Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Фролов, Краевая задача для системы Бюргерса, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 921–932

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1682>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:34:04

УДК 517.9

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ БЮРГЕРСА

Н. Н. Фролов

Рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\rho V) &= 0, & \rho|_{\Gamma_1} &= \rho_0, \\ \rho(V, \nabla V) &= \nu \Delta V, & V|_{\Gamma} &= V^0\end{aligned}$$

относительно вектор-функции $V = (V_1, V_2)$ и скалярной функции $\rho \geq 0$ в прямоугольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей Γ . Здесь

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma : (V^0, n) < 0\}, \quad V_1^0|_{\Gamma} > 0, \quad \nu = \operatorname{const} > 0.$$

Доказывается разрешимость данной задачи в классах Гёльдера.

Библиография: 8 названий.

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарная задача, описывающая движение сжимаемой, неоднородной, вязкой жидкости в области $\Omega = (0, a) \times (0, b) \subset \mathbb{R}^2$ при постоянном давлении и отсутствии вектора массовых сил. Через $x = (x_1, x_2)$ обозначается точка области Ω , через Γ – граница Ω , через Γ_j ($j = \overline{1, 4}$) – части Γ , лежащие соответственно на прямых $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = a$, $x_2 = b$. Задача описывается системой

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\rho V) &= 0, & \rho|_{\Gamma_1} &= \rho_0, \\ \rho(V, \nabla V) &= \nu \Delta V, & V|_{\Gamma} &= V^0\end{aligned}\tag{1}$$

в Ω относительно неизвестных ρ , V . Здесь $V(x) = (V_1(x), V_2(x))$ – вектор скорости, $\rho(x) \geq 0$ – плотность жидкости. Величины V^0 , ρ_0 , ν заданы: V^0 – вектор скорости жидкости на Γ , $\rho_0 \geq 0$ – плотность на Γ_1 , $\nu > 0$ – коэффициент вязкости жидкости ($\nu = \operatorname{const}$); Γ_1, Γ_3 – границы соответственно входа и выхода потока жидкости. Предполагается, что V^0 – непрерывная вектор-функция на Γ , удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned}(V^0, n)|_{\Gamma_1} &< 0, & (V^0, n)|_{\Gamma_3} &> 0, & (V^0, n)|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} &= 0, \\ (V^0, \tau)|_{\Gamma_2} &> 0, & (V^0, \tau)|_{\Gamma_4} &< 0,\end{aligned}\tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00277.

где $n = (n_1, n_2)$ – вектор внешней нормали к Γ , τ – касательный вектор к Γ , определяющий положительную ориентацию на Γ (n, τ кусочно-постоянные на Γ), $\rho_0 \geq 0$ ($\rho_0 \neq 0$) – непрерывная функция на Γ_1 .

В данной заметке устанавливается разрешимость задачи (1), (2) в пространствах Гёльдера для достаточно малых ρ_0 (см. (33)). Нестационарный случай подобной задачи (где x одномерно) рассмотрен в работах [1], [2].

2. Редукция задачи (1). Введем необходимые обозначения. Обозначим через $C^l(\bar{\Omega})$ ($C^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$) банахово пространство всех l раз непрерывно дифференцируемых (вектор-) функций на $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$; через $C_\alpha^l(\bar{\Omega})$ – подпространство (вектор-) функций из $C^l(\bar{\Omega})$, производные l -го порядка которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α ($0 < \alpha \leq 1$), $C_\alpha^0(\bar{\Omega}) = C_\alpha(\bar{\Omega})$. Соответствующие пространства функций на Γ обозначим через $C^l(\Gamma)$, $C_\alpha^l(\Gamma)$.

Через $W_p^l(\Omega)$ ($l \geq 0, p \geq 1$) обозначим банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{p,l}$, состоящее из всех (вектор-) функций на Ω , обобщенные производные которых до l -го порядка суммируемы на Ω со степенью p ; $L_p(\Omega) = W_p^0(\Omega)$, $L_\infty(\Omega)$ – пространство существенно ограниченных (вектор-) функций на Ω (норму в L_p , $1 \leq p \leq \infty$, обозначим через $\|\cdot\|_p$); $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ – подпространство в $W_p^l(\Omega)$, в котором плотно множество $C_0^l(\Omega)$ всех финитных (вектор-) функций из $C^l(\bar{\Omega})$. Нормы во всех пространствах вводятся естественным образом (см. [3], [4]).

Пусть пара (ρ, V) – решение задачи (1). Из первого уравнения (1) следует, что дифференциальная форма

$$\alpha = -\rho V_2 dx_1 + \rho V_1 dx_2$$

замкнута в Ω : $d\alpha = \operatorname{div}(\rho V) dx_1 \wedge dx_2 = 0$. Отсюда в силу односвязности Ω вытекает, что α точна: $\alpha = d\varphi$. Таким образом, вектор-функция $\rho V \in W_2^1(\Omega)$ представима в виде $\rho V = \operatorname{rot} \varphi$, $\varphi \in W_2^2(\Omega)$, или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\rho V_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \rho V_1. \quad (3)$$

Подставляя эти соотношения в (1), приходим к системе уравнений относительно неизвестных (φ, V)

$$(V, \nabla \varphi) = 0, \quad \nu \Delta V + [\varphi, V] = 0, \quad (4)$$

где

$$[\varphi, V] = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

– скобка Пуассона функции φ и вектор-функции V .

