Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Фимин, В. А. Чуянов, Ветвление решений абстрактного кинетического уравнения, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 113–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 02:33:43

УДК 533.7

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н. Н. Фимин, В. А. Чуянов

В настоящей работе рассмотрено явление бифуркации решений нелинейного операторного уравнения специального вида, имеющего применение в математической физике. Исследован вопрос о достаточных условиях возникновения ветвления решений, если производная Фреше оператора, ассоциированного с данным уравнением, является возмущенным локально фредгольмовским оператором. Продемонстрирована методика применения развитого формализма на примере уравнения Больцмана.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Настоящая работа посвящена рассмотрению явления ветвления решений нелинейного операторного уравнения

$$\begin{aligned} \hat{G}(\alpha; f) &\equiv \hat{A}(\alpha) \frac{\partial f(x; \mathbf{y})}{\partial x} - \hat{F}(\alpha; f) = 0, \\ \hat{G}(\alpha; f): O_\alpha(\alpha = 0) \times Z_1(\mathbb{R}^1; X(\mathbb{R}^d)) &\rightarrow Z_2(\mathbb{R}^1; Y(\mathbb{R}^d)), \\ \alpha \in O_\alpha(\alpha = 0) \subset \mathbb{R}^1, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mathbf{y} = \{y_1; \dots; y_d\} \in \mathbb{R}^d, \quad d \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

а) $Z_1 = aC^1(\mathbb{R}^1; X(\mathbb{R}^d))$, $Z_2 = aC(\mathbb{R}^1; Y(\mathbb{R}^d))$ – B -пространства (банаховы) векторнозначных абсолютно непрерывных функций (а C^1 – вместе с первой производной), X, Y – B -пространства (над $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$); $\|f(x, \mathbf{y})\|_{aC(\mathbb{R}^d; X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\partial f(x; \mathbf{y})/\partial x\|_X dx$, причем $f(x; \mathbf{y}) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ (или $x \rightarrow +\infty$).

б) $\hat{A}(\alpha): X \rightarrow Y$ – линейный замкнутый оператор, зависящий от параметра $\alpha \in \mathbb{R}^1$, такой, что $\{0\} \in C\sigma(\hat{A}(\alpha))$, где $C\sigma(\hat{A}(\alpha))$ – непрерывный спектр оператора $\hat{A}(\alpha)$, замыкание множества значений $\hat{A}(\alpha)$ $\text{cl}(\text{Ran}(\hat{A}(\alpha))) = Y$;

в) $\hat{F}(\alpha; f): \mathbb{R}^1 \times X \rightarrow Y$ – нелинейный, аналитический по обоим аргументам в окрестности нуля $O_\alpha(0) \times O_f(0) \subset \mathbb{R}^1 \times X$ ограниченный оператор, $\hat{F}(\alpha; 0) = 0$; производная Фреше $\partial F(\alpha; f)/\partial f$ в этой окрестности нуля – фредгольмовский оператор [1].

Вообще говоря, для дальнейшего достаточно потребовать, чтобы $\hat{F}(\alpha, f)$ был не аналитическим, а дважды непрерывно сильно дифференцируемым в указанной окрестности по обоим аргументам.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 98-01-00956.

Уравнение (1) будем называть *абстрактным стационарным кинетическим уравнением*. Это обусловлено тем, что в случае, когда оператор $\hat{A}(\alpha)\partial/\partial x$ является оператором одномерного векторного поля скоростей (т.е. $\hat{A}(\alpha) \equiv (\alpha + y_1)\hat{E}$, $\hat{E}$ – тождественный оператор), из (1) можно получить уравнения Больцмана, Юлинга–Улебека, Энского и т.д., используемые для описания кинетики одномерных классических и квантовых систем ($\hat{F}$ в этом случае является полилинейным оператором, описывающим динамику процесса взаимодействия частиц – так называемым “столкновительным членом”).

Очевидно, что $f \equiv 0$ есть тривиальное решение (1) (для любых допустимых $\alpha \in \mathbb{R}^1$). Вполне правомерна постановка следующих вопросов:

- 1) существует ли точка ветвления решений уравнения (1);
- 2) каковы достаточные условия возникновения данной бифуркации решения?

