Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Тимошенко, Об определяемости эндоморфизмов свободной группы многообразия $\mathfrak{M}$ конечным множеством значений, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 916–920

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1681>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:22:20

УДК 512.544

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ЭНДОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ МНОГООБРАЗИЯ $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ЗНАЧЕНИЙ

Е. И. Тимошенко

В работе изучается вопрос о том, когда эндоморфизмы свободной метабелевой группы ранга n однозначно определяются своими значениями на конечном числе элементов группы.

Библиография: 3 названия.

В Коуровской тетради [1, 13.66 б] сформулирован следующий вопрос В. Э. Шпильрайна. Пусть S_n – свободная метабелева группа ранга n . Обозначим через M множество всех эндоморфизмов группы S_n с нециклическими образами. Можно ли выбрать два элемента $g, h \in S_n$ таких, что для любых $\varphi, \psi \in M$ из $\varphi(g) = \psi(g)$ и $\varphi(h) = \psi(h)$ следует $\varphi = \psi$, т.е. эндоморфизмы из M однозначно определяются своими значениями на g и h ?

Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие групп, отличное от многообразия всех групп, $\mathfrak{A}$ – многообразие абелевых групп, $F_n(\mathfrak{A}\mathfrak{M})$ – свободная группа ранга n многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$. Известно, что $F_n(\mathfrak{A}\mathfrak{M}) = F_n/[V, V]$, где F_n – свободная группа с базисом $x_1, \dots, x_n$, V – неединичная вполне инвариантная подгруппа из F_n .

Обозначим через $\partial_i g$ i -ю частную производную Фокса от элемента $g \in F_n$. Рассматривая ее образ при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}(F_n/V)$, будем говорить о значении производной Фокса в кольце $\mathbb{Z}(F_n/V)$.

Пусть S_r – свободная метабелева группа с базисом $y_1, \dots, y_r$ и A – абелева нормальная подгруппа группы G . Подгруппа A является $\mathbb{Z}(G/A)$ -модулем, если элементы из G действуют на A сопряжением $a^g = gag^{-1}$.

Индукцией по длине элемента $v(x_1, \dots, x_n) \in F_n$ легко получить следующую формулу (см., например, [2]):

$$v(a_1 g_1, \dots, a_n g_n) = a_1^{\partial_1 v(\vec{g})} \dots a_n^{\partial_n v(\vec{g})} \cdot v(\vec{g}) \quad (1)$$

для любых $g_1, \dots, g_n \in G$ и $a_1, \dots, a_n \in A$, где $\partial_i(\vec{g})$ – значение i -й производной на элементах $g_1, \dots, g_n$. Аналогично, $v(\vec{g}) = v(g_1, \dots, g_n)$.

Пусть R – кольцо. В нем выполняется условие Орэ (левое), если для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ из R найдутся x и y такие, что $xa = yb \neq 0$.

Заметим, что для свободной разрешимой группы G кольцо $\mathbb{Z}G$ – область Орэ [3], причем для $\mathbb{Z}G$ левое и правое условия Орэ эквивалентны.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01948.

ЛЕММА 1. Система однородных линейных уравнений имеет в области Орэ R нетривиальное решение, если число неизвестных больше числа уравнений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя условие Орэ и отсутствие делителей нуля в кольце R , придем методом исключения неизвестных к эквивалентной системе вида

$$x_1 b_{11} + \dots + x_r b_{1r} + x_{r+1} b_{1,r+1} + \dots + x_n b_{1n} = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_r b_{rr} + x_{r+1} b_{r,r+1} + \dots + x_n b_{rn} = 0,$$

где $b_{11} \neq 0, \dots, b_{rr} \neq 0$. Среди коэффициентов при переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$ встречаются ненулевые. Можно считать, что $b_{r,r+1} \neq 0$. Положим $x_i = 0$ при $i > r+1$. Найдем x_r^0 и x_{r+1}^0 такие, что $x_r^0 b_{rr} = -x_{r+1}^0 b_{r,r+1} \neq 0$. Заметим, что при любом t элементы $x_r = tx_r^0$ и $x_{r+1} = tx_{r+1}^0$ удовлетворяют последнему уравнению системы.

Если ввести обозначение

$$b'_{1r} = x_r^0 b_{1r} + x_{r+1}^0 b_{1,r+1}, \dots, b'_{r-1,r} = x_r^0 b_{r-1,r} + x_{r+1}^0 b_{r-1,r+1},$$

то система примет вид

$$x_1 b_{11} + \dots + x_{r-1} b_{1,r-1} + t b'_{1,r} = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{r-1} b_{r-1,r-1} + t b'_{r-1,r} = 0.$$

В результате придем к уравнению

$$x_1 b_{11} + z b''_{12} = 0,$$

которое имеет нетривиальное решение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $V \neq 1$ – вербальная подгруппа из F_n и $\mathbb{Z}(F_n/V)$ – область Орэ. Тогда при $m < n$ никакие m элементов группы $F_n/[V, V]$ не определяют однозначно эндоморфизмы этой группы, действующие тождественно по модулю $V/[V, V]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n \in \mathbb{Z}(F_n/V)$ – ненулевое решение системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \partial_i g_j = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $\partial_i g_j$ – значение производной в кольце $\mathbb{Z}(F_n/V)$. Тогда действие эндоморфизма $\bar{\varphi}$ группы $F_n/[V, V]$, индуцированного эндоморфизмом $\varphi = \{x_i \rightarrow c^{\lambda_i} x_i, i = 1, \dots, n\}$ свободной группы F_n , совпадает на элементах $g_1, \dots, g_m$ с действием тождественного эндоморфизма при любом $c \in V$ и любых λ_i – прообразах $\bar{\lambda}_i$ в $\mathbb{Z}F_n$.