Далее, условие $\operatorname{rot} \varphi|_{\Gamma_1} = \rho V|_{\Gamma_1} = \rho_0 V^0|_{\Gamma_1}$ эквивалентно системе равенств

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = -\rho_0 (V^0, \tau)|_{\Gamma_1}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_{\Gamma_1} = \rho_0 (V^0, n)|_{\Gamma_1},$$

которые однозначно (с точностью до аддитивной постоянной) определяют функцию φ на Γ_1 :

$$\varphi|_{\Gamma_1}(x) = - \int_{\Gamma(0,x)} \rho_0 (V^0, n) ds = \int_0^{x_2} \rho_0 V_1^0|_{\Gamma_1} ds \equiv \varphi_0(x_2). \quad (5)$$

Здесь $\Gamma(0, x)$ – часть отрезка Γ_1 с началом в точке $x = 0$ и концом в точке $x = (0, x_2) \in \Gamma_1$. Таким образом, задача (1), (2) свелась к поиску пары (φ, V) , удовлетворяющей уравнениям (4) в Ω и граничным условиям

$$V|_{\Gamma} = V^0, \quad \varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_0. \quad (6)$$

Обратно, если пара (φ, V) – гладкое решение задачи (4), (6), где φ_0 имеет вид (5), то из первого уравнения (4) вытекает существование функции ρ , для которой выполнены равенства (3), и, следовательно, справедливо первое уравнение (1). Далее, подставляя (3) во второе уравнение (4), приходим к уравнению (1) для V . Из (3), (5), (6) вытекает выполнение граничных условий (1) для V и ρ :

$$\rho V_1|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_1} = \rho_0 V_1^0 \implies \rho|_{\Gamma_1} = \rho_0.$$

Как будет показано (см. п. 3), в условиях (2) $\partial \varphi / \partial x_2 \geq 0$. Следовательно, согласно (3) плотность жидкости на выходе Γ_3 равна

$$\rho|_{\Gamma_3} = \left(\frac{1}{V_1^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \Big|_{\Gamma_3} \geq 0.$$

3. Задача Коши для функции тока. Рассмотрим задачу Коши относительно функции φ :

$$(V, \nabla \varphi) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_0. \quad (7)$$

Нам потребуются некоторые оценки для решений данной задачи. Предварительно докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in W_2^2(\Omega)$, $f|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0$. Тогда через каждую точку $x \in \overline{\Omega}$ проходит единственная интегральная кривая уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi), \quad 0 \leq t \leq a, \quad (8)$$

лежащая в $\overline{\Omega}$. При этом $\xi(t, x) \in C^1([0, a] \times \overline{\Omega})$ и справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x_1} &= -f(x) \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x_2}, & \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x_2} &= \exp\{-I(t, x)\}, \\ I(t, x) &= \int_t^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}(s, \xi(s, x)) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $f|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0$, утверждения леммы 1 общеизвестны (см. [5, с. 92]). Пусть $f \in W_2^2(\Omega)$. Существование интегральной кривой уравнения (8), проходящей через точку $x \in \overline{\Omega}$ и лежащей в $\overline{\Omega}$, вытекает из условий $W_2^2(\Omega) \subset C_\alpha(\overline{\Omega})$ ($0 < \alpha < 1$ любое), $f|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0$. Далее, согласно теореме вложения (см. [6]) для таких f

$$|f(x_1, x_2) - f(x_1, x'_2)| \leq c \|f\|_{2,2} \cdot |x_2 - x'_2| (1 + |\ln |x_2 - x'_2||^{1/2}),$$

где $x_1 \in [0, a]$, $x_2, x'_2 \in [0, b]$ – произвольные точки, а постоянная c зависит лишь от Ω . Из этой оценки по теореме Оsgуда (см. [5, с. 51]) следует единственность решения задачи Коши (8).

Покажем, что $\xi(t, x) \in C^1([0, a] \times \bar{\Omega})$ и справедливы равенства (9). Для этого рассмотрим последовательность $f_n \in C^2(\bar{\Omega})$, $f_n|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0$, такую, что $\|f_n - f\|_{2,2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Пусть $\xi_n(t, x)$ – интегральная кривая уравнения (8), в котором $f = f_n$. Поскольку $f_n \rightarrow f$ в $C(\bar{\Omega})$, то (см. [5, с. 80]) $\xi_n(t, x) \rightarrow \xi(t, x)$ в $C([0, a] \times \bar{\Omega})$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\xi(t, x), \partial\xi/\partial t \in C([0, a] \times \bar{\Omega})$.

Рассмотрим последовательности

$$\frac{\partial \xi_n(t, x)}{\partial x_1} = -f_n(x) \frac{\partial \xi_n(t, x)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \xi_n(t, x)}{\partial x_2} = \exp\{-I_n(t, x)\},$$

$$I_n(t, x) = \int_t^{x_1} \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(s, \xi_n(s, x)) ds.$$

Покажем, что они сходятся в $C([0, a] \times \bar{\Omega})$ при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим выражениям в правых частях (9). Поскольку $f_n \rightarrow f$ в $C(\bar{\Omega})$, достаточно установить, что $\partial\xi_n/\partial x_2 \rightarrow \partial\xi/\partial x_2$ в $C([0, a] \times \bar{\Omega})$.