2. Условия ветвления решений уравнения (1). Из теоремы о неявной функции (теорема 15.1 в [2]) непосредственно вытекает, что необходимое условие бифуркации решения нелинейного уравнения $\hat{W}(\alpha; f) = 0$, $\hat{W}: O(\alpha_0; f_0) \subseteq \mathbb{R}^1 \times Z_1 \rightarrow Z_2$, может быть сформулировано следующим образом: если $(\alpha_0; f_0) \in \mathbb{R}^1 \times Z_1$ – точка ветвления решений указанного уравнения, то оператор, обратный Фреше-производной $\hat{W}$ в данной точке, т.е. $(\partial\hat{W}(\alpha_0; f_0)/\partial f)^{-1}$, не существует как непрерывное линейное отображение из Z_2 в Z_1 (при этом единственное требование на $\hat{W}$ – непрерывная сильная дифференцируемость в окрестности $O(\alpha_0; f_0)$).

Поэтому мы исследуем поведение и сингулярные свойства оператора $\hat{S}_1(\alpha, \cdot) \equiv (\partial\hat{G}(0; 0)/\partial f)(\alpha; \cdot)$, ассоциированного с линеаризованным уравнением (1):

$$\begin{aligned}\hat{S}_1(\alpha; f) &= \hat{A}(\alpha) \frac{\partial f}{\partial x} - \hat{L}(\alpha)(f) = 0, \\ \hat{L}(\alpha)(f) &\equiv \left(\frac{\partial \hat{F}(0; 0)}{\partial f} \right)(\alpha; f).\end{aligned}\tag{2}$$

Применим к нему двустороннее преобразование Лапласа (по переменной $x \in \mathbb{R}^1$) [3]:

$$\hat{F}^{(L)}(f) \equiv f^{(L)}(\beta; \cdot) = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta x) f(x; \cdot) dx, \tag{3a}$$

$$(\hat{F}^{(L)})^{-1}(f^{(L)}) = f(x; \cdot) = (2\pi i)^{-1} \int_{\eta_0 - i\infty}^{\eta_0 + i\infty} \exp(\beta x) f^{(L)}(\beta; \cdot) \frac{d\beta}{\beta}, \tag{3б}$$

$$\beta_{(-)} < \operatorname{Re}(\beta) < \beta_{(+)}, \quad \beta_{(-)} < \eta_0 < \beta_{(+)}, \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad \eta_0 \in \mathbb{R}^1,$$

в полосе сходимости $\operatorname{Re}(\beta) \in (\beta_{(-)}; \beta_{(+)})$, где

$$\begin{aligned}\beta_{(-)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sup \left\{ x^{-1} \cdot \ln \left\| \int_{+\infty}^x f dx \right\|_X \right\}, \\ \beta_{(+)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \inf \left\{ x^{-1} \cdot \ln \left\| \int_{+\infty}^x f(x; y) dx \right\|_X \right\},\end{aligned}$$

причем в $\beta_{(\pm)}$ выбирается нижний предел интегрирования “ $-\infty$ ”, если это приводит к положительному пределу рассматриваемого выражения, и “ $+\infty$ ”, если это приводит к

отрицательному пределу. Условия, при которых интеграл в правой части (3б) существует в смысле главного значения, очевидно, совпадают с классическим скалярным случаем: а) интеграл в (3а) должен абсолютно (подразумевается по X -норме) сходиться при $\operatorname{Re}(\beta) \in (\beta_{(-)}; \beta_{(+)})$; б) функция $f(x; \cdot)$ должна иметь ограниченную вариацию на любом ограниченном интервале $x \in (x_{(-)}; x_{(+)}) \subset \mathbb{R}^1$. Известно [4, лемма 8.2.2], что в указанной полосе сходимости $\hat{F}^{(L)}(f)$ является аналитической функцией аргумента $\beta \in \mathbb{C}$. Согласно вполне очевидному обобщению теоремы Данфорда об отображении спектра [5] изучение спектральных свойств $\hat{F}^{(L)}\hat{S}_1(\alpha; \cdot)$ можно свести к таковому для отображения $\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot) \equiv \beta\hat{A}(\alpha) - \hat{L}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $\beta \in \mathbb{C}$.

