Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Минкин, Равносходимость. Обобщение теоремы
Тамаркина–Стоуна, *Матем. заметки*, 1997, том 62, вы-
пуск 6, 942–944

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 07:05:56

РАВНОСХОДИМОСТЬ.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ТАМАРКИНА–СТОУНА

А. М. Минкин

Пусть $n = 2q$ и L – дифференциальный оператор в $L^2(0, 1)$, $Ly = l(y)$,

$$l(y) \equiv D^n y + p_2(x)D^{n-2}y + \dots + p_n(x)y, \quad D = -i \frac{d}{dx}, \quad (1)$$

область определения которого D_L задана n линейно независимыми нормализованными краевыми условиями

$$U_\nu(y) \equiv b_\nu^0 D^{\sigma_\nu} y(0) + b_\nu^1 D^{\sigma_\nu} y(1) + \dots = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1. \quad (2)$$

При этом требуем $\sigma_\nu \leq \sigma_{\nu+1}$, $\sigma_\nu < \sigma_{\nu+2}$, а многоточием в (2) заменяем слагаемые с производными в 0 и 1 порядка $< \sigma_\nu$. Положим

$$B_t^i = [b_\nu^i \varepsilon_t^\nu]_{\nu=0}^{n-1}, \quad i = 0, 1, \quad \varepsilon_t = \exp\left(\frac{2\pi i t}{n}\right).$$

Пусть

$$\Theta(b^0, b^1) = \begin{cases} B_t^0, & t = 0, \dots, q-1, \\ B_t^1, & t = q, \dots, n-1. \end{cases}$$

Аналогично определяется $\Theta(b^1, b^0)$ с очевидной перестановкой верхних индексов. Потребуем регулярности краевой задачи (1), (2) по Биркгофу: $\Theta(b^0, b^1) \neq 0$ (кратко, $L \in (R)$).

Пусть $S_r(f, L)$ – частная сумма ряда по собственным и присоединенным функциям (СПФ), отвечающим собственным значениям λ_m , $|\lambda_m| \leq r^n$. Введем частную сумму тригонометрического ряда Фурье функции f , продолженной нулем вне $[0, 1]$:

$$\sigma_r(f)(x) = \frac{1}{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin r(x-\xi)}{x-\xi} f(\xi) d\xi.$$

Тамаркин [1] для любой фиксированной точки x , $x \in (0, 1)$, и Стоун [2] равномерно на любом компакте $[\delta, 1-\delta]$, $0 < \delta < 1/2$, установили равномерность $S_r(f)$ и $\sigma_r(f)$ при $r \rightarrow \infty$ так, что

$$\inf_m \text{dist}(r, |\lambda_m|^{1/n}) > 0. \quad (3)$$

Однако, данный результат *не решает* проблему сходимости разложений по СПФ, так как вопрос о равномерности *на всем интервале* остается открытым. В 1975 году А. П. Хромов решил его для $n = 2$ [3], но примененные им рассуждения не переносятся на высшие порядки. Позднее Э. Вермут [4] исследовал вопрос о равномерности на $[0, 1]$ разложений по СПФ двух регулярных по Биркгофу операторов сразу на *всем* классе функций из $L^p(0, 1)$. Однако, это совершенно другой вопрос, и в этом случае ответ состоит в том, что у таких операторов *старшие коэффициенты в краевых условиях совпадают*.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566.

В настоящей заметке равносходимость установлена для операторов четного порядка > 2 и произвольной заданной функции $f \in C(0, 1)$, удовлетворяющей краевым условиям нулевого порядка, т.е. тем условиям в (2), которые не содержат производных. Для нормализованных условий таких может быть не более двух.

Другими словами, мы *a priori* требуем, чтобы

$$f \in \text{clos}_{C(0,1)}(D_L). \quad (4)$$

Введем обозначение

$$\alpha_{tk} = \alpha_{tk}(L) = (2\pi)^{-1}(-1)^{1-h}\varepsilon_t |\Theta(b^0, b^1) \leftarrow_k B_t^h| / \Theta(b^0, b^1),$$

причем

$$h = \begin{cases} 1 & \text{при } t < q, \\ 0 & \text{при } t \geq q, \end{cases}$$

а $|\Theta \leftarrow_k A|$ означает подстановку вектора A вместо k -го столбца определителя Θ . При этом номер столбца считаем равным нижнему индексу t у стоящего в нем вектора B_t^0 или B_t^1 . Положим

$$f_0(\xi) = f(\xi) - P(\xi), \quad P(\xi) = \xi f(1) + (1 - \xi)f(0),$$

$$f_0^\#(\xi) := f_0(1 - \xi), \quad \tilde{f}(\xi) \equiv \begin{cases} f(0), & \xi < 0, \\ f(\xi), & 0 \leq \xi \leq 1, \\ f(1), & \xi > 1, \end{cases}$$

$$\Phi_k(\xi) = \Phi_k(\xi, L) = \alpha_{qk} f_0(\xi) + \alpha_{0k} f_0^\#(\xi),$$

$$\Psi_k(\xi) = \Psi_k(\xi, L) = \alpha_{n-1,k} f_0(\xi) + \alpha_{q-1,k} f_0^\#(\xi)$$

