Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Анер, В. В. Дякин, В. Я. Раевский, С. Риттер,
О спектральных свойствах операторов теории гар-
монического потенциала, *Матем. заметки*, 1996,
том 59, выпуск 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1689>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:08:29

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ ТЕОРИИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Дж. Анер, В. В. Дякин, В. Я. Раевский, Ст. Риттер

§ 1. Введение

Пусть Ω – односвязная конечная область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная ляпуновской поверхностью S . Предметом данной работы является исследование спектральных свойств операторов классической теории потенциала

$$\begin{aligned}(T\sigma)(x) &:= \int_S \sigma(y) |x - y|^{-1} dS_y, \\ (B\varphi)(x) &:= \int_S \varphi(y) \frac{\partial |x - y|^{-1}}{\partial n_x} dS_y, \\ (B^*\psi)(x) &:= \int_S \psi(y) \frac{\partial |x - y|^{-1}}{\partial n_y} dS_y,\end{aligned}\tag{1}$$

действующих в пространстве $L_2(S)$. Оператор T представляет собой значение на S потенциала простого слоя, B – оператор прямого значения на S нормальной производной потенциала простого слоя, а B^* – сопряженный ему оператор прямого значения на S потенциала двойного слоя. Известно (см. [1, с. 160]), что ненулевые точки спектра компактных операторов B и B^* суть вещественные простые полюсы их резольвент, содержащиеся в полуинтервале $[-2\pi, 2\pi)$, а соответствующие собственные функции непрерывны. Однократному собственному значению $\mu_0 = -2\pi$ операторов B и B^* отвечают такие собственные функции σ_0 и c_0 , что $\int_S \sigma_0 dS \neq 0$, а $c_0 = \text{const}$ (см. [2, с. 276], [3, с. 334]). Кроме того, оператор B является квазиэрмитовым (см. [4, с. 394]), т.е. существует такой положительный самосопряженный оператор T (таковым является компактный оператор T в (1)), что $TB = B^*T$ (см. [5]). Пусть $\{\mu_n\}$ – последовательность ненулевых собственных значений B (а потому и B^*), а $E(\mu, B)$ означает конечномерное собственное подпространство оператора B , отвечающее собственному значению $\mu \in \{\mu_n\}$. Тогда следствием квазиэрмитовости является

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

полнота системы собственных функций оператора B^* , ортогональность по энергии оператора T (т.е. в скалярном произведении $(T\cdot, \cdot)$) собственных функций B , отвечающих различным собственным значениям, а также соотношения (см. [5]): $E(\mu, B^*) = T(E(\mu, B))$, $\varphi \in \text{Ker } B \Leftrightarrow T\varphi \in \text{Ker } B^*$. Если $S \in C^\infty$, то все операторы в (1) являются псевдодифференциальными (ПДО) порядка (-1) , т.е. ограниченным образом действуют из соболевского пространства $H^r(S)$ в $H^{r+1}(S)$ для всех $r \in \mathbb{R}$, а оператор T – эллиптический ПДО, имеющий обратный, который может быть расширен до непрерывного из $L_2(S)$ на $H^{-1}(S)$ (если $S \in C^\infty$, то T^{-1} отображает $H^r(S)$ на $H^{r-1}(S)$ для всех $r \in \mathbb{R}$ (см. [6], [7, с. 151])). Таким образом, спектр компактного самосопряженного положительного оператора T состоит из положительных конечнократных собственных значений и нуля, принадлежащего его непрерывной части. Изложенные свойства операторов B и B^* позволяют заключить, что их спектр состоит из системы конечнократных собственных значений из полуинтервала $[-2\pi, 2\pi)$, которым соответствуют бесконечногладкие собственные функции, и нуля.