Следуя работе [6], определим $\hat{A}(\alpha)$ -резольвентное множество оператора $\hat{L}(\alpha)$ $\rho(\hat{A}(\alpha); \hat{L}(\alpha))$ как множество всех таких $\beta \in \mathbb{C}$, что “обобщенная $\hat{A}(\alpha)$ -резольвента”

$$\hat{R}_\beta(\hat{A}(\alpha); \hat{L}(\alpha)) \equiv (\beta\hat{A}(\alpha) - \hat{L}(\alpha))^{-1}: Y \rightarrow X$$

определена на всем Y , ограничена на $\rho(\hat{A}(\alpha); \hat{L}(\alpha))$ и удовлетворяет тождеству Гильберта $\hat{R}_\mu - \hat{R}_\nu = (\nu - \mu)\hat{R}_\mu\hat{A}(\alpha)\hat{R}_\nu$ [6]. Обобщенный $\hat{A}(\alpha)$ -спектр оператора $\hat{L}(\alpha)$ $\sigma_{\text{gen}}(\hat{A}(\alpha); \hat{L}(\alpha))$ – множество, дополнительное в $\mathbb{C}$ к $\rho(\hat{A}(\alpha); \hat{L}(\alpha))$.

Методы теории возмущений линейных операторов позволяют проанализировать поведение индекса и дефекта $\hat{L}(\alpha)$ (при достаточно малых по модулю β). Для обоснования возможности подобного исследования введем априорные предположения, справедливость которых можно показать для конкретных кинетических уравнений (см. работы [7]).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. а) Оператор $\hat{L}(\alpha)(\cdot) \equiv (\partial\hat{F}(0; 0)/\partial f)(\alpha; \cdot)$ имеет конечную норму графика и является фредгольмовским нулевого индекса для всех допустимых $\alpha \in \mathbb{R}^1$.

б) Существует $\alpha_0 \in \mathbb{R}^1$ такое, что размерность ядра оператора $\hat{L}(\alpha_0): X_0 \rightarrow Y$ $\operatorname{nul}(\hat{L}(\alpha_0)) = 1$ ($X_0 \subseteq X$).

Если в дополнение к данному предположению выполняется еще следующее требование:

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{F}(0; 0)}{\partial \alpha \partial f} \right) (\alpha; f_0) \notin \operatorname{Ran}(\hat{L}(\alpha_0)), \quad f_0 \in \operatorname{Ker}(\hat{L}(\alpha_0)), \quad (4)$$

то согласно теореме 8.А работы [8] (о достаточных условиях бифуркации решения нелинейного уравнения) существует $\Xi(\alpha) \neq 0$ – вторая, нетривиальная ветвь решения уравнения $\hat{F}(\alpha; f) = 0$ (т.е. $\hat{F}(\alpha; \Xi(\alpha)) \equiv 0$, $\alpha \in O_\alpha(0)$).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Обобщенный существенный $\hat{A}(\alpha)$ -спектр оператора $\hat{L}(\alpha)$ расположен в двух секторах в комплексной β -плоскости с вершинами на оси $\operatorname{Im}(\beta) = 0$: $\sigma_{\text{ess}}(\hat{A}(\alpha); \hat{L}(\alpha)) = \Omega_- \cup \Omega_+$, $\Omega_\pm = \{\pm\beta_{sp} \cup \lambda_\pm; \arg(\lambda_\pm) \leq \chi_\pm, \chi_+ \in (-\pi/2; +\pi/2), \chi_- \in (\pi/2; 3\pi/2), \beta_{sp} > 0\}$; обобщенный точечный $\hat{A}(\alpha)$ -спектр $R\sigma(\hat{A}(\alpha); \hat{L}(\alpha))$ содержит $\hat{A}(\alpha)$ -собственное невырожденное значение $\beta_0(\alpha)$, причем $\operatorname{Re}(\beta_0(\alpha)) \in (-\beta_{sp}; \beta_{sp})$, $\beta_{sp} \in \mathbb{R}_+^1$, $(-\beta_{sp}; \beta_{sp}) \cap (-\beta_{(-)}; \beta_{(+)})$ непусто.

