Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Нурсултанов, О нижней оценке мультипликатора преобразования Фурье из $M(L_p \rightarrow L_q)$, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 945–949

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1687>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 10:25:30

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ИЗ $M(L_p \rightarrow L_q)$

Е. Д. Нурсултанов

Пусть F, F^{-1} — прямое и обратное преобразования Фурье в $\mathbb{R}^n$. Функцию u назовем *мультипликатором преобразования Фурье* из функционального пространства Лоренца $L_{pr}(\mathbb{R}^n)$ в пространство Лоренца $L_{qs}(\mathbb{R}^n)$, если оператор $T_u(f) = F^{-1}uFf$ является ограниченным из пространства $L_{pr}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{qs}(\mathbb{R}^n)$. Совокупность всех мультипликаторов из L_{pr} в L_{qs} обозначим через $M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})$. Данное множество является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\varphi\|_{M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})} = \sup_{\|f\|_{L_{pr}} \neq 0} \frac{\|T_u(f)\|_{L_{qs}}}{\|f\|_{L_{pr}}}.$$

В [1] доказана следующая

ТЕОРЕМА ХЁРМАНДЕРА. Пусть $1 < p < 2 \leq q < \infty$, $1/r = 1/p - 1/q$, тогда $L_{r\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_q(\mathbb{R}^n))$, т.е.

$$\|\varphi\|_{M(L_p \rightarrow L_q)} \leq c \sup_{e \in E} \frac{1}{|e|^{1/p' + 1/q}} \int_e |\varphi(x)| dx.$$

Здесь E — множество всех компактов e с положительной мерой: $|e| > 0$, $L_{p\infty}$ — пространство Лоренца. Из [2] следует, что если $s \geq r$, то $L_{r\infty} \hookrightarrow M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})$, где параметры p, q, r удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме Хёрмандера. Целью данной работы является получение нижних оценок для $\varphi \in M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})$.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Будем писать $a \leq b$, если $a_j \leq b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ называется *отрезком в $\mathbb{R}^n$* . Множество вида

$$Q = \bigcup_{0 \leq k \leq N-1} ([a, b] + kh), \quad (1)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{N}^n, kh = (k_1 h_1, \dots, k_n h_n), h_j > b_j - a_j, j = 1, 2, \dots, n$, назовем *гармоническим отрезком в $\mathbb{R}^n$* . Очевидно, что всякий отрезок в $\mathbb{R}^n$ является гармоническим отрезком.

Сформулируем основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА. Пусть $1 < p < 2 \leq q < \infty, 1 \leq r, s \leq \infty$, E_0 — множество всех гармонических отрезков положительной меры в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi \in M(L_p \rightarrow L_q)$ имеет место неравенство

$$\sup_{e \in E_0} \frac{1}{|e|^{1/p' + 1/q}} \int_e \varphi(x) dx \leq c \|\varphi\|_{M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})}. \quad (2)$$

В частности,

$$\sup_{e \in E_0} \frac{1}{|e|^{1/p' + 1/q}} \int_e \varphi(x) dx \leq c \|\varphi\|_{M(L_p \rightarrow L_q)}.$$

Введем определение правильного гармонического отрезка. Гармонический отрезок Q (см. (1)) назовем *правильным*, если для любого $j = 1, 2, \dots, n$ число $d_j = h_j / (b_j - a_j)$ является натуральным ($d_j \in \mathbb{N}$).

ЛЕММА. Пусть $0 < \beta < 1$, E_1 – множество всех правильных гармонических отрезков в $\mathbb{R}^n$, E_0 – множество всех гармонических отрезков в $\mathbb{R}^n$. Если для неотрицательной функции φ имеет место

$$\sup_{e \in E_1} \frac{1}{|e|^\beta} \left| \int_e \varphi(x) dx \right| < +\infty,$$

то

$$\sup_{e \in E_0} \frac{1}{|e|^\beta} \int_e \varphi(x) dx \leq 2^{\beta n} \sup_{e \in E_1} \frac{1}{|e|^\beta} \int_e \varphi(x) dx. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – произвольный гармонический отрезок из E_0 (см. (1)). Если

$$b'_j = b_j + \frac{\{h_j/(b_j - a_j)\}}{[h_j/(b_j - a_j)]}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $\{x\}$, $[x]$ – соответственно дробная и целая части числа x . Тогда множество

$$Q' = \bigcup_{0 \leq k \leq N-1} ([a, b'] + hk)$$

является правильным гармоническим отрезком таким, что $Q \subset Q'$ и $|Q'| \leq 2^n |Q|$. Из свойства неотрицательности функции φ имеем

$$\frac{1}{|Q|^\beta} \int_Q \varphi(x) dx \leq 2^{\beta n} \frac{1}{|Q'|^\beta} \int_{Q'} \varphi(x) dx,$$

