (33) и (35), (36), а при $M = \{a\}$ или $M = \{b\}$ – из лемм 3 и 5. Если M конечно, но имеет больше одной точки, то, переходя к f_{0j} (см. формулу (26)), сводим ситуацию к одноточечному случаю. Каждый модуль непрерывности $\omega(f_{0j}; \delta)$ имеет вид (40); справедливы формулы, аналогичные (14), но $d = d(j)$ и $k = k(j)$. Для того чтобы получить (14), используем (26), лемму 4 и следующий “принцип сравнения” функций вида (40).

Пусть $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ представлены рядами вида (40). Пусть

$$\omega_i(\delta) = m_i \delta - k_i \delta^{d_i} + O(\delta^{d_i+1/s_i}),$$

где при $i = 1, 2$ m_i и k_i – положительные, а d_i и s_i – натуральные числа, $d_i > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} (m_1 > m_2) &\implies (\omega_1 \gg \omega_2), \\ ((m_1 = m_2) \ \& \ (d_1 > d_2)) &\implies (\omega_1 \gg \omega_2), \\ ((m_1 = m_2) \ \& \ (d_1 = d_2) \ \& \ (k_1 < k_2)) &\implies (\omega_1 \gg \omega_2). \end{aligned} \quad (42)$$

Если M бесконечно, то по (24) вблизи нуля $\omega(f; \delta) = m\delta$.

Пусть теперь $f'(x)$ не является кусочно-аналитической на $[a, b]$.

Переходя к f_i (см., замечание к лемме 2), получаем функции, первые производные которых кусочно-аналитичны. По уже доказанному $\omega(f_i; \delta)$ представимы рядами вида (40) и для них имеются аналоги формулы (14) с $m = m(i)$, $d = d(i)$, $k = k(i)$. Формула (20), лемма 5 и “принцип сравнения” (42) показывают, что и в этом случае для $\omega(f; \delta)$ имеет место (40) и (14).

Проверим (15). Первое неравенство из (15) доказано в замечании к теореме 3. Третье следует из первого и второго. Докажем второе.

Из неаналитичности $\omega(f; \delta)$ в нуле следует конечность M . Для конечного M из (25) и (20) при малых δ

$$\omega(f; \delta) = \max_{0 \leq i \leq l} \max_{1 \leq j \leq n(i)} \omega(f_{ij}; \delta).$$

По лемме 4 найдутся номера i_0 и j_0 такие, что $\omega(f; \delta) = \omega(f_{i_0 j_0}; \delta)$. Функция $f_{i_0 j_0}$ определена на $[\alpha_{i_0 j_0}, \beta_{i_0 j_0}]$, а $M \cap [\alpha_{i_0 j_0}, \beta_{i_0 j_0}]$ состоит из единственной точки x_0 . Из леммы 5, неаналитичности $\omega(f; \delta)$ и утверждения 2' следует, что $\neg(d_{l x_0} : d_{r x_0})$ и $\neg(d_{r x_0} : d_{l x_0})$. Рациональное число

$$\frac{\max(d_{l x_0}, d_{r x_0})}{\min(d_{l x_0}, d_{r x_0})}$$

единственным образом представляется в виде несократимой дроби s_1/s_2 , $s_1 \in \mathbb{N}$, $s_2 \in \mathbb{N}$. В соответствии с (30) и (35), (36) $s = s_2$, но $d \geq s_1 > s_2$, т.е. $s_2 \leq d - 1$. Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 и 2 можно провести по схеме, использованной в первой части доказательства теоремы 3. Так как при этом не возникает существенных особенностей, не будем останавливаться на этом подробно.

Перейдем к примерам. Найдем явный вид модуля непрерывности в примере 1.

Система (A) в этом случае примет вид

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2^3, \\ x_1 + x_2 = \delta, \\ x_1 > 0, x_2 > 0. \end{cases} \quad (A')$$

А для модуля непрерывности формула (30) переходит в соотношение

$$\omega(f; \delta) = \delta - \frac{x_1^3(\delta)}{3} - \frac{x_2^4(\delta)}{4}, \quad (43)$$

где $x_1(\delta)$ и $x_2(\delta)$ удовлетворяют системе (A'). Для вспомогательного параметра $Y^6 := x_1^2 = x_2^3$ получаем уравнение

$$Y(Y + 1)^{1/2} = \delta^{1/2}.$$

Используя формулу Бюрмана–Лагранжа (см., например, [10, с. 141]), представим малые положительные решения этого уравнения в виде ряда

$$Y(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \delta^{n/2}, \quad (44)$$

где

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad k_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{n}{2} + i \right).$$

Из (43) находим

$$\omega(f; \delta) = \delta - \frac{Y^9(\delta)}{3} - \frac{Y^8(\delta)}{4}. \quad (45)$$

Подставляя (44) в (45), после простых преобразований получим

$$\omega(f; \delta) = \delta - \frac{\delta^4}{4} + \frac{2}{3}\delta^{9/2} - \frac{3}{2}\delta^5 + \dots,$$

что, в частности, доказывает (11).

Соотношение (12), дающее явный вид $\omega(f; \delta)$ в примере 2, следует из (30), (42) и того, что в силу симметрии $x_1(\delta) = x_2(\delta) = \frac{1}{2}\delta$.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность Р.М. Тригубу и В.П. Заставному за обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Перельман М. Я. О модуле непрерывности аналитических функций // Ученые записки ЛГУ. Сер. матем. 1941. Т. 12. № 83. С. 62–86.
- [2] Тиман А. Ф. Теория приближений функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [3] Тамразов П. М. Гладкости и полиномиальные приближения. Киев: Наукова думка, 1975.
- [4] Ditzian Z., Totik V. Moduli of Smoothness. Springer Ser. Comp. Math.. V. 9. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [5] Sendov Bl., Popov V. The Averaged Moduli of Smoothness. New York: J. Wiley, 1989.
- [6] Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка, 1992.
- [7] Тиман М. Ф. Аппроксимация и свойства периодических функций. Днепропетровск: Днепропетровский аграрный университет, 2000.
- [8] Корнейчук Н. П. Сплаины в теории приближения. М.: Наука, 1984.
- [9] Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.
- [10] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк
E-mail: dovgoshey@iamm.ac.donetsk.ua, potomkina@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило
16.04.2001