Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, О возможности обобщения теорем “об исправлении”, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 937–939

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1684>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 04:19:59

О ВОЗМОЖНОСТИ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМ “ОБ ИСПРАВЛЕНИИ”

В. С. Кашин

В работе автора [1] был установлен аналог известной теоремы Д. Е. Меньшова “об исправлении” для произвольных дискретных полных ортонормированных систем. В [2] при изучении другой задачи теории ортогональных рядов рассмотрены свойства мажоранты частных сумм ортогонального ряда относительно некоторого семейства подмножеств. Точнее, пусть I – произвольное множество индексов с числом элементов $\#I < \infty$ и Ω – семейство подмножеств I . Далее, пусть $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – ортонормированная система функций, заданных на пространстве с мерой (X, Σ, μ) , $\mu(X) = 1$, и “занумерованных” элементами из I . Для ортогонального разложения

$$f(x) \sim \sum c_\alpha \varphi_\alpha(x)$$

определим “ Ω -мажоранту частных сумм”:

$$S_\Omega^* f(x) = \sup_{\Lambda \in \Omega} \left| \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha \varphi_\alpha(x) \right|. \quad (1)$$

В “обычном” случае $I = I_N \equiv \{1, 2, \dots, N\}$ и

$$\Omega = \{I_k : 1 \leq k \leq N\}.$$

Для d -кратных ортогональных рядов рассмотрение мажоранты прямоугольных частных сумм сводится к (1), если $I = (I_N)^d$, а

$$\Omega = \{I_{k_1} \times \dots \times I_{k_d} : 1 \leq k_s \leq N, s = 1, 2, \dots, d\}.$$

В этой заметке, дополняющей работу [1], при некоторых условиях на семейство Ω и систему $\{\varphi_\alpha\}$ установлена возможность исправления произвольной ограниченной функции f до функции с ограниченной Ω -мажорантой. Ниже мы рассматриваем только конечные ортонормированные системы $\Phi_N = \{\varphi_k^N(x)\}_{k=1}^N$, $N = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие следующим трем условиям:

- i) $\|\varphi_k^N(x)\|_{L^\infty(X, \mu)} \leq M_1, 1 \leq k \leq N, N = 1, 2, \dots$;
- ii) для $N = 1, 2, \dots$ существует набор точек $\{x_j\}_{j=1}^N \subset X$ такой, что матрица $\{N^{-1/2} \varphi_k^N(x_j)\}_{k,j=1}^N$ – ортонормированная;
- iii) для $N = 1, 2, \dots$ существует набор точек $\{z_j\}_{j=1}^Q$ с $Q \leq M_2 N$ такой, что для любого полинома

$$P = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k^N(x) \quad (2)$$

имеет место неравенство

$$\|P\|_{L^\infty(X, \mu)} \leq M_3 \max_{1 \leq j \leq Q} |P(z_j)|$$

(здесь и далее $M_i, i = 1, 2, \dots$, – абсолютные постоянные).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00094 и № 96-15-96102, и фонда INTAS, грант № 93-1376.

Отметим, что условие iii) – свойство *квазиматричности* (или *квазидискретности*) систем Φ_N , введенное в [3], – естественно возникает в ряде вопросов анализа. Кроме того, отметим, что условия i)–iii) очевидно выполнены в случае, когда при $N = 1, 2, \dots$ Φ_N – равномерно ограниченные дискретные системы (т.е. $X = (0, 1)$ и $\varphi_k^N(x) = \text{const}$ при $x \in ((i-1)/N, 1/N)$, $1 \leq i \leq N$).

Ниже через $P_N(x, \{y_k\}_{k=1}^N)$ мы обозначаем (единственный в силу ii)) полином вида (2), для которого

$$P(x_k) = y_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Введем теперь ограничение на “сложность” последовательности семейств Ω_N подмножеств отрезков натурального ряда I_N , $N = 1, 2, \dots$. Именно, предположим, что

- *) для некоторого $\rho < 1$ при $N = 1, 2, \dots$ найдутся семейства Δ_s , $\emptyset \in \Delta_s$, $s = 1, \dots, s_0$, с $\#\Delta_s \leq M_4 \exp \exp s^\rho$ такие, что каждое множество $\omega \in \Omega_N$ допускает представление в виде

$$\omega = \bigcup_{s=1}^{s_0} E_s, \quad E_s \in \Delta_s, \quad \#E_s \leq \frac{N}{2^s}, \quad E_s \cap E_{s'} = \emptyset \quad \text{при } s \neq s'.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Близкие к *) условия на семейства множеств Ω_N играют важную роль в теории коммуникационной сложности (см., например, [4]).