Покажем справедливость следующего вспомогательного утверждения:

ЛЕММА. Существует окрестность $O_\beta(0) \subset \mathbb{C}$ точки $\beta = 0$, где выполнены условия:

- а) размерность ядра оператора $\hat{S} \quad \text{nul}(\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot)) = 1$;
 б) дефект $\hat{S}$ (коразмерность $\text{Ran}(\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot))$ в Y) $\text{def}(\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot)) = 1$ для любого допустимого $\alpha \in O_\alpha(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем B -пространство $X_{\text{red}} \subset X$ с нормой

$$\|f\| = \|f\|_X + \|\hat{L}(\alpha)(f)\|_Y + \|\hat{A}(\alpha)(f)\|_Y$$

(его полнота – прямое следствие замкнутости $\hat{A}(\alpha), \hat{L}(\alpha)$). Сужение $\hat{A}_0 \equiv \hat{A}(\alpha)|_{X_{\text{red}}}$ замыкаемо, так как $\hat{A}_0$ -сходящаяся последовательность в X_{red} является $\hat{A}(\alpha)$ -сходящейся в X ; ввиду того, что $\hat{A}_0$ определен на всем X_{red} , оператор $\hat{A}_0$ замкнут и, следовательно, ограничен [9, теорема 3.5.20]. Таким образом, $\hat{A}(\alpha)$ “относительно $\hat{L}(\alpha)$ -ограничен” (согласно замечанию 1.4 из [9, с. 243]). Определим минимальный приведенный модуль $\gamma(\alpha)$ следующим образом: $\gamma(\alpha) \equiv 1/\|(\hat{L}(\alpha))^{-1}\|_X$ (тут $\hat{L}(\alpha): \tilde{X} \equiv X/\text{Ker}(\hat{L}(\alpha)) \rightarrow Y$, определенный по формуле $\hat{L}(\alpha)(\tilde{f}) = \hat{L}(\alpha)(f)$, $\tilde{f} \in \tilde{X}$, непрерывно обратим и $\gamma(\alpha) > 0$). Согласно теореме 5.3.6 [10], при $|\beta| < \gamma(\alpha)$ оператор $\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot)$ – замкнутый фредгольмовский, причем имеет место устойчивость основных характеристик фредгольмовости $\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot)$:

$$\begin{aligned} n_1 \equiv \text{nul}(\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot)) &\leq \text{nul}(\hat{L}(\alpha)), & n_2 \equiv \text{def}(\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot)) &\leq \text{def}(\hat{L}(\alpha)), \\ i_1 \equiv \text{nul}(\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot)) - \text{def}(\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot)) &= \text{nul}(\hat{L}(\alpha)) - \text{def}(\hat{L}(\alpha)) \equiv i_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $n_1 = n_2 = 1, i_1 = i_2 = 0$. При этом, согласно теореме 5.31 [9] (о постоянстве степени вырождения и дефекта при относительно ограниченном возмущении вида $\beta \hat{A}$ фредгольмовского оператора) для достаточно малого по модулю β значения величин $n = n_1 = n_2$ и индексов $i = i_1 = i_2$ неизменны.

Из доказанного утверждения непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 1. Существует окрестность $O_{\alpha, \beta} = O(\alpha_0) \times O_\beta^{(1)}(0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}$ точки $(\alpha_0; 0)$, $O_\beta^{(1)}(0) \subseteq O_\beta(0)$, где операторнозначная функция $(\beta \hat{A}(\alpha) - \hat{L})^{-1}$ мероморфна с единственным простым полюсом $\beta_0(\alpha)$, являющимся обобщенным простым $\hat{A}(\alpha)$ -собственным значением $\hat{L}(\alpha)$: $\beta_0(\alpha) \hat{A}(\alpha)(h_0(\alpha)) = \hat{L}(\alpha)(h_0(\alpha))$, $h_0(\alpha)$ – обобщенная собственная функция, соответствующая $\beta_0(\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме в окрестности $O_\beta(0)$ точки $\beta = 0$ ядро $\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot)$ одномерно; тогда согласно лемме 9 работы [11] главная часть лорановского ряда обобщенной резольвенты $\hat{R}_\beta(\hat{A}(\alpha); \hat{L}(\alpha))$ по степеням $(\beta - \beta_0)$ содержит единственный член, т.е. β_0 – ее простой полюс. Действительно, если в качестве проекторов в X и Y взять

$$\begin{aligned} \hat{P}_1(\beta_0) &= (2\pi i)^{-1} \cdot \int_{c(\beta_0)} \hat{R}_\beta \hat{A}(\alpha) d\beta \quad (\text{в } X), \\ \hat{P}_2(\beta_0) &= (2\pi i)^{-1} \cdot \int_{c(\beta_0)} \hat{A}(\alpha) \hat{R}_\beta d\beta \quad (\text{в } Y) \end{aligned}$$