В теории потенциала долгое время остается открытым вопрос о классификации нуля в спектре операторов B и B^* (см. [8]): какой части спектра (точечной σ_p , непрерывной σ_c или остаточной σ_r) этих операторов может принадлежать нуль? В данной работе получен частичный ответ на этот вопрос. Кроме того, дано обобщение классического результата Племеля 1911 года о принадлежности спектров операторов B и B^* полуинтервалу $[-2\pi, 2\pi)$, а именно, доказано, что любая точка полуинтервала является собственным значением этих операторов при подходящем выборе поверхности. Для полноты изложения в § 3 мы включили краткое изложение некоторых результатов, полученных нами в [9]. В заключительной части доказан ряд новых спектральных свойств операторов B и B^* для эллипсоидальных поверхностей.

§ 2. Предварительные результаты

Свойство квазиэрмитовости оператора B позволяет сформулировать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. $0 \notin \sigma_r(B^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что $0 \in \sigma_r(B^*) \Rightarrow \dim \text{Ker } B \neq 0$. Пусть $\varphi \in \text{Ker } B$,

$$\begin{aligned} \varphi \neq 0 \Rightarrow TB\varphi = 0 \Rightarrow B^*T\varphi = 0 \Rightarrow T\varphi \in \text{Ker } B^* \\ \Rightarrow 0 \in \sigma_p(B^*) \Rightarrow 0 \notin \sigma_r(B^*), \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Учитывая этот результат и связь спектров сопряженных операторов (см. [7, с. 34]), легко установить, что “a priori” могут реализовываться

только три возможности:

$$0 \in \sigma_c(B), \quad 0 \in \sigma_c(B^*), \quad (2)$$

$$0 \in \sigma_p(B), \quad 0 \in \sigma_p(B^*), \quad (3)$$

$$0 \in \sigma_r(B), \quad 0 \in \sigma_p(B^*). \quad (4)$$

Известно (см. [8], [10]), что в случае, когда S есть сфера или вытянутый сфероид, то реализуется возможность (2). В работе [8] поднят вопрос: всегда ли нуль содержится в непрерывном спектре операторов B и B^* для достаточно гладких поверхностей S ? В следующем параграфе мы дадим отрицательный ответ на это вопрос, приведя пример, когда реализуется возможность (3). Что касается (4), то вопрос остается открытым. Мы получили в этом направлении следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. $0 \in \sigma_r(B) \Leftrightarrow \emptyset \neq \text{Ker } B^* \setminus \{0\} \subset L_2(S) \setminus H^1(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $0 \in \sigma_r(B) \Rightarrow 0 \in \sigma_p(B^*) \Rightarrow \text{Ker } B^* \neq \{0\}$. Предположим, что $\exists \psi: \psi \neq 0, \psi \in H^1(S), B^*(\psi) = 0$. Поскольку оператор T есть биекция $L_2(S)$ на $H^1(S)$ (см. [11, с. 87], [12]), то $\exists \varphi \in L_2(S), \varphi \neq 0$:

$$T\varphi = \psi \Rightarrow B^*T\varphi = 0 \Rightarrow TB\varphi = 0 \Rightarrow B\varphi = 0 \Rightarrow 0 \in \sigma_p(B)$$

– противоречие.

2. Пусть $\emptyset \neq \text{Ker } B^* \setminus \{0\} \subset L_2(S) \setminus H^1(S) \Rightarrow 0 \in \sigma_p(B^*) \Rightarrow 0 \in \sigma_r(B)$, или $0 \in \sigma_p(B)$. Исключим вторую возможность. Имеем

$$\begin{aligned} 0 \in \sigma_p(B) \Rightarrow \exists \varphi \neq 0: B\varphi = 0 \Rightarrow \psi := T\varphi \in H^1(S), B^*\psi = TB\varphi = 0 \\ \Rightarrow \text{Ker } B^* \setminus \{0\} \not\subset L_2(S) \setminus H^1(S) \end{aligned}$$

– противоречие, завершающее доказательство.

Может ли $\text{Ker } B^* \setminus \{0\}$ состоять только из “негладких” функций? Отметим, что попытка доказать невозможность (4) должна опираться на специфические свойства операторов B и B^* , ибо для общих квазиэрмитовых операторов возможность (4) может быть реализована (см. [13]).