Ниже под *исправлением полинома вида* (2) мы понимаем замену его на полином $\tilde{P}$, отличный от P только в малой доле точек x_k , $1 \leq k \leq N$. Ясно, что для дискретных систем такое исправление есть изменение функции на множестве малой меры.

Метод работы [1] позволяет установить следующий результат

ТЕОРЕМА. Пусть при $N = 1, 2, \dots$ заданы ортонормированные системы $\Phi_N = \{\varphi_k^N(x)\}_{k=1}^N$, причем выполнены условия i)–iii), и семейства Ω_N подмножеств I_N со свойством *). Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная C_ε , зависящая от ε , а также от ρ и M_i , $1 \leq i \leq 4$, такая, что при $N = 1, 2, \dots$ для любого набора $\{y_j\}_{j=1}^N$ с $|y_j| \leq 1$, $1 \leq j \leq N$, найдется набор $\{\tilde{y}_j\}_{j=1}^N$ такой, что

$$\#\{j : y_j \neq \tilde{y}_j\} \leq \varepsilon N$$

и

$$\|S_\Omega^* P(x, \{\tilde{y}_j\})\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Метод доказательства теоремы позволяет рассматривать и мажоранты, в определении которых допускается зависимость семейства подмножеств Ω от точки x (т.е. $\Omega = \Omega(x)$).

Как отмечалось в [2], результаты об оценках мажорант S_Ω^* применимы к исследованию мажоранты прямоугольных частных сумм кратного ортогонального ряда. В частности, пусть при $d = 1, 2, \dots$ и $N = 1, 2, \dots$

$$F_{d,N} = \{\bar{j} = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d : -N \leq j_s \leq N, s = 1, \dots, d\}$$

и

$$\Gamma_{d,N} = \left\{ z_{\bar{j}} = \left(\frac{2\pi j_1}{2N+1}, \dots, \frac{2\pi j_d}{2N+1} \right), \bar{j} = (j_1, \dots, j_d) \in F_{d,N} \right\}.$$

Обозначим через $T(x, \{y_{\bar{j}}\}_{\bar{j} \in F_{d,N}})$ тригонометрический полином t степени $\leq N$ по каждой из d переменных, для которого $t(z_{\bar{j}}) = y_{\bar{j}}$, если $z_{\bar{j}} \in \Gamma_{d,N}$. Из теоремы непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Для $\varepsilon > 0$ и $d = 2, 3, \dots$ существует постоянная $C_{\varepsilon, d}$ такая, что для каждого набора $\{y_{\bar{j}}\}$ с $|y_{\bar{j}}| \leq 1$, $\bar{j} \in F_{d, N}$, найдется набор $\{\tilde{y}_{\bar{j}}\}$, $\bar{j} \in F_{d, N}$, для которого

$$\#\{\bar{j} \in F_{d, N} : y_{\bar{j}} \neq \tilde{y}_{\bar{j}}\} \leq \varepsilon(2N + 1)^d$$

и

$$\max_{\bar{T}} \|S_{\bar{T}}(T(x, \{\tilde{y}_{\bar{j}}\}))\|_{\infty} \leq C_{\varepsilon, d}, \quad (3)$$

где

$$S_{\bar{T}}(f) = \sum_{\bar{k} : -r_s \leq k_s \leq r_s} \hat{f}(k) e^{i\bar{k}x}$$

– прямоугольная частная сумма тригонометрического ряда Фурье функции d переменных $f(x)$, а максимум в (3) берется по всем наборам $r = \{r_s\} \in \mathbb{Z}^d$ с $0 \leq r_s \leq N$ при $s = 1, \dots, d$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $d = 1$ утверждение следствия было доказано в [5].

Автор признателен А. А. Разборову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашин Б. С. // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 6. С. 67–74.
2. Кашин Б. С., Шарек С. Й. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 218–230.
3. Кашин Б. С. О тригонометрических полиномах с коэффициентами по модулю равными нулю или единице // Теория функций и приближений. Ч. 1. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1987. С. 19–30.
4. Kushilevitz E., Nisan N. Communication Complexity. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
5. Кашин Б. С. // Сообщ. АН ГССР. 1979. Т. 93. № 2. С. 281–284.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kashin@ipsun.ras.ru

Поступило
30.09.97