Из теорем о следах функций $\psi \in W_2^1(\Omega)$ вытекают неравенства

$$\int_t^{x_1} |\psi(s, \eta(s))| ds \leq c_0 \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right| + |\psi| \right) dx, \quad (10)$$

$$\int_t^{x_1} |\psi(s, \eta(s)) - \psi(s, \xi(s))| ds \leq \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right|^2 dx \int_0^a |\eta(s) - \xi(s)| ds \right)^{1/2}, \quad (11)$$

справедливые для любых $t, x_1 \in [0, a]$ и функций $\eta(s), \xi(s) \in C[t, x_1]$, $0 \leq \eta, \xi \leq b$, с постоянной c_0 , зависящей лишь от Ω ($c_0 \leq \max(8, 11/b)$). Используя оценку (10) при

$$\psi = \frac{\partial(f_n - f)}{\partial x_2}, \quad \eta = \xi_n(s, x),$$

оценку (11) при

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \eta = \xi_n(s, x), \quad \xi = \xi(s, x),$$

получаем, что равномерно по $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, a]$

$$|I_n(t, x) - I(t, x)| \leq c_0 \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial^2(f_n - f)}{\partial x_2^2} \right| + \left| \frac{\partial(f_n - f)}{\partial x_2} \right| \right) dx$$

$$+ \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right|^2 dx \int_0^a |\xi_n(s, x) - \xi(s, x)| ds \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что $\partial\xi_n/\partial x_j \rightarrow \partial\xi/\partial x_j$ ($j = 1, 2, n \rightarrow \infty$) в $C([0, a] \times \bar{\Omega})$. Здесь $\partial\xi/\partial x_j$ – выражения, стоящие в правых частях (9). Лемма доказана.

Аналогично устанавливается, что из сходимости $\|f_n - f\|_{2,2} \rightarrow 0$ ($f_n, f \in W_2^2(\Omega)$) вытекает сходимость $\xi_n(t, x) \rightarrow \xi(t, x)$ в $C^1([0, a] \times \bar{\Omega})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\varphi_0 \in C^1(\Gamma_1)$,

$$V \in \mathcal{K}(\Omega) \equiv \{V \in W_2^2(\Omega) : V_1 > 0, V_2|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0\}.$$

Тогда в $C^1(\overline{\Omega})$ существует единственное решение $\varphi = \varphi(V, x)$ задачи (7), причем

$$\|\varphi(V, \cdot)\|_{C^1} \leq \|\varphi_0\|_{\infty} + \|\varphi'_0\|_{\infty} \frac{\|V\|_{\infty}}{\min_{\Gamma_1} V_1} \exp\left\{\frac{2c_0\sqrt{ab}}{\min_{\Omega} V_1} \|V\|_{2,2}\right\}, \quad (12)$$

где c_0 – постоянная вложения из (10) и оператор $V \mapsto \varphi(V, \cdot)$, $\mathcal{K}(\Omega) \rightarrow C^1(\overline{\Omega})$ непрерывен.

Если $V \in \mathcal{K}(\Omega) \cap C_{\beta}^1(\overline{\Omega})$, $\varphi_0 \in C_{\delta}^1(\Gamma_1)$, то $\varphi \in C_{\alpha}^1(\overline{\Omega})$ и

$$\|\varphi(V, \cdot)\|_{C_{\alpha}^1} \leq \sigma\left(\frac{1}{\min_{\Omega} V_1}, \|V\|_{C_{\alpha}^1}\right), \quad \alpha = \min(\beta, \delta), \quad (13)$$

где $\sigma(t, \tau)$ – возрастающая функция по каждой из переменных $t > 0$, $\tau \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $V_1 > 0$ на $\overline{\Omega}$, то уравнение (7) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + f \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \quad \text{где } f = \frac{V_2}{V_1} \in W_2^2(\Omega), \quad f|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0. \quad (14)$$

Пусть $\xi_V(t, x) \equiv \xi(t, x)$ – интегральная кривая уравнения (8) (f определена из (14)), проходящая через точку $x \in \overline{\Omega}$. Из леммы 1 вытекает, что на $\overline{\Omega}$ определена функция $\xi(0, x) \in C^1(\overline{\Omega})$, причем

$$\frac{\partial \xi(0, x)}{\partial x_1} = -f(x) \frac{\partial \xi(0, x)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \xi(0, x)}{\partial x_2} = \exp\{-I(0, x)\}. \quad (15)$$

Отсюда получаем, что функция

$$\varphi(x) = \varphi_0(\xi(0, x)) \in C^1(\overline{\Omega}) \quad (16)$$

является решением задачи Коши (7), причем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -f(x) \varphi'_0(\xi(0, x)) \frac{\partial \xi(0, x)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \varphi'_0(\xi(0, x)) \frac{\partial \xi(0, x)}{\partial x_2}. \quad (17)$$

В частности, если φ_0 определено равенством (5), то из (15), (17) следует, что $\partial \varphi / \partial x_2 \geq 0$.