§ 3. Спектральные свойства операторов B и B^* для плюснутого сфероид

В этом параграфе мы докажем возможность реализации (3), когда S является плюсным сфероидом (эллипсоидом вращения). Декартовы координаты (x, y, z) связаны с координатами (ξ, η, φ) плюснутого сфероид соотношением (см. [14, с. 24]): $x = p \cos \varphi, y = p \sin \varphi, z = d\xi\eta/2$, где $p^2 = d^2(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)/4$, d – межфокальное расстояние, $0 \leq \xi < \infty, -1 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Координатные поверхности $\xi = \text{const}$ есть плюснутое эллипсоиды вращения вокруг оси z . Если в качестве S взять

такую поверхность, то собственные значения операторов B^* и B имеют вид (см. [15]):

$$\lambda_n^m(\xi) = -2\pi \left\{ 1 + 2(-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Q_n^m(i\xi) [(n+1)i\xi P_n^m(i\xi) - (n-m+1)P_{n+1}^m(i\xi)] \right\}, \quad (5)$$

а соответствующие собственные функции этих операторов

$$\begin{cases} C_n^m(\eta, \varphi) := P_n^m(\eta) \cos m\varphi, \\ S_n^m(\eta, \varphi) := P_n^m(\eta) \sin m\varphi, \\ C_n^m(\xi, \eta, \varphi) := C_n^m(\eta, \varphi)(\xi^2 + \eta^2)^{-0.5}, \\ S_n^m(\xi, \eta, \varphi) := S_n^m(\eta, \varphi)(\xi^2 + \eta^2)^{-0.5}, \end{cases}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq m \leq n$, P_n^m и Q_n^m обозначают присоединенные функции Лежандра. Найдем асимптотическое поведение собственных значений (5) при $\xi \rightarrow \infty$ и $\xi \rightarrow 0$.

ЛЕММА 1. $\lambda_n^m(\xi) \rightarrow -2\pi/(2n+1)$ при $\xi \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя асимптотические формулы (см. [16, с. 165])

$$\begin{aligned} P_n^m(i\xi) &= \frac{(2i\xi)^n \Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n-m+1)} (1 + O(\xi^{-2})), \\ Q_n^m(i\xi) &= (-1)^m \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+m+1)}{(2i\xi)^{n+1} \Gamma(n+3/2)} (1 + O(\xi^{-2})), \end{aligned}$$

где Γ обозначает гамма-функцию, из (5) после некоторых преобразований получаем

$$\lambda_n^m(\xi) = -\frac{2\pi}{2n+1} + O(\xi^{-2}).$$

В завершение доказательства отметим, что, как и следовало ожидать, при $\xi \rightarrow \infty$ получаются собственные функции операторов B и B^* для сферы.

ЛЕММА 2. $\lambda_n^m(\xi) \rightarrow 2\pi(-1)^{n+m+1}$ при $\xi \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя $z = i\xi$ в формулу для $Q_n^m(z)$ через гипергеометрическую функцию аргумента z^2 (см. [17, с. 155]), после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} Q_n^m(i\xi) &= i \exp\left(\frac{i\pi(3m-n)}{2}\right) \sqrt{\pi} 2^{m-1} (-\xi^2 - 1)^{m/2} \\ &\times \left\{ -\frac{\Gamma((n+m+1)/2)}{\Gamma((n-m+2)/2)} + O(\xi) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отталкиваясь от аналогичной формулы для $P_n^m(z)$ (см. [17, с. 154]), получим

$$P_n^m(i\xi) = 2^m(-\xi^2 - 1)^{-m/2}\pi^{-1/2} \times \left\{ \frac{\cos(\pi \frac{n+m}{2})\Gamma(\frac{n+m+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-m+2}{2})} + O(\xi) \right\}. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), имеем формулу

$$\begin{aligned} \lambda_n^m(\xi) &= -2\pi \left\{ 1 + 2^m \alpha_n^m \exp(-i\pi \frac{n+m}{2}) i(n-m+1) \Gamma(\frac{n+m+1}{2}) \Gamma(\frac{n+m+2}{2}) \right. \\ &\quad \times \left. \cos(\pi \frac{n+m+1}{2}) / \left[\Gamma(\frac{n-m+2}{2}) \Gamma(\frac{n-m+3}{2}) \right] \right\} + O(\xi), \end{aligned}$$

где для удобства введено $\alpha_n^m := (n-m)!/(n+m)!$.