(проекторы Н.И. Радбель [12]), контур $c(\beta_0) \subset O_\beta^{(1)}(0)$, то согласно теореме 2 работы [13] о разложении пространств X и Y в пару прямых сумм $\hat{P}_1 X + (\hat{E} - \hat{P}_1)X = X$ и

$\hat{P}_2 Y + (\hat{E} - \hat{P}_2) Y = Y$ для любого ограниченного спектрального множества σ операторного пучка $\beta \hat{A}(\alpha) - \hat{L}(\alpha)$ при $\sigma = \{\beta_0\}$ единственной особой точкой оператор-функции $\hat{R}_\beta$ будет β_0 .

Из предположений 1, 2 и теоремы 1 вытекает справедливость следующего основного утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Если справедливы утверждения 1 и 2, то $(\alpha_0; f = 0) \in \mathbb{R}^1 \times Z_1$ является точкой бифуркации уравнения (1); в ее окрестности существует единственное бифуркационное решение (1) $\Theta(\alpha(\zeta); f(\zeta)) \neq 0$, аналитически зависящее от параметра $\zeta \in \mathbb{R}^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме показано, что в окрестности точки $\alpha = \alpha_0$ оператор $\hat{S}(\beta; \alpha; \cdot)$ фредгольмов нулевого индекса. Далее, там же

$$\hat{U}(\alpha) h_0 \exp(\beta_0(\alpha)x) \equiv \left(\frac{\partial^2 \hat{G}(0; 0)}{\partial \alpha \partial f} \right) (\alpha; h_0(\alpha) \exp(\beta_0(\alpha)x)) \notin \text{Ran} \left(\frac{\hat{A}(\alpha) \partial}{\partial x} - \hat{L} \right),$$

что вытекает из теоремы 2 работы [13] (о разложении пучка линейных операторов), ибо она утверждает, что для пучка $\beta \hat{A}(\alpha) - \hat{L}$ справедливо $\hat{U}(\alpha) \hat{P}_1 X = \hat{P}_2 Y$, т.е. линейная оболочка $\text{span}\{\hat{A}(\alpha) h_0(\alpha)\} = \hat{P}_2 Y$, $\text{Ran}(\beta \hat{A}(\alpha) - \hat{L}) = (\hat{E} - \hat{P}_2) Y$. Таким образом, выполнены требования теоремы 8.А работы [8], а именно:

- 1) $\hat{G}(\alpha, f): O_\alpha(0) \times Z_1 \rightarrow Z_2$ Фреше-аналитичен в $O_\alpha(0) \times Z_1$ по α и f , $\hat{G}(\alpha, 0) = 0 \forall \alpha \in O_\alpha(0)$;
- 2) существует $\alpha_0 \in \mathbb{R}^1$ такое, что $(\partial \hat{G}(0; 0)/\partial f)(\alpha_0, \cdot)$ фредгольмов нулевого индекса и имеет одномерное ядро (это следует из леммы);
- 3) $\hat{U}(\alpha) h_0 \exp(\beta_0(\alpha)x) \notin \text{Ran}(\partial \hat{G}(\alpha_0; 0)/\partial f)$. Следовательно, $(\alpha_0; 0)$ – точка ветвления решения (1) и существует единственная бифуркационная ветвь решения (1) $\Theta(\alpha(\zeta); f(\zeta)) = \Theta(\zeta) \neq 0$, являющаяся аналитической функцией униформизационного параметра $\zeta \in \mathbb{R}^1$.

Итак, мы ответили на оба вопроса, поставленные в начале работы: точка ветвления решений (1) существует и ассоциирована при наложенных на $\hat{G}$ условиях с точкой $(\alpha_0; 0) \in \mathbb{R}^1 \times Z_1$.

