Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Шкаликов, О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 6, 950–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:51:19

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ СПЕКТРА ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

А. А. Шкаликов

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля на конечном интервале

$$\varepsilon y'' = (q(x) - \lambda)y, \quad y(-1) = y(1) = 0. \quad (1)$$

Здесь $q(x)$ – вещественная гладкая функция, λ – спектральный, а ε – малый параметры. При любом $\varepsilon > 0$ спектр задачи (1) вещественный и дискретный; при $\varepsilon \rightarrow 0$ он сгущается, хорошо известны (см., например, [1, гл. 8]) формулы для собственных значений при стремлении ε к 0 (так называемые *квазиклассические асимптотики*).

Мы рассмотрим задачу (1) в предположении, что малый параметр принимает чисто мнимые значения. Эта задача является модельной для существенно более сложной спектральной задачи Орра–Зоммерфельда, хорошо известной в гидродинамике. В этой модели $q(x)$ – профиль скорости жидкости, $\varepsilon = -i/(\alpha R)$, где $\alpha > 0$ – волновое число, а R – число Рейнольдса, которое считается большим. При $q(x) = x$ эта задача известна как модель Сквайра для течения Куэтта. Численный подсчет спектра этой задачи проводился многими авторами (см. [2], [3] и имеющиеся там ссылки). Вычисления дают удивительный результат: оказывается, что спектр в модели Сквайра имеет Y -образную форму. В недавней работе Редди, Хеннингсона и Шмидта [3] приведены аналитические аргументы, поясняющие, что при $q(x) \equiv x$ вблизи отрезков $[-1, -i/\sqrt{3}]$ и $[-i/\sqrt{3}, 1]$ в комплексной плоскости находятся собственные значения рассматриваемой задачи.

Целью этой заметки является не только строгое обоснование этого факта, но и восстановление полной картины поведения собственных значений задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ по отрицательной мнимой оси. Для модели Сквайра оказывается возможным дать не только обоснование для картин, полученных с помощью компьютера, но и предъяснить явные асимптотические формулы для собственных значений и оценить границы спектра. Для произвольной функции $q(x)$ эта задача по нашему мнению очень сложна. В этой заметке мы рассмотрим лишь случай монотонной голоморфной $q(x)$ и анонсируем один результат, показывающий, что при больших числах R спектр задачи отсутствует в некотором криволинейном треугольнике, основанием которого является отрезок области значений профиля $q(x)$. При этом форма криволинейного треугольника определяется топологией линий Стокса.

Пусть $q(x) \equiv x$. Проведя замену $\xi = \varepsilon^{-1/3}(x - \lambda)$, получим вместо (1) спектральную задачу в комплексной ξ -плоскости

$$z''(\xi) = \xi z(\xi), \quad (2)$$

$$z(\eta(1 - \lambda)) = z(\eta(-1 - \lambda)) = 0. \quad (3)$$

Здесь и далее $\eta = re^{i\pi/6} = \varepsilon^{-1/3}$, $r > 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-010-1292, и фонда INTAS, грант № 93-351ext.

Обозначим через $v(\xi)$ и $w(\xi) = v(e^{2\pi i/3}\xi)$ функции Эйри–Фока, образующие фундаментальную систему для уравнения Эйри (2). Характеристический определитель задачи (2), (3) имеет вид

$$\Delta(\lambda, \eta) = v(\eta(1-\lambda))w(-\eta(1+\lambda)) - w(\eta(1-\lambda))v(-\eta(1+\lambda)). \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q(x) = x$. Тогда при малых ε , принадлежащих положительной мнимой оси, собственные значения задачи (1) образуют “спектральный галстук”. А именно, найдется константа $c > 0$ такая, что при любом $\delta > 0$ все собственные значения задачи лежат в δ -окрестности отрезков $[-1, -i/\sqrt{3}]$, $[-i/\sqrt{3}, 1]$ и луча $[-i/\sqrt{3}, -i\infty)$, если только

$$|\varepsilon| < c\delta^3, \quad (5)$$

где константа c не зависит от δ (см. рис. 1).

Далее, собственные значения в окрестности отрезка $[-1, -i/\sqrt{3}]$ имеют асимптотику

$$\lambda_k = (e^{-i\pi/6}t_k - 1)(1 + O(e^{-r^{3/2}\varphi(t)})), \quad \varphi(t) = \frac{4}{3} \operatorname{Re}(2e^{i\pi/6} - t)^{3/2}, \quad (6)$$

где t_k – нули функции Эйри $v(-tr) = 0$, когда t меняется на сегменте $[0, 2/\sqrt{3} - c/r^{3/2})$, которые в свою очередь имеют асимптотику по k

$$t_k \sim \frac{1}{r} \left(\frac{3\pi}{2} \left(k + k_0 - \frac{1}{4} \right) \right)^{2/3}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где k_0 – некоторое целое число.