и продолжим эти функции нулем вне $[0, 1]$. Введем $V_k = V_k(\xi, L)$, где

$$V_k = \Phi_k(\xi) - \varepsilon_1 \Psi_{k-1}(-\xi), \quad k = 1, \dots, q-1, q+1, \dots, n-1,$$

$$V_0 = \Phi_0, \quad V_q = \Phi_q, \quad V_n = -\varepsilon_1 \Psi_{q-1}(-\xi), \quad V_{n+1} = -\varepsilon_1 \Psi_{n-1}(-\xi)$$

и $\nu_0 = \nu_q = \nu_n = \nu_{n+1} = 0$, $\nu_k = |\sin(2\pi k/n)|$ для остальных k . Определим интегральные операторы из $L(-1, 1)$ в $C[0, 1]$:

$$I_r(g)(x) := \int \exp(ir\xi)g(\xi) \frac{d\xi}{\xi}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad g \in L(-1, 1), \quad (5)$$

$$I_r^\pm(g)(x) := \int (x + \xi)^{-1} \exp(\pm ir\xi)g(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6)$$

причем в (5) интегрирование проводится по $\xi \in [-1, 1]$, $|\xi| \geq \max(x, r^{-1})$, а в (6) – по отрезку $[r^{-1}, 1]$. Условимся, что ниже $\|\cdot\|$ означает норму в $C(0, 1)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L \in (R)$ и выполнены условия (3), (4). Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f) - \sigma_r(\tilde{f})\| = 0$$

в том и только том случае, когда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\exp(-r\nu_k x)I_r(V_k)\| = 0, \quad k = 0, \dots, n+1. \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если справедливо соотношение

$$\text{span}(\Phi_0, \Phi_q) = \text{span}(\Psi_{q-1}, \Psi_{n-1}) = \text{span}(f_0, f_0^\#),$$

то в теореме 1 можно заменить (7) на

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|I_r^\pm(g)\| = 0, \quad g = f_0, f_0^\#. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим два дифференциальных оператора $L_1, L_2 \in (R)$ порядка $n = 2q$. Свяжем с ними функции

$$\varphi_k = \Phi_k(\cdot, L_1) - \Phi_k(\cdot, L_2), \quad \psi_k = \Psi_k(\cdot, L_1) - \Psi_k(\cdot, L_2), \quad v_k = V_k(\cdot, L_1) - V_k(\cdot, L_2).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть условия (3), (4) выполнены для обоих операторов $L_1, L_2 \in (R)$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, L_1) - S_r(f, L_2)\| = 0$$

в том и только том случае, когда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\exp(-r\nu_k x) I_r(v_k)\| = 0, \quad k = 0, \dots, n+1. \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если справедливо соотношение

$$\text{span}(\varphi_0, \varphi_q) = \text{span}(\psi_{q-1}, \psi_{n-1}) = \text{span}(f_0, f_0^\#),$$

то в теореме 2 можно заменить (9) на (8).

Недавно Г.В. Радзиевский подробно исследовал сходимость разложений по собственным функциям регулярных краевых задач для дифференциальных и функционально-дифференциальных операторов в метрике $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$ [5], [6]. Ответ получен им в терминах подходящих модулей непрерывности либо K -функционалов Петре. Отметим, что при этом приходится использовать различные продолжения разлагаемой функции за пределы основного интервала. Скажем, если имеется только одно условие нулевого порядка после нормировки краевых условий, то используется периодическое в среднем продолжение.

Ранее для самосопряженных краевых задач второго порядка с весом в $L^2(0, \pi)$ исчерпывающее исследование различных продолжений функции вне $(0, \pi)$ (шесть видов), порожденных ими модулей непрерывности, средних Стеклова и неравенства Джексона для таких задач было проведено Н.П. Кушковым [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tamarkin J. D. // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1912. V. 34. P. 345–382.
2. Stone M. H. // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. V. 28. P. 695–761.
3. Хромов А. П. // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Вып. 5. Ч. II. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. С. 3–20.
4. Wermuth E. Konvergenzuntersuchungen bei Eigenfunktionsentwicklungen zu Randeigenwertproblemen n -ter Ordnung mit parameterabhängigen Randbedingungen. Ph. D. Aachen: RWTH, 1984.
5. Радзиевский Г. В. // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 3. С. 87–90.
6. Radzievskii G. V. // Some Problems of the Modern Theory of Differential Equations. Preprint № 94/29. Kiev: Inst. Math. Ukr. Nat. Acad. Sci., 1994. P. 14–27.
7. Кушцов Н. П. // Исследования по дифференциальным уравнениям и теории функций. Вып. 3. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1971. С. 32–52.