3. Пример. В качестве примера рассмотрим ветвление решений задачи с асимптотическими краевыми условиями для уравнения Больцмана [14] в стационарном одномерном случае:

$$c_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \hat{F}_B(\alpha; f),$$

$$\hat{F}_B(\alpha; f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (f(\mathbf{c}') f(\mathbf{c}_*) - f(\mathbf{c}) f(\mathbf{c}_*)) B(\theta, \mathbf{V}) d\mathbf{c}_* d\theta d\varepsilon, \quad (5)$$

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}), \quad \mathbf{c}_* = \mathbf{c} - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}), \quad \mathbf{V} = \mathbf{c}_* - \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \{c_1; c_2; c_3\},$$

$$\mathbf{s} = \{\cos \theta; \sin \theta \cos \varepsilon; \sin \theta \sin \varepsilon\}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad c_k \in \mathbb{R}^1, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\hat{F}_B(\alpha; f)$ – билинейный оператор (“интеграл столкновений”), $B(\theta) = |\mathbf{V}| \sin \theta \cos \theta$. При $x = \pm \infty$ предельными решениями (5) являются функции

$$\omega(\alpha_\pm, \mathbf{c}) = b_1 \exp \left(- \frac{(c_1 - \alpha_\pm)^2 + c_2^2 + c_3^2}{2b_2} \right),$$

где постоянные $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^1$, $\alpha_{\pm} = \alpha(x = \pm\infty)$, – параметры бифуркации (массовые скорости при $x = \pm\infty$); при этом $\hat{F}_B(\omega; \mathbf{c}) = 0$ [7], т.е. $\omega(\alpha; \mathbf{c})$ – “тривиальное” решение (4). Фиксируем $\alpha_- \equiv \alpha$; произведем замену $f(x; \mathbf{c}) = \omega(\alpha) \cdot (1 + \varphi(x, \mathbf{c}))$. Уравнение (5) принимает вид

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \int \omega(\alpha; \mathbf{c}_*) \cdot (\varphi(\mathbf{c}'_*) + \varphi(\mathbf{c}') - \varphi(\mathbf{c}_*) - \varphi(\mathbf{c})) B(\theta, \mathbf{V}) d\mathbf{c}_* d\theta d\varepsilon \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \int \omega(\alpha; \mathbf{c}) \cdot (\varphi(\mathbf{c}')\varphi(\mathbf{c}'_*) - \varphi(\mathbf{c})\varphi(\mathbf{c}_*)) B(\theta, \mathbf{V}) d\mathbf{c}_* d\theta d\varepsilon \\ &\equiv \left(\frac{\partial \hat{F}_B(\alpha; 0)}{\partial \varphi}\right)(\varphi) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \hat{F}_B(\alpha; 0)}{\partial \varphi^2}\right)(\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

Очевидно, $\varphi(+\infty, \mathbf{c}) = \omega(\alpha_+; \mathbf{c})/\omega(\alpha_-; \mathbf{c}) - 1$. Введем гильбертово пространство $H(\mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением $(\varphi_1(\mathbf{c}), \varphi_2(\mathbf{c})) = \int \omega(\alpha; \mathbf{c}) \varphi_1(\mathbf{c}) \varphi_2(\mathbf{c}) d\mathbf{c}$; согласно [14] $\hat{L}_B(\alpha) \equiv \partial \hat{F}_B(\alpha, 0)/\partial \varphi$ является самосопряженным и отрицательно полуопределенным оператором, причем его нуль-множество в H $\text{Ker}(\hat{L}_B(\alpha)) = \{\chi_1 = 1; \chi_2 = c_1; \chi_3 = \mathbf{c}^2\}$. В качестве пространства X_0 , фигурирующего в формулировке предположения 1, возьмем ортогональное дополнение линейного многообразия, натянутого на вектора $c_1 \chi_k$ ($k = 1, \dots, 3$) в H ; единственным базисным элементом ядра $\hat{L}_B(\alpha_0)$ ($\alpha_0 = \sqrt{5/3}$, если $b_2 = 1$) в X_0 является функция $\varphi_0 = \sqrt{3/10}(\chi_1 + \sqrt{5/3}\chi_2 + \sqrt{2/3}\chi_3)$ [7].