Теперь нетрудно убедиться, что в случае четности суммы $n+m$: $\lambda_n^m(\xi) = -2\pi + O(\xi)$, а в случае ее нечетности: $\lambda_n^m(\xi) = 2\pi + O(\xi)$, что и завершает доказательство леммы.

Следующая теорема утверждает, что возможность (3) может реализовываться.

ТЕОРЕМА 3. *Существует поверхность S в форме сплюсненного сфероида, для которой $0 \in \sigma_p(B)$, $0 \in \sigma_p(B^*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n и m таковы, что сумма $n+m$ нечетна. Тогда из лемм 1, 2 и непрерывности $\lambda_n^m(\xi)$ следует, что существует $\xi_n^m \in (0, \infty)$ такое, что $\lambda_n^m(\xi_n^m) = 0$. Утверждению теоремы соответствуют все сплюснутые сфероиды с $\xi = \xi_n^m$.

Содержание теоремы отвечает на вопрос, поднятый Анером в [8]. В общем случае нельзя утверждать, что для всех гладких поверхностей операторы B и B^* инъективны, спектральная характеристика нуля зависит от формы поверхности S .

Следующая теорема представляет собой обобщение классического результата Племель [8], утверждающее о невозможности сужения полуинтервала $[-2\pi, 2\pi]$ для собственных чисел B и B^* .

ТЕОРЕМА 4. *Для всех $b \in [-2\pi, 2\pi]$ существует гладкая поверхность S такая, что b является собственным значением B и B^* , определенных на S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $b = -2\pi$ утверждение справедливо для любой гладкой поверхности, а из лемм 1 и 2 следует, что объединение областей значения функций $\lambda_1^0(\xi)$ и $\lambda_2^0(\xi)$ совпадает с интервалом $(-2\pi, 2\pi)$, что и завершает доказательство теоремы.

§ 4. Некоторые спектральные свойства операторов B и B^* для эллипсоидальных поверхностей

Формула (5), а также аналогичная формула для собственных значений B и B^* в случае вытянутого сфероида (см. [10]) могут быть записаны в виде

$$\lambda_n^m(\xi) = 2\pi i(-1)^m(1 + \xi^2)\alpha_n^m \frac{\partial\{P_n^m(i\xi)Q_n^m(i\xi)\}}{\partial\xi}, \quad \xi \in (0, \infty), \quad (8)$$

для сплюснутого и

$$\lambda_n^m(\xi) = 2\pi(\xi^2 - 1)\alpha_n^m(-1)^m \frac{\partial\{P_n^m(\xi)Q_n^m(\xi)\}}{\partial\xi}, \quad \xi \in (1, \infty), \quad (9)$$

для вытянутого сфероида, $n = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq m \leq n$. Следующее утверждение доказывает интересное свойство этих собственных значений, которое в случае шара является очевидным.

ТЕОРЕМА 5. *Собственные значения для сплюснутого (8) и вытянутого (9) сфероида удовлетворяют соотношению*

$$S_n(\xi) := \lambda_n^0(\xi) + 2 \sum_{m=1}^n \lambda_n^m(\xi) = -2\pi, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Предварительно получим некоторые полезные формулы.