Установим оценку (12). Полагая в неравенстве (10) $\psi = \operatorname{div} V$, $\eta = \xi(s, x)$, находим

$$\left| \int_0^{x_1} \frac{\operatorname{div} V}{V_1}(s, \xi(s, x)) ds \right| \leq \frac{1}{\min_{\Omega} V_1} \int_0^{x_1} |\operatorname{div} V(s, \xi(s, x))| ds \leq \frac{2c_0\sqrt{ab}}{\min_{\Omega} V_1} \|V\|_{2,2}. \quad (18)$$

Далее, из равенства

$$\operatorname{div} V(s, \xi(s, x)) = \frac{d}{ds} V_1(s, \xi(s, x)) + V_1(s, \xi(s, x)) \frac{\partial f}{\partial x_2}(s, \xi(s, x))$$

получаем

$$I(0, x) = \int_0^{x_1} \frac{\operatorname{div} V}{V_1}(s, \xi(s, x)) ds - \ln \frac{V_1(x)}{V_1(0, \xi(0, x))}$$

и, следовательно, согласно (18)

$$\left| \frac{\partial \xi(0, x)}{\partial x_2} \right| \leq \frac{V_1(x)}{V_1(0, \xi(0, x))} \exp \left\{ \frac{2c_0 \sqrt{ab}}{\min_{\Omega} V_1} \|V\|_{2,2} \right\}.$$

Из (15)–(17) и последней оценки вытекает (12).

Пусть $V, V_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ и $\|V_n - V\|_{2,2} \rightarrow 0$. Тогда $\|f_n - f\|_{2,2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) и, как уже отмечалось, $\xi_{V_n}(0, x) \rightarrow \xi_V(0, x)$ в $C^1(\overline{\Omega})$. Поэтому из (16), (17) следует $\varphi(V_n, \cdot) \rightarrow \varphi(V, \cdot)$ в $C^1(\overline{\Omega})$, т.е. оператор $V \rightarrow \varphi(V, \cdot)$ непрерывен.

Установим теперь оценку (13). Обозначим через $|\psi|_{\alpha}$ константу Гёльдера функции $\psi \in C_{\alpha}(\overline{\Omega})$. При помощи неравенства

$$|\xi(t, x+h) - \xi(t, x)| \leq |h| \sqrt{1 + \|f\|_{\infty}^2} \exp \left\{ a \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{\infty} \right\}, \quad x, x+h \in \Omega,$$

из (17), непосредственно вычисляя, находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|_{\alpha} &\leq |\varphi'_0|_{\alpha} (1 + \|f\|_{\infty}^2)^{\alpha/2} \exp \left\{ a(\alpha+1) \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{\infty} \right\} + \|\varphi'_0\|_{\infty} \cdot |\exp\{-I(0, x)\}|_{\alpha}, \\ |\exp\{-I(0, x)\}|_{\alpha} &\leq \left(a^{1-\alpha} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{\infty} + a \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\alpha} (1 + \|f\|_{\infty}^2)^{\alpha/2} \exp \left\{ \alpha a \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{\infty} \right\} \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ a \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{\infty} \right\}, \\ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|_{\alpha} &\leq D^{1-\alpha} \|\nabla f\|_{\infty} \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\|_{\infty} + \|f\|_{\infty} \cdot \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|_{\alpha}, \end{aligned}$$

где D – диаметр Ω . Из этих неравенств с учетом $f = V_2/V_1$ и (12) вытекает (13). Предложение доказано.

4. Краевая задача для вектора скорости. Рассмотрим краевую задачу

$$\nu \Delta V + [\varphi, V] = 0, \quad x \in \Omega, \quad V|_{\Gamma} = V^0|_{\Gamma} \quad (19)$$

относительно вектор-функции V . Нам потребуются некоторые оценки для решений задачи (19).

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, $V^0 \in W_p^1(\Omega)$ ($p \geq 2$). Тогда в $W_p^1(\Omega)$ существует единственное решение V задачи (19). При этом справедливы оценки:

а) при $p = 2$

$$\|\nabla(V - V^0)\|_2 \leq \|\nabla V^0\|_2 \left(1 + \frac{\gamma}{\nu} \|\nabla \varphi\|_{\infty} \right), \quad \gamma = \min(a, b); \quad (20)$$

б) при $p > 2$

$$\min_{\Gamma} V_j^0 \leq V_j(x) \leq \max_{\Gamma} V_j^0, \quad j = 1, 2, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность решения задачи (19) в $W_p^1(\Omega)$ хорошо известно (см. [4], [7]). Оценка (20) вытекает из интегрального тождества

$$\nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} \{[\varphi, V]w - \nu \nabla V^0 \cdot \nabla w\} \, dx, \quad w \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \quad (22)$$

определяющего решение $V = u + V^0$ задачи (19) в $W_2^1(\Omega)$, если положить в нем $w = u$, оценить правую часть с помощью неравенства Гёльдера и воспользоваться неравенством Фридрихса $\|u\|_2 \leq \gamma \|\nabla u\|_2$ ($u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$).