Известно (см. [14]), что $\hat{L}_B(\alpha)\varphi = \nu_B \cdot \varphi - \hat{K}_B(\alpha)\varphi$, где

$$\nu_B = 2\pi \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{\pi/2} B(\theta, \mathbf{c} - \mathbf{y}) \omega(\alpha, \mathbf{y}) d\theta d\mathbf{y} > 0,$$

$\hat{K}_B(\alpha)$ – самосопряженный вполне непрерывный в H оператор. Поэтому существует лагуна в обобщенном существенном спектре пучка $\beta c_1 \hat{E} - \hat{L}_B$ [5], [6] вблизи нуля на оси $\text{Im}(\beta) = 0$ комплексной β -плоскости, содержащая обобщенное простое собственное значение $\beta_0(\alpha)$; можно показать [15], что при $\alpha \leq \alpha_0$ $\beta_0(\alpha) \leq 0$, а при $\alpha \geq \alpha_0$ $\beta_0(\alpha) \geq 0$. Наличие лагуны объясняется применимостью в данном случае обобщенной теоремы Вейля–Шехтера об инвариантности при компактных возмущениях существенного спектра линейного оператора $\hat{L}_B$ [7], [16]; действительно, $\sigma_{ess}(\beta c_1 \hat{E}; \hat{L}_B)$ лежит на оси $\text{Im}(\beta) = 0$ и покрывает ее всю, за исключением интервала $\Lambda \equiv (-\beta_{sp}; \beta_{sp})$, $\beta_{sp} = \lim_{c_1 \rightarrow \pm\infty} (-\nu_B(\mathbf{c})/c_1)$ [14]. Ясно, что $\beta_0(\alpha) \in \Lambda$. Таким образом, для уравнения (5) справедливо предположение 2. Согласно теореме С.М. Никольского об общем виде фредгольмовского оператора [17] $\hat{L}_B(\alpha_0)$ является таковым, причем индекс $\hat{L}_B(\alpha_0)$ равен нулю (ибо $\nu_B^{-1} > 0$ всегда существует, и $\hat{K}_B(\alpha)$ компактен в H). Таким образом, оба предположения оказываются для уравнения (5) верными, что позволяет сделать вывод о существовании (единственной) бифуркационной ветви решения (5) при $f(-\infty, \mathbf{c}) = \omega_-$, $f(+\infty, \mathbf{c}) = \omega_+$ в некоторой окрестности точки $\alpha_0 \in O_\alpha(0)$. С физической точки зрения эту вторую ветвь можно идентифицировать с так называемой ударной волной; при этом α_0 – скорость звука.

Авторы искренне признательны Ю.Н. Дрожжину за обсуждение затронутых выше вопросов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [2] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. New York: Academic Press, 1985.
- [3] Ван дер Поль Б., Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М.: ИЛ, 1952.
- [4] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [5] Фимин Н. Н. Спектральные свойства пучков линейных операторов. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 7, 1997.
- [6] Диткин В. В. Некоторые спектральные свойства пучка линейных операторов в банаховом пространстве // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 6. С. 847–857.
- [7] Caflisch R. E., Nicolaenko B. Shock profile solutions of the Boltzmann equation // Comm. Math. Phys. 1982. V. 86. P. 161–194.
- [8] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Fixed-Point Theorems. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [9] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [10] Goldberg S. Unbounded Linear Operators. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [11] Диткин В. А. О спектральных свойствах пучков операторов. М.: ВЦ АН СССР, 1983.
- [12] Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 11. С. 1996–2010.
- [13] Диткин В. А. О некоторых спектральных свойствах пучка линейных ограниченных операторов // Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 1. С. 75–79.
- [14] Grad H. Asymptotic theory of the Boltzmann equation. Pt. 2 // Proc. Intern. Symp. Rarefied Gas Dynamics. V. 1. New York: Academic Press, 1963. P. 26–59.
- [15] Nicolaenko B. Dispersion laws for plane wave propagation // The Boltzmann Equation / ed. F. A. Grunbaum. New York: Courant Inst. Math. Sci., 1971.
- [16] Schechter M. On the essential spectrum of an arbitrary operator // J. Math. Anal. Appl. 1966. V. 13. P. 205–213.
- [17] Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1993.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: arnold@kiam.ru, chuyanov@applmat.msk.su

Поступило
14.04.1997
Исправленный вариант
26.07.1999