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие соотношения*

$$\int_{-1}^1 \frac{A_k(x)(1 - x^2)^{m/2} P_n^m(x) dx}{z - x} = 2(-1)^m A_k(z)(z^2 - 1)^{m/2} Q_n^m(z), \quad (11)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{[P_n^m(x)]^2 dx}{z - x} = 2(-1)^m P_n^m(z) Q_n^m(z), \quad (12)$$

$$P_n(z)Q_n(z) + 2 \sum_{m=1}^n (-1)^m \alpha_n^m P_n^m(z) Q_n^m(z) = Q_0(z) := 0.5 \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right], \quad (13)$$

где $n = 0, 1, \dots$; $0 \leq m \leq n$, A_k – произвольный полином степени $k \leq n - m$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-1, 1)$ ($\mathbb{C}$ – комплексная плоскость).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулу (11) для $A_k(x) = x^k$ нам удалось найти только в справочнике [19, с. 200, формула 8], где она приведена с опечаткой. Поэтому нам пришлось вывести ее самостоятельно, исходя из интеграла Неймана (см. [20, с. 232]):

$$Q_n(z) = 0.5 \int_{-1}^1 P_n(t) \frac{dt}{z - t}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-1, 1). \quad (14)$$

Подставляя в (11) $A_k(x) = d^m P_n(x)/dx^m$ и учитывая известные выражения для присоединенных функций Лежандра через производные от полиномов внутри и вне интервала $(-1, 1)$, получаем (12). Далее, подставляя $y = x$ и $a = 0$ в формулу, выражающую теорему сложения для многочленов Лежандра (см. [20, с. 233]):

$$\begin{aligned} P_n\{xy + [(1-x^2)(1-y^2)]^{1/2} \cos a\} \\ = P_n(x)P_n(y) + 2 \sum_{m=1}^n \alpha_n^m \cos(ma) P_n^m(x) P_n^m(y), \end{aligned}$$

с учетом $P_n(1) = 1$ получаем

$$P_n^2(x) + 2 \sum_{m=1}^n \alpha_n^m [P_n^m(x)]^2 = 1.$$

Умножая обе части этого тождества на $(z-x)^{-1}$ и интегрируя по x от (-1) до 1 , получаем, с учетом (12) и (14), основную формулу (13). Доказательство леммы завершено.

Утверждения леммы 3 позволяют легко провести

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Подставляя значения $\lambda_n^m(\xi)$ из (8) в формулу (10), с учетом (13) получаем

$$S_n(\xi) = 2\pi i(1 + \xi^2) \frac{d[0.5 \ln((i\xi + 1)/(i\xi - 1))]}{d\xi} = -2\pi$$

для сплюснутого сфероида. Аналогично, из формул (10), (9) и (13) для вытянутого сфероида

$$S_n(\xi) = 2\pi(\xi^2 - 1) \frac{d[0.5 \ln((\xi + 1)/(\xi - 1))]}{d\xi} = -2\pi,$$

что завершает доказательство теоремы. Численные расчеты показывают, что, по-видимому, аналогичная формула справедлива не только для сфероида, но и произвольного эллипсоида.

Рассмотрим вопрос о знаках собственных чисел операторов B и B^* , определенных на поверхности сфероида. Формулы (8) и (9) могут быть записаны в едином виде

$$\lambda_n^m(z) = 2\pi(z^2 - 1)\alpha_n^m(-1)^m \frac{d\{P_n^m(z)Q_n^m(z)\}}{dz},$$

где $z = \xi > 1$ для вытянутого и $z = i\xi$, $\xi > 0$, для сплюснутого сфероида. Учитывая (12), имеем

$$\lambda_n^m(z) = \pi \alpha_n^m(z^2 - 1) \frac{d}{dz} \int_{-1}^1 \frac{[P_n^m(x)]^2 dx}{z - x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-1, 1). \quad (15)$$

Для вытянутого сфероида эта формула дает

$$\lambda_n^m(\xi) = -\pi \alpha_n^m (\xi^2 - 1) \int_{-1}^1 \left\{ \frac{P_n^m(x)}{\xi - x} \right\}^2 dx, \quad \xi > 1,$$

и мы можем повторить вывод об отрицательности всех собственных чисел операторов B и B^* , сделанный в [10]. Из (15) для сплюснутого сфероида получаем

$$\lambda_n^m(\xi) = 2\pi(1 + \xi^2)\alpha_n^m \int_0^1 \frac{(x^2 - \xi^2)[P_n^m(x)]^2 dx}{(x^2 + \xi^2)^2}, \quad \xi > 0.$$

Отсюда следует, что при $\xi \geq 1$ все собственные значения $\lambda_n^m(\xi)$ отрицательны. Исследуя графики функций $\lambda_n^m(\xi)$ при различных n и m , можно выдвинуть предположение, что это свойство справедливо для всех $\xi > \xi_1^0 \simeq 0.660068$, однако, эта гипотеза требует строгого обоснования.

