Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, А. Э. Рууге, Об одном симметрическом представлении уравнения для квантового хаоса, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 940–941

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:34:15

ОБ ОДНОМ СИММЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КВАНТОВОГО ХАОСА

В. П. Маслов, А. Э. Рууге

В работе [1] предъявляется уравнение для квантового хаоса вида

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \left(1 + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \lambda \varphi \pmod{h^2}, \quad \varphi \in S_h, \quad (1)$$

на гладком многообразии

$$M = \{(p, x) \in \mathbb{R}^{2k} \mid H(p, x) = E^0\}, \quad E^0 = \text{const},$$

где $H : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}$, $|\nabla H|_M \neq 0$; $h > 0$, $h \rightarrow 0$; S_h – класс функций

$$S_h = \left\{ \varphi(\alpha, h) \mid \varphi(\alpha, h) = \sum_{r=1}^N \varphi_r(\alpha) h^r, \varphi \in C^\infty(M), N < \infty \right\};$$

$\partial/\partial\tau$ – ограничение гамильтонова векторного поля

$$\frac{d}{d\tau} = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right)$$

на M ; $\partial/\partial z$ – ограничение на M коммутатора $d/d\tau$ с произвольным векторным полем d/dE в окрестности M , удовлетворяющим условию $dH/dE = 1$ (например, $d/dE = (1/|\nabla H|^2) \cdot (\nabla H, \nabla)$):

$$\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{d}{d\tau}, \frac{d}{dE} \right] \Big|_M.$$

Уравнение (1) имеет следующий смысл. Рассмотрим квантовомеханическую систему с k степенями свободы, гамильтониан $\hat{H}$ которой имеет вид

$$\hat{H} = H \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\omega}{x} \right).$$

Оператор $\hat{H}$ является инфинитезимальным генератором унитарной группы, определяющей динамику данной системы. Если гамильтонов фазовый поток, порожденный $H(p, x)$, является эргодическим на M , то указанная динамика называется *квантовым хаосом*. Предположим, что спектр $\hat{H}$ дискретен в некоторой окрестности $(E^0 - \delta, E^0 + \delta)$, $\delta = \text{const}$. В этом случае значения λ , определяемые из (1), равны с точностью $O(h^3)$ разностям собственных значений E_n оператора $\hat{H}$, принадлежащих одной серии [2] и лежащих вблизи уровня E^0 :

$$E_n - E_m = h\lambda + O(h^3), \quad E_n, E_m \rightarrow E^0, \quad h \rightarrow 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS, грант № 94-2763.

Строгая формулировка соответствующей теоремы приведена в [1].

Определим на многообразии M инвариантную относительно векторного поля $\partial/\partial\tau$ меру $d\nu$ при помощи соотношения

$$\int \varphi|_M d\nu = \int \delta(H(p, x) - E^0) \varphi(p, x) dp dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2k}).$$

Заметим, что в случае, когда фазовый поток $H(p, x)$ эргодичен на M , такая мера определена однозначно с точностью до произвольного постоянного множителя.

Определим на пространстве гладких функций на M скалярное произведение

$$(\varphi, \Phi) = \int \varphi^* \Phi d\nu, \quad \varphi, \Phi \in C^\infty(M). \quad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Векторное поле $\partial/\partial z$ представимо в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} = - \left(\frac{d}{dE}^* \cdot 1 \right) \Big|_M \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial w},$$

где $\partial/\partial w$ удовлетворяет условию

$$\left(\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}, \Phi \right);$$

$(d/dE)^*$ – оператор, сопряженный к d/dE относительно канонической меры $dp dx$.

Пусть φ и λ удовлетворяют (1). Рассмотрим преобразование

$$\psi = \left(1 + \frac{ih}{4} \frac{\partial}{\partial w} \right) \varphi.$$

Заметим, что $\psi \in S_h$, при этом

$$\varphi = \left(1 - \frac{ih}{4} \frac{\partial}{\partial w} \right) \psi \pmod{h^2}.$$

Из (1) вытекает следующее соотношение на ψ :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}\psi &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{d}{dE}^* \cdot 1 \right) \Big|_M \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \right) \right\} \psi \\ &= \lambda \psi \pmod{h^2}, \quad \psi \in S_h. \end{aligned} \quad (3)$$

Соотношения (1) и (3) эквивалентны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ симметричен относительно скалярного произведения (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maslov V. P. // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. №3. P. 377–392.
2. Maslov V. P. // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. №4. P. 529–534.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

31.10.96

Исправленный вариант

27.12.96