Для доказательства неравенств (21) возьмем произвольные $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \Omega$ и подберем δ ($0 < 2\delta < \gamma$) так, чтобы

$$|V(y) - V^0(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - y| < \sqrt{2}\delta, \quad x \in \Gamma, \quad y \in \overline{\Omega}. \quad (23)$$

Положим $\Omega_\delta = (\delta, a - \delta) \times (\delta, b - \delta)$. Можно считать, что $x_0 \in \overline{\Omega}_\delta$. Обозначим через $V_h = V * \omega_h$ ($0 < h < \delta$) усреднение функции V стандартным ядром ω_h :

$$\begin{aligned} \omega_h(|x|) &= c_h \exp \left\{ -\frac{h^2}{h^2 - |x|^2} \right\} \quad \text{при} \quad |x| < h, \\ \omega_h &= 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq h, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \omega_h(|x|) \, dx = 1. \end{aligned}$$

Тогда для решения $V \in W_p^1(\Omega) \subset C_\alpha(\overline{\Omega})$ ($\alpha = 1 - 2/p$, $p > 2$) справедливо соотношение

$$\|V_h - V\|_{C(\overline{\Omega}_\delta)} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (24)$$

Положим в (22) $w = w_h$, где $w \in C_0^1(\Omega)$ и $\text{supp } w \subset \overline{\Omega}_\delta$. Учитывая, что $\nabla w_h = (\nabla w)_h$, после интегрирования по частям левой части (22), получим

$$\int_{\Omega} \{ \nu \Delta V_h + [\varphi, V]_h \} w \, dx = 0, \quad w \in C_0^1(\Omega).$$

Отсюда вытекает, что функция $V_h \in C^2(\overline{\Omega}_\delta)$ является классическим решением уравнения

$$\nu \Delta V_h(x) + [\varphi, V_h](x) = f_h(x), \quad x \in \Omega_\delta,$$

где $f_h = [\varphi, V_h] - [\varphi, V]_h \in C(\overline{\Omega})$. Следовательно, по принципу максимума

$$\begin{aligned} \min \left(-c \|(f_j)_h\|_{C(\overline{\Omega}_\delta)}, \min_{\Gamma_\delta} (V_j)_h \right) &\leq (V_j)_h(x) \leq \max \left(c \|(f_j)_h\|_{C(\overline{\Omega}_\delta)}, \max_{\Gamma_\delta} (V_j)_h \right), \\ x &\in \overline{\Omega}_\delta, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

где Γ_δ – граница области Ω_δ , $c > 0$ – постоянная, зависящая лишь от ν и любого из $\|\partial\varphi/\partial x_j\|_{C(\overline{\Omega})}$ ($j = 1, 2$). Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, согласно (24) получаем оценки

$$\min_{\Gamma_\delta} V_j \leq V_j(x) \leq \max_{\Gamma_\delta} V_j, \quad x \in \overline{\Omega}_\delta, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда, используя (23), получаем

$$\min_{\Gamma} V_j^0 - \varepsilon \leq V_j(x_0) \leq \max_{\Gamma} V_j^0 + \varepsilon.$$

Последние оценки в силу произвольности $x_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ приводят к неравенствам (21). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi, \varphi_j \in C^1(\overline{\Omega})$ ($j = 1, 2$), $V^0 \in W_p^2(\Omega)$ ($p \geq 2$). Тогда решение $V = V(\varphi, x)$ задачи (19) принадлежит классу $W_p^2(\Omega)$ и справедливы оценки

$$\|V(\varphi, \cdot)\|_{2,2} \leq \|V^0\|_{2,2} + c_2 \|\Delta V^0\|_2 + \frac{c_2}{\nu} \|\nabla V^0\|_2 \left(2 + \frac{\gamma}{\nu} \|\nabla \varphi\|_\infty\right) \|\nabla \varphi\|_\infty, \quad (25)$$

$$\|V(\varphi_1, \cdot) - V(\varphi_2, \cdot)\|_{2,2} \leq \frac{c_2}{\nu} \|\nabla V(\varphi_2, \cdot)\|_2 \left(1 + \frac{\gamma}{\nu} \|\nabla \varphi_1\|_\infty\right) \|\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)\|_\infty, \quad (26)$$

$$\|V(\varphi, \cdot)\|_{p,2} \leq c(1 + \|\nabla \varphi\|_\infty)^3, \quad (27)$$

где $c_2 = \|\Delta^{-1}\|$ – норма оператора, обратного к $\Delta: W_2^2 \cap \dot{W}_2^1 \rightarrow L_2$, а c зависит лишь от p, ν, Ω и $\|V^0\|_{p,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принадлежность решения $V = u + V^0$ к $W_p^2(\Omega)$ вытекает из [7]. Для доказательства оценки (25) запишем задачу (19) в виде

$$\Delta u = f, \quad u|_\Gamma = 0, \quad \text{где } f = -\Delta V^0 - \frac{1}{\nu}[\varphi, u + V^0], \quad (28)$$

и воспользуемся неравенством $\|u\|_{2,2} \leq c_2 \|f\|_2$. Оценивая $\|f\|_2$ по неравенству Гёльдера и используя (20), получим

$$\|u\|_{2,2} \leq c_2 \|\Delta V^0\|_2 + \frac{c_2}{\nu} \|\nabla V^0\|_2 \left(2 + \frac{\gamma}{\nu} \|\nabla \varphi\|_\infty\right) \|\nabla \varphi\|_\infty, \quad (29)$$

откуда следует (25).