В заключение найдем явное выражение решения задачи Робена для эллипсоида. Как известно (см [21, с. 218]), эта задача сводится к отысканию собственной функции $\sigma_0(x)$, отвечающей собственному значению $\mu_0 = -2\pi$ оператора B на поверхности S или, что то же, к решению уравнения $T\sigma_0 = \text{const}$ на S . Наш результат основывается на неожиданной теореме, доказанной Риттером в [22] и утверждающей следующее. Пусть S представляет собой поверхность эллипсоида с полуосями $a \geq b \geq c > 0$. Тогда для $p(x) := (n(x), x)$, $x \in S$, и для любой функции $\varphi \in C(S)$ справедливо на S :

$$B(p\varphi) = pB^*(\varphi). \quad (16)$$

Здесь $n(x)$ – вектор единичной внешней нормали к S в точке $x \in S$, а $(n(x), x)$ – соответствующее скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Полагая в (16) $\varphi(x) \equiv 1$, легко понять, что если для некоторой поверхности S выполнено (16), то функция $p(x)$ необходимо является решением задачи Робена для этой поверхности. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 6. *Решение задачи Робена для эллипсоида имеет вид*

$$\sigma_0(x) = (n(x), x), \quad x \in S.$$

Нетрудно установить явный вид этой функции

$$\sigma_0(x) = \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4} \right)^{-1/2},$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$. К сожалению, утверждение теоремы не обобщается на все гладкие поверхности (в частности, для тора оно не имеет места).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953.
- [2] Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
- [3] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981.
- [4] Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
- [5] Дякин В. В., Раевский В. Я. О свойствах операторов классической теории потенциала // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 2. С. 138–140.
- [6] Агранович М. С. Дополнение к кн.: Войтович Н. Н., Капенельбаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977.
- [7] Мазья В. Г. // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 27. М.: ВИНТИ, 1988. С. 131–228.
- [8] Ahner J. F. Some spectral properties of an integral operator in potential theory // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1986. V. 29. № 3. P. 405–411.
- [9] Ahner J. F., Dyakin V. V., Raevskii V. Ya. New spectral results for the electrostatic integral operator // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 185. № 2. P. 391–402.
- [10] Ahner J. F., Arenstorf R. F. On the eigenvalues of the electrostatic integral operator // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 117. № 1. P. 187–197.
- [11] Verchota G. Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domain // J. Funct. Anal. 1984. V. 59. № 3. P. 572–611.
- [12] Белых В. Н. К проблеме численного решения задачи Дирихле гармоническим потенциалом простого слоя // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 392–395.
- [13] Dieudonne J. Quasi-hermitian operators // Proc. of the International Symposium on Linear Spaces. Oxford, London, New York, Jerusalem, 1961. P. 115–122.
- [14] Ерофеев В. Т. Теоремы сложения. Минск: Наука и техника, 1989.
- [15] Ahner J. F. On the eigenvalues of the electrostatic integral operator II // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 181. № 2. P. 328–334.
- [16] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1973.
- [17] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
- [18] Plemelj J. Potentialtheoretische Untersuchungen // Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. Leipzig: Teubner Verlag, 1911.
- [19] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
- [20] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.
- [21] Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Степенко В. Я. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [22] Ritter St. The spectrum of the electrostatic integral operator for an ellipsoid // Erscheint in "Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik". Proceeding-Band der gleichnamigen Konferenz vom 12.–18.12.93 in Oberwolfach. Preprint.