Действительно, из формулы (1) имеем

$$g_j(\bar{c}^{\bar{\lambda}_1} \bar{x}_1, \dots, \bar{c}^{\bar{\lambda}_n} \bar{x}_n) = \bar{c}^{\bar{\lambda}_1 \partial_1 g_j + \dots + \bar{\lambda}_n \partial_n g_j} \cdot g_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = g_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Заметим, что $\bar{\varphi}$ – нетождественный эндоморфизм, если $c \notin [V, V]$. Пусть $\bar{\lambda}_1 \neq 0$. Если $\partial_1 c = \dots = \partial_n c$ в $\mathbb{Z}(F/V)$, то при вложении Магнуса образ элемента c в группе $F_n/[V, V]$ единичный. Предположим, что $\partial_1 c \neq 0$ в $\mathbb{Z}(F/V)$. Тогда $c^{\lambda_i} \neq 1$ в $F_n/[V, V]$, так как $\partial_1 c^{\lambda_i} = \bar{\lambda}_i \partial_1 c$ в $\mathbb{Z}(F_n/V)$.

Итак, для любых m элементов группы $F/[V, V]$ можно указать нетождественный эндоморфизм $\bar{\varphi}$, оставляющий эти элементы на месте. Теорема доказана.

Если, кроме того, выполнено (2), то φ – автоморфизм. Пусть $\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0$ – ненулевое решение системы уравнений (4). Элементы $z_1 = \partial_1 c, \dots, z_n = \partial_n c$ найдем из уравнения (2) и условия $(1 - \bar{y}_1)z_1 + \dots + (1 - \bar{y}_n)z_n = 0$, где $\bar{y}_i$ – образ элемента y_i в группе S_n/S'_n . Система уравнений

$$\begin{aligned}\lambda_1^0 z_1 + \lambda_2^0 z_2 + \dots + \lambda_n^0 z_n &= 0, \\ (1 - \bar{y}_1)z_1 + (1 - \bar{y}_2)z_2 + \dots + (1 - \bar{y}_n)z_n &= 0\end{aligned}$$

при $n \geq 3$ имеет ненулевое решение $z_i = \partial_i c$. Поэтому φ – искомый автоморфизм. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $m \geq n$. Элементы $g_1, \dots, g_m \in S_n$ определяют однозначно эндоморфизмы группы S_n тогда и только тогда, когда порожденная ими подгруппа содержит свободную метабелеву группу ранга n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_1, \dots, y_n$ – базис группы S_n . Не уменьшая общности, можно считать, что

$$g_i = \begin{cases} y_i^{m_i} c_i, & i = 1, \dots, l, \\ c_i, & i = l+1, \dots, m, \end{cases}$$

где $c_1, \dots, c_m \in S'_n$. Предположим, что элементы $g_1, \dots, g_l$ не порождают свободную метабелеву группу ранга n . Тогда $l < n$. Пусть $d_1, \dots, d_n \in S'_n$. Рассмотрим эндоморфизмы

$$\varphi = \{y_i \rightarrow d_i, i = 1, \dots, n\}$$

и

$$\psi = \{y_j \rightarrow d_j, j = 1, \dots, n-1, y_n \rightarrow 1\}.$$

Тогда имеем

$$\varphi(g_i) = \begin{cases} \varphi(y_i^{m_i} c_i) = \varphi(y_i^{m_i})\varphi(c_i) = d_i^{m_i} & \text{при } i = 1, \dots, l, \\ \varphi(c_i) = 1 & \text{при } i = l+1, \dots, m. \end{cases}$$

Эндоморфизм ψ принимает на этих элементах те же значения. Но при $d_n \neq 1$ эндоморфизмы φ и ψ отличаются.

Предположим теперь, что элементы $g_1, \dots, g_l$ порождают свободную метабелеву группу ранга n . Тогда $l = n$. Пусть φ и ψ – эндоморфизмы, совпадающие на элементах $g_1, \dots, g_m$. Обозначим через $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ индуцированные эндоморфизмы группы $\bar{S}_n = S_n/S'_n$, а через $\bar{g}$ – образ элемента g в группе $\bar{S}_n$ при естественном гомоморфизме. Так как $\varphi(g_i) = \psi(g_i)$, то $\bar{\varphi}(\bar{y}_i^{m_i}) = \bar{\psi}(\bar{y}_i^{m_i})$ при $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $\bar{\varphi}(\bar{y}_i) = \bar{\psi}(\bar{y}_i)$. Предположим, что

$$\varphi = \{y_i \rightarrow t_i, i = 1, \dots, n\}, \quad \psi = \{y_i \rightarrow z_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Как мы только что заметили, $\bar{t}_i = \bar{z}_i$. По условию $g_i(t_1, \dots, t_n) = g_i(z_1, \dots, z_n)$. Используя правило дифференцирования “сложной функции”, получим

$$\begin{aligned}\partial_r g_i(\vec{t}) &= \partial_1 g_i(\vec{y})|_{\vec{y}=\vec{t}} \partial_r t_1 + \dots + \partial_n g_i(\vec{y})|_{\vec{y}=\vec{t}} \partial_r t_n, \\ \partial_r g_i(\vec{z}) &= \partial_1 g_i(\vec{y})|_{\vec{y}=\vec{z}} \partial_r z_1 + \dots + \partial_n g_i(\vec{y})|_{\vec{y}=\vec{z}} \partial_r z_n,\end{aligned}$$