Для доказательства (26) заметим, что разность $w = V(\varphi_1, \cdot) - V(\varphi_2, \cdot)$ – решение задачи

$$\Delta w = f_1, \quad w|_\Gamma = 0, \quad \text{где } f_1 = \frac{1}{\nu}[\varphi_2 - \varphi_1, V(\varphi_2, \cdot)] - \frac{1}{\nu}[\varphi_1, w].$$

Умножая это равенство на w , интегрируя затем по Ω и оценивая правую часть с использованием неравенства Фридрихса, находим, что

$$\|\nabla w\|_2 \leq \frac{\gamma}{\nu} \|\nabla V(\varphi_2, \cdot)\|_2 \cdot \|\nabla(\varphi_2 - \varphi_1)\|_\infty.$$

Используя это соотношение, оценим $\|f_1\|_2$ с помощью неравенства Гёльдера. Подставив полученную оценку в неравенство $\|w\|_{2,2} \leq c_2 \|f_1\|_2$, получим (26).

Для доказательства (27) воспользуемся неравенством $\|u\|_{p,2} \leq c_p \|f\|_p$, где u и f из (28). Тогда

$$\|u\|_{p,2} \leq c_p \|\Delta V^0\|_p + \frac{c_p}{\nu} (\|\nabla V^0\|_p + \|\nabla u\|_p) \|\nabla \varphi\|_\infty.$$

Выражение $\|\nabla u\|_p$ согласно вложению $W_2^2(\Omega) \subset W_p^1(\Omega)$ оценивается правой частью (29): $\|\nabla u\|_p \leq c'_p \|u\|_{2,2}$. Поэтому для $\|u\|_{p,2}$ и, следовательно, для $\|V\|_{p,2}$ справедливо неравенство (27). Лемма доказана.

Из (25), (26) вытекает непрерывность оператора $\varphi \mapsto V(\varphi, \cdot)$, $C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow W_2^2(\Omega)$, где $V(\varphi, x)$ – решение в $W_2^2(\Omega)$ задачи (19) с фиксированным $V^0 \in W_2^2(\Omega)$.

5. Существование решений задачи (2), (4), (6). Пусть $\varphi_0 \in C^1(\Gamma_1)$, $V^0 \in W_2^2(\Omega)$ и $V_1^0 > 0$ на Γ . Рассмотрим в $C^1(\overline{\Omega})$ оператор $A\varphi = \varphi_0(\xi_{V(\varphi, \cdot)}(0, x))$, где $V(\varphi, \cdot)$ – решение задачи (19), а ξ_V – интегральная кривая уравнения (8) (в котором $f = V_2(\varphi, \cdot)/V_1(\varphi, \cdot)$), проходящая через точку $x \in \overline{\Omega}$. Из предложения и леммы 2 вытекает, что

$$\|A\varphi\|_{C^1} \leq \|\varphi_0\|_\infty + \|\varphi'_0\|_\infty \frac{\sqrt{2} \max_\Gamma |V^0|}{\min_\Gamma V_1^0} \exp \left\{ \frac{2c_0 \sqrt{ab}}{\min_\Gamma V_1^0} \|V(\varphi, \cdot)\|_{2,2} \right\}.$$

Подставляя в это неравенство оценку (25) из леммы 3, получаем

$$\|A\varphi\|_{C^1} \leq c + d \exp\{\alpha t + \beta t^2\} = \psi(t), \quad t = \|\varphi\|_{C^1}. \quad (30)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} c &= \|\varphi_0\|_\infty, \quad d = \|\varphi'_0\|_\infty \frac{\sqrt{2} \max_\Gamma |V^0|}{\min_\Gamma V_1^0} \exp\{\sigma(\|V^0\|_{2,2} + c_2 \|\Delta V^0\|_2)\}, \\ \sigma &= \frac{2c_0 \sqrt{ab}}{\min_\Gamma V_1^0}, \quad \alpha = \sigma \frac{2c_2}{\nu} \|\nabla V^0\|_2, \quad \beta = \frac{\gamma}{2\nu} \alpha. \end{aligned} \quad (31)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $V^0 \in W_p^2(\Omega)$ ($p > 2$), $\varphi_0 \in C_\delta^1(\Gamma_1)$, выполнены условия (2) и

$$de^K \sqrt{\alpha^2 + 4\beta K} \leq 1, \quad K = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4c}{d\epsilon}} \right). \quad (32)$$

Тогда существует решение (φ, V) задачи (4), (6), причем $\varphi \in C_{\delta'}^1(\overline{\Omega})$, $V \in W_p^2(\Omega)$, $\delta' = \min(\delta, 1 - 2/p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ является неподвижной точкой оператора A , то согласно предложению и лемме 3 пара $(\varphi, V(\varphi, \cdot))$ – решение задачи (4), (6), причем $V = V(\varphi, \cdot) \in W_p^2(\Omega)$.