откуда, учитывая произвольность выбора Q из E_0 , получим (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Согласно утверждению леммы для доказательства теоремы достаточно установить неравенство

$$c \|\varphi\|_{M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})} \geq \sup_{e \in E_1} \frac{1}{|e|^{1/p' + 1/q}} \int_e \varphi(x) dx, \quad (4)$$

где E_1 – множество всех правильных гармонических отрезков в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Q – произвольный элемент E_1 , тогда он имеет вид

$$Q = \bigcup_{0 \leq k \leq N-1} ([c, d] + kh),$$

где $[c, d] = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$, $N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{N}^n$, $kh = (k_1 h_1, \dots, k_n h_n)$, $h_j/(d_j - c_j) \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$. Данному правильному гармоническому отрезку сопоставим правильный гармонический отрезок

$$D = \bigcup_{1 \leq k \leq M-1} ([0, \delta] + k\eta), \quad (5)$$

где

$$M_j = \frac{h_j}{d_j - c_j}, \quad \eta_j = \frac{\pi}{h_j}, \quad \delta_j = \frac{\pi}{N_j h_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Из определения класса $M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})$ имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})} &= \sup_{\|f\|_{L_{pr}}=1} \|F^{-1}\varphi F f\|_{L_{qs}} = \sup_{\|g\|_{L_{q's'}=1}} \sup_{\|f\|_{L_{pr}}=1} \int_{\mathbb{R}^n} F^{-1}\varphi F f(y) \overline{g}(y) dy \\ &\geq \sup_{\substack{|e|>0 \\ |w|>0}} \frac{1}{|e|^{1/q'}} \frac{1}{|w|^{1/p}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \int_e e^{ixy} dy \int_w e^{-ixz} dz \right| \\ &\geq \frac{1}{|D|^{1/q'+1/p}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+c) \left| \int_D e^{ixy} dy \right|^2 dx, \end{aligned}$$

где $c = (c_1, \dots, c_n)$.

Учитывая представление (5) гармонического отрезка D , имеем

$$\|\varphi\|_{M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})} \geq \frac{1}{|D|^{1/q'+1/p}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+c) \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin \frac{\delta_j x_j}{2} \sin \frac{M_j \eta_j x_j}{2}}{\frac{x_j}{2} \sin \frac{\eta_j x_j}{2}} \right)^2 dx.$$

Сделаем замену $\delta_j x_j/2$ на x_j , $j = 1, \dots, n$. Используя неотрицательность функции φ , получим

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})} &\geq \frac{\prod_{j=1}^n \delta_j}{|D|^{1/q'+1/p}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{2x}{\delta} + c\right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin \frac{M_j \eta_j x_j}{\delta_j}}{\sin \frac{\eta_j x_j}{\delta_j}} \frac{\sin x_j}{x_j} \right)^2 dx \\ &\geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} \frac{\prod_{j=1}^n \delta_j}{|D|^{1/q'+1/p}} \int_{[-\pi/2, \pi/2]^n} \varphi\left(\frac{2x}{\delta} + c\right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin \frac{M_j \eta_j x_j}{\delta_j}}{\sin \frac{\eta_j x_j}{\delta_j}} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Если воспользоваться теперь соотношениями $N_j = \eta_j/\delta_j$, $j = 1, \dots, n$, и (6), заменить $N_j x_j$ на x_j , то последнее выражение примет вид

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} \frac{\prod_{j=1}^n \delta_j N_j^{-1}}{|D|^{1/q'+1/p}} \int_B \varphi\left(\frac{2x}{\eta} + c\right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin M_j x_j}{\sin x_j} \right)^2 dx, \quad (7)$$

где $B = [-\frac{\pi}{2}N_1, \frac{\pi}{2}N_1] \times \dots \times [-\frac{\pi}{2}N_n, \frac{\pi}{2}N_n]$.

Далее, как и раньше, принимая во внимание неотрицательность φ , оценим снизу интеграл в (7):

$$\begin{aligned} &2^{-n} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=0}^{N_n-1} M_1^2 \int_{\pi k_1}^{\pi k_1 + \pi/M_1} \dots M_n^2 \int_{\pi k_n}^{\pi k_n + \pi/M_n} \varphi\left(\frac{x}{\eta} + c\right) dx \\ &= 2^{-n} \prod_{j=1}^n M_j^2 \eta_j \sum_{0 \leq k \leq N-1} \int_{[c, c+\pi/(M\eta)] + \pi k/\eta} \varphi(x) dx \\ &= 2^{-n} \prod_{j=1}^n M_j^2 \eta_j \sum_{0 \leq k \leq N-1} \int_{[c, d] + kh} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{j=1}^n \delta_j N_j^{-1} M_j^2 \eta_j}{|D|^{1/q'+1/p}} &= (\pi^n)^{2-(1/q'+1/p)} \left(\prod_{j=1}^n N_j (d_j - c_j) \right)^{-(1/p'+1/q)} \\ &= \frac{(\pi^n)^{2-(1/q'+1/p)}}{|Q|^{1/p'+1/q}}, \end{aligned}$$