Рис. 1

Рис. 2

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Прежде всего заметим, что числовой образ оператора $Ay = \varepsilon y'' - xy$, порожденного краевыми условиями $y(0) = y(1) = 0$, лежит в полуполосе $\Pi = \{\lambda : -1 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 1, \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$. Поэтому все собственные значения задачи также лежат в этой полуполосе (см. [3]). Известно, что функция Эйри $v(\xi)$ вне произвольно малого угла, содержащего отрицательную полуось, имеет асимптотику

$$v(\xi) = \frac{\xi^{-2/3}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) (1 + O(\xi^{-3/2})). \quad (7)$$

Пусть Δ – треугольник, образованный отрезками $[-1, 1]$, $[-1, -i/\sqrt{3}]$ и $[-i/\sqrt{3}, 1]$. Если λ принадлежит внутренности Δ , то, воспользовавшись асимптотикой (7), легко показать, что

$$|v(\eta(1 - \lambda))| < 1, \quad |w(-\eta(1 + \lambda))| < 1, \quad |v(-\eta(1 + \lambda))| > 1, \quad |w(\eta(1 - \lambda))| > 1,$$

если выполнено условие (5), где δ – расстояние от λ до боковых сторон треугольника. Поэтому определитель (4) в этом случае не равен 0. Если λ лежит в полуполосе Π , ниже треугольника Δ и левее луча $[-i/\sqrt{3}, -i\infty)$, то опять, воспользовавшись асимптотикой (7), можно показать, что

$$|v(-\eta(1 + \lambda))| > |v(\eta(1 - \lambda))|, \quad |w(\eta(1 - \lambda))| > |w(-\eta(1 + \lambda))|.$$

Эти неравенства также обеспечивают невырожденность определителя (4). Далее, на отрезке $[-1, -i/\sqrt{3}]$ функция $v(\eta(1 - \lambda))w(-\eta(1 + \lambda))$ имеет нули $e^{-i\pi/6}t_k - 1$, а тогда асимптотика (6) легко получается с помощью теоремы Руше. Распределение собственных значений вблизи отрезка $[-i/\sqrt{3}, 1]$ такое же, поскольку спектр задачи симметричен относительно мнимой оси.

Из утверждения теоремы следует, что собственные значения задачи накапливаются на боковых сторонах треугольника при стремлении ε к 0, причем накопление происходит быстрее при приближении к вершине. В настоящий момент мы не располагаем доказательством того факта, что накопление происходит также на всем луче $[-i/\sqrt{3}, -i\infty)$, тем более не имеем асимптотических формул для собственных значений на этом луче вблизи вершины треугольника. Для дальних собственных значений, уходящих по мнимой оси на $-i\infty$, асимптотика хорошо известна, а именно:

$$\lambda_n \sim -\frac{in^2\pi^2}{4R}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Далее будем предполагать, что $q(x)$ – строго возрастающая функция, допускающая аналитическое продолжение с отрезка $[-1, 1]$ на всю комплексную плоскость. Пусть $q(-1) =: m < M := q(1)$. Тогда собственные значения задачи (1) лежат в полуполосе $\Pi = \{\lambda : m \leq \operatorname{Re} \lambda \leq M, \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$. Из предположения о монотонности вытекает, что существует область Ω , содержащая отрезок $[-1, 1]$, в которой $q(\xi)$ – однолистная функция. Пусть $\lambda \in \Pi \cap q(\Omega)$. Тогда функция $q(\xi) - \lambda$ имеет единственный нуль $\xi_\lambda \in \Omega$. Положим

$$\zeta(z, \lambda) = \int_{\xi_\lambda}^z \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi.$$

Уравнение $\operatorname{Re} \zeta(z, \lambda) = 0$ определяет в z -плоскости линии, называемые *линиями Стокса*. Точку c внутри $q(\Omega) \cap \Pi$ назовем *критической*, если какая-либо из линий Стокса $\operatorname{Re} \zeta(z, c) = 0$ проходит через t или M . Обозначим через Γ множество всех вертикальных лучей, соединяющих критические точки с $-i\infty$. Обозначим через $\hat{\Gamma}$ дополнение к Γ и положим $\Delta = q(\Omega) \cap \Pi \cap \hat{\Gamma}$. Легко понять, что Δ есть некий криволинейный треугольник, основанием которого является весь отрезок $[t, M]$. С привлечением известных результатов об асимптотике решений дифференциальных уравнений с комплексным параметром (см., например, [4]) мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Внутри треугольника Δ , но вне δ -окрестности его криволинейной границы (при любом фиксированном $\delta > 0$) нет собственных значений задачи (1), если ε лежит на положительной мнимой оси и $|\varepsilon| < \delta^3$, где константа δ не зависит от δ .*

Заметим, что в случае $q(x) = x$ линиями Стокса являются лучи, выходящие из точки $\xi_\lambda = \lambda$ под одинаковым углом, причем один из этих лучей совпадает по направлению с отрицательной мнимой осью. Поэтому треугольник Δ получается в этом случае не криволинейным, а обычным. Теорема 2 проясняет аналитическую природу необычного явления, называемого нами “спектральным галстуком”. А именно, это явление обусловлено топологией линий Стокса для заданного профиля $q(x)$.

На рис. 1 и 2 изображены спектры задачи (1) при $|\varepsilon| = 10^{-4}$ для функций $q(x) = x$ и $q(x) = (x + x^5)/2$ соответственно. Вычисления проводились методом Галёркина.

Пользуясь случаем, автор приносит благодарность своим студентам М. Нейман-Заде и А. Савчуку, которые реализовали программу подсчета собственных значений рассматриваемой задачи на компьютере.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров Ю. В., Шубин М. А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории. Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 31. М.: ВИНТИ, 1988.
2. Drazin P. G., Reid W. H. Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
3. Reddy S. C., Schmid P. J., Henningson D. S. // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. № 1. P. 15–47.
4. Евграфов М. А., Федорюк М. Ф. // УМН. 1966. Т. 21. № 1. С. 3–50.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: shkal@nw.math.msu.su

Поступило
09.06.97
Исправленный вариант
25.06.97