Пусть $t_0 > 0$ – корень уравнения $(\psi(t)t^{-1})' = 0$. Нетрудно показать, что

$$t_0 \leq t_1 \equiv \frac{1}{2\beta} (\sqrt{\alpha^2 + 4\beta K} - \alpha),$$

где K определено равенством (32). Если для c, d, α, β из (31) выполнено условие $\psi(t_0) \times t_0^{-1} \leq 1$, то существует корень R ($0 < R \leq t_0$) уравнения $\psi(t) = t$. Последнее условие вытекает из (32), так как

$$\psi(t_0)t_0^{-1} = d(\alpha + 2\beta t_0) \exp\{\alpha t_0 + \beta t_0^2\} \leq d(\alpha + 2\beta t_1) \exp\{\alpha t_1 + \beta t_1^2\} = de^K \sqrt{\alpha^2 + 4\beta K}.$$

Таким образом, согласно (30) оператор $A: C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow C^1(\overline{\Omega})$ отображает шар $\|\varphi\|_{C^1} \leq R$ в себя. Этот оператор непрерывен, что следует из непрерывности оператора $\varphi \mapsto V(\varphi, \cdot)$, $C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow W_2^2(\Omega)$ (лемма 3) и непрерывности оператора $V \mapsto \varphi(V, \cdot)$, $\mathcal{K}(\Omega) \rightarrow C^1(\overline{\Omega})$ (предложение). Покажем, что A действует из $C^1(\overline{\Omega})$ в $C_{\delta'}^1(\overline{\Omega})$ и ограничен.

Действительно, по лемме 3 оператор $\varphi \mapsto V(\varphi, \cdot)$, $C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow W_p^2(\Omega)$ ограничен. Если $p > 2$, то он ограничен из $C^1(\overline{\Omega})$ в $C_{\alpha'}^1(\overline{\Omega})$ ($\alpha' = 1 - 2/p$). Кроме того, по предложению оператор $V \mapsto \varphi(V, \cdot)$, $\mathcal{H}(\Omega) \cap C_{\alpha'}^1(\overline{\Omega}) \rightarrow C_{\delta'}^1(\overline{\Omega})$ ограничен, $\delta' = \min(\alpha', \delta)$.

В силу компактности вложения $C_{\delta'}^1(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$ A вполне непрерывен в $C^1(\overline{\Omega})$, и, следовательно, по теореме Шаудера в шаре $\|\varphi\|_{C^1} \leq R$ существует неподвижная точка φ оператора A . Очевидно, $\varphi \in C_{\delta'}^1(\overline{\Omega})$. Теорема доказана.

Пусть φ_0 имеет вид (5). Условие (32) с учетом (31) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \max_{\Gamma_1} \rho_0 V_1^0 &\leq e^{-K} \left(\alpha^2 + \frac{2\gamma}{\nu} K \alpha \right)^{-1/2} \frac{\min_{\Gamma} V_1^0}{\sqrt{2} \max_{\Gamma} |V^0|} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2c_0 \sqrt{ab}}{\min_{\Gamma} V_1^0} (\|V^0\|_{2,2} + c_2 \|\Delta V^0\|_2) \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{4c_0 c_2}{\nu} \sqrt{ab} \frac{\|\nabla V^0\|_2}{\min_{\Gamma} V_1^0}, \quad c_0 \leq \max \left(8, \frac{11}{b} \right), \\ c_2 &\leq (1 + \gamma^2 + \gamma^4)^{1/2}, \quad \gamma = \min(a, b), \quad K \leq \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{e\sqrt{2}}} \right). \end{aligned}$$

Возвращаясь к задаче (1), (2), из теоремы 1 согласно (3), (5) получаем, что при выполнении условий $V^0 \in W_p^2(\Omega)$ ($p > 2$), $\rho_0 \in C_{\delta}(\Gamma_1)$ и (33) существует решение (ρ, V) задачи (1), (2), причем $\rho \in C_{\delta'}(\overline{\Omega})$, $V \in W_p^2(\Omega)$.

6. Существование решений задачи (1) в классах Гёльдера. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta V = F, \quad x \in \Omega, \quad V|_{\Gamma} = V^0, \quad (34)$$

где $F \in C_{\delta}(\overline{\Omega})$ ($0 < \delta < 1$), а функция V^0 на Γ удовлетворяет условиям

$$V^0 \in C(\Gamma), \quad V^0|_{\Gamma_j} \in C_{\delta}^2(\Gamma_j), \quad j = \overline{1, 4}. \quad (35)$$

Известно [8], что для существования в $C_{\delta}^2(\overline{\Omega})$ решения задачи (34) необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta V^0(s_j) = F(s_j), \quad j = \overline{1, 4}. \quad (36)$$

Здесь s_j – вершины прямоугольника Ω , занумерованные в порядке положительного обхода на Γ , $s_1 = (0, b)$. Отсюда, в частности, вытекает, что функция V^0 , удовлетворяющая условиям (35) и

$$\Delta V^0(s_j) = 0, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (37)$$