получим

$$\|\varphi\|_{M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})} \geq C_{pqr} \frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}} \int_Q \varphi(x) dx.$$

В силу произвольности выбора Q из E_1 верно неравенство (4), следовательно, и неравенство (2). Теорема доказана.

Функцию f назовем *обобщенно-монотонной (невозрастающей)* в $\mathbb{R}^n$, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $x_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, имеет место

$$|f(x)| \leq c(|x_1| \cdots |x_n|)^{-1} \left| \int_{[0, x]} f(y) dy \right|.$$

Здесь $[0, x] = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 \leq y_j \operatorname{sgn} x_j \leq |x_j|, j = 1, \dots, n\}$. Все монотонные и квазимонотонные функции являются обобщенно-монотонными. Обратное не всегда верно.

ПРИМЕР. Пусть $\beta > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-\beta} & \text{при } x \in [2k, 2k+1), k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{при } x \in [2k-1, 2k), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ не является монотонной и квазимонотонной, в то же время является обобщенно-монотонной.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < p < 2 \leq q < \infty$, $1 \leq r \leq s \leq \infty$, φ — *знакоопределенная, обобщенно-монотонная функция*. Тогда для того чтобы $\varphi \in M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{Q \in E_0} \frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}} \int_Q |\varphi(x)| dx < \infty,$$

где E_0 — множество всех отрезков в $\mathbb{R}^n$ положительной меры, т.е. всех параллелепипедов с параллельными декартовым плоскостям сторонами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать для неотрицательной функции φ , что

$$\sup_{e \in E} \frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}} \int_e \varphi(x) dx \leq c \sup_{Q \in E_0} \frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}} \int_Q \varphi(x) dx,$$

где E — множество всех компактов в $\mathbb{R}^n$. Действительно,

$$\begin{aligned} \sup_{e \in E} \frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}} \int_e \varphi(x) dx &\leq \sup_{e \in E} \frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}} \int_e \frac{1}{|x_1| \cdots |x_n|} \int_{[0, x]} \varphi(y) dy dx \\ &\leq \sup_{Q \in E_0} \frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}} \int_Q \varphi(x) dx \sup_{e \in E} \frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}} \int_e \frac{1}{(|x_1| \cdots |x_n|)^{1-(1/p'+1/q)}} dx \\ &= c \sup_{Q \in E_0} \frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}} \int_Q \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Пусть M – некоторое фиксированное семейство множеств $e \subset \mathbb{R}^n$ конечной положительной меры ($|e| > 0$). Для интегрируемой на каждом $e \in E$ функции φ определим функцию

$$\overline{\varphi}(t, M) = \sup_{\substack{|e| \in M \\ |e| \geq t}} \frac{1}{|e|} \left| \int_e \varphi(x) dx \right|, \quad t \in (0, \infty),$$

которую назовем *средней функцией для φ по сети M* .

Будем говорить, что функция φ имеет *доминирующие гармонические осцилляции* в $\mathbb{R}^n$, если

$$\sup_{t>0} \frac{\overline{\varphi}(t, E)}{\overline{\varphi}(t, E_0)} < \infty.$$

Здесь E – множество всех компактов в $\mathbb{R}^n$, E_0 – множество всех гармонических отрезков в $\mathbb{R}^n$. Множество всех функций, имеющих доминирующие гармонические осцилляции, обозначим через Λ .

Множество Λ содержит все кусочно-монотонные функции [3] и обобщенно-монотонные функции.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 < p < 2 \leq q < \infty$, $1 \leq r \leq s \leq \infty$, φ – знакоопределенная функция из Λ . Тогда для того чтобы $\varphi \in M(L_{pr} \rightarrow L_{qs})$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \in L_{r\infty}$, где $1/r = 1/p - 1/q$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hörmander L. // Acta Math. 1960. V. 104. P. 93–140.
2. Нурсултанов Е. Д., Берниязов Е. Е. // Современные вопросы теории функций и функцион. анализа. Караганда, 1992. С. 30–38.
3. Дьяченко М. И. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 6. С. 1156–1170.

Институт прикладной математики Республики Казахстан, г. Караганда
E-mail: nursult@ipm.karaganda.su

Поступило
06.03.97
Исправленный вариант
09.06.97