однозначно продолжается до гармонической в Ω функции из $C_{\delta}^2(\overline{\Omega})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть вектор-функция V^0 удовлетворяет условиям (35), (37) и, следовательно, однозначно продолжается в Ω до функции $V^0 \in C_\delta^2(\overline{\Omega})$, $\Delta V^0 = 0$ (в Ω). Пусть, кроме того, для функций $\rho_0 \in C_\delta^1(\Gamma_1)$ и V^0 выполнены условия (2), (33) и условия согласования

$$\begin{aligned} \rho_0(s_j) \frac{\partial V_1^0}{\partial x_1}(s_j) &= 0, \quad j = 1, 2, \\ \rho_0(s_2) \frac{\partial V_1^0}{\partial x_1}(s_3) &= \rho_0(s_1) \frac{\partial V_1^0}{\partial x_1}(s_4) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда существует классическое решение (ρ, V) задачи (1) такое, что $\rho \in C_\delta^1(\overline{\Omega})$, $V \in C_\delta^2(\overline{\Omega})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу (4), (6), где φ_0 определено равенством (5). Поскольку $\varphi_0 \in C_\delta^2(\Gamma_1)$, $V^0 \in C_\delta^2(\overline{\Omega})$, то из теоремы 1 вытекает существование решения (φ, V) задачи (4), (6), причем $(\varphi, V) \in C_\beta^1(\overline{\Omega}) \times C_\beta^1(\overline{\Omega})$ ($0 < \beta < 1$ любое). Перепишем задачу (19) для вектор-функции V в виде (34), где $F = -\frac{1}{\nu}[\varphi, V] \in C_\beta(\overline{\Omega})$. Покажем, что для задачи (34) с данным F выполнены условия (36), которые в силу $\Delta V^0(s_j) = 0$ ($j = 1, 2$) сводятся к равенствам $F(s_j) = 0$ ($j = \overline{1, 4}$).

Так как $V_2|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0$, то

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1}(s_j) = 0 \quad \text{и} \quad f(s_j) = 0,$$

где $f = V_2/V_1$. Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(s_j) = -f(s_j) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(s_j) = 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Отсюда вытекает, что $F_2(s_j) = 0$ ($j = \overline{1, 4}$). Далее, из равенств (5), (15)–(17) и условий согласования (38) получаем

$$\begin{aligned} F_1(s_j) &= \frac{1}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(s_j) \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(s_j) = \frac{1}{\nu} \rho_0(s_j) V_1^0(s_j) \frac{\partial V_1^0}{\partial x_1}(s_j) = 0, \quad j = 1, 2, \\ F_1(s_3) &= \frac{1}{\nu} \rho_0(s_2) V_1^0(s_2) \frac{\partial V_1^0}{\partial x_1}(s_3) \exp \left\{ - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} ds \right\} = 0, \\ F_1(s_4) &= \frac{1}{\nu} \rho_0(s_1) V_1^0(s_1) \frac{\partial V_1^0}{\partial x_1}(s_4) \exp \left\{ - \int_{\Gamma_4} \frac{\partial f}{\partial x_2} ds \right\} = 0. \end{aligned}$$

Итак, условия (36) выполнены. Следовательно, из однозначной разрешимости задачи (34) получаем $V \in C_\delta^2(\overline{\Omega})$. Отсюда следует, что $f \in C_\delta^2(\overline{\Omega})$. Используя это обстоятельство, из (8), (15) заключаем, что $\xi_V(0, x) \in C_\delta^2(\overline{\Omega})$. Последнее влечет, что $\varphi(x) = \varphi_0(\xi_V(0, x)) \in C_\delta^2(\overline{\Omega})$ в силу соответствующей гладкости ρ_0, V^0 на Γ_1 . Следовательно,

$$\rho = \frac{1}{V_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \in C_\delta^1(\overline{\Omega}).$$

Теорема доказана.

В теореме 2 условие (33) на данные задачи можно конкретизировать, используя оценки для производных функции V^0 , полученные в [8].

Пусть функции $\gamma_j \in C^1[0, a]$ ($j = 1, 2$) являются характеристиками уравнения $(V^0, \nabla \varphi) = 0$ и $\gamma_1 < \gamma_2$. Положим $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0, a), x_2 \in (\gamma_1(x_1), \gamma_2(x_2))\}$. Аналогично может быть исследована задача (1) в криволинейной области Ω_1 с условием $V_1^0|_\Gamma > 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кажихов А. В. О краевых задачах для уравнений Бюргерса сжимаемой жидкости в областях с подвижными границами // Динамика сплошной среды. Вып. 26. Новосибирск, 1976. С. 60–76.
- [2] Белов С. Я. Разрешимость в целом задачи протекания для уравнений Бюргерса сжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. Вып. 50. Новосибирск, 1981. С. 3–14.
- [3] Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
- [4] Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
- [5] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МГУ, 1984.
- [6] Ильин В. П. К теоремам вложения // Тр. МИАН. 1959. Т. 53. С. 359–386.
- [7] Кошелев А. И. Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем // УМН. 1958. Т. 13. № 4. С. 29–88.
- [8] Волков Е. А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике // Тр. МИАН. 1965. Т. 77. С. 87–112.

Дальневосточный государственный университет, г. Владивосток

Поступило

21.03.95

Исправленный вариант

27.02.96