Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Арефьев, Л. А. Багиров, Асимптотическое поведение решений задачи Дирихле для параболического уравнения в областях с особенностями, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 12–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1690>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:24:45

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ

В. Н. Арефьев, Л. А. Багиров

Начиная с классической работы И. Г. Петровского [1], ряд математиков изучали краевые задачи для параболических уравнений в гладких нецилиндрических областях (см., например, [2]–[5] и библиографию там). В таких областях возникают особые точки, если граничная поверхность касается гиперплоскости, перпендикулярной оси t . Общие краевые задачи для параболических уравнений в нецилиндрических областях с гладкой “боковой” поверхностью были исследованы в [6], [7].

В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для параболического уравнения второго порядка в областях с негладкой “боковой” поверхностью. Получено асимптотическое разложение решения в окрестности некоторого типа особых точек. Центральным местом работы является доказательство нётеровости модельного оператора с параметром, порожденного однородной задачей Дирихле для уравнения с постоянными коэффициентами в специальной области (§ 2). В случае одномерных параболических уравнений второго порядка наш метод позволяет изучать решения в окрестности более широких классов особых точек (§ 4). Отметим, что разрешимость параболических задач в областях с особенностями другого вида на “боковой” поверхности исследовалась в работах [8], [9]. В [10] получено асимптотическое разложение решения параболического уравнения второго порядка в случае двугранных углов на боковой поверхности цилиндрической области.

§ 1. Постановка задачи. Определения

В ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается параболическое

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–01–16035.

уравнение вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u \equiv & \left[\partial_t - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t) D_x^\beta) + \sum_{|\alpha| \leq 1} b_\alpha(x, t) D_x^\alpha \right] u(x, t) \\ & = f(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

с комплексными коэффициентами $a_{\alpha,\beta}(x, t), b_\alpha(x, t) \in C^\infty(\bar{G})$. Здесь

$$\partial_t = \partial/\partial t, D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}, D_{x_k}^{\alpha_k} = (-i)^{\alpha_k} \partial^{\alpha_k} / \partial x_k^{\alpha_k}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

– мультииндекс, α_k – целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Пусть выполняется условие равномерной параболичности

$$\Re \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x, t) \xi^{\alpha+\beta} \leq -\delta |\xi|^2 \quad \text{при всех } (x, t) \in G, \quad (2)$$

$\xi \in \mathbb{R}^n, \delta = \text{const} > 0$. Предположим, что G ограничена “нижним основанием” $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ при $t = 0$, “верхним основанием” $\Omega_T \subset \mathbb{R}^n$ при $t = T$ и “боковой” поверхностью Γ , трансверсально пересекающейся с плоскостью $t = 0$. Пусть поверхность Γ бесконечно дифференцируема всюду, кроме конечного числа особых точек. Без ограничения общности можно считать, что имеется одна особая точка $(x^0, t^0) \in \Gamma, 0 < t^0 < T$.

Рассмотрим некоторый шар K радиуса $a > 0$, с центром в особой точке (x^0, t^0) . Пусть (y', y_n, τ) прямоугольная система координат с центром в точке (x^0, t^0) , причем $\tau = t - t^0, (y', y_n) = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$ – прямоугольные координаты в гиперплоскости $t = t^0$. Обозначим через G_1 область, задаваемую неравенствами

$$y_n^4 > \sum_{|\beta|=4} b_\beta(y')^\beta + b_0 \tau^2 + g(y'), \quad y_n > 0, \quad (3)$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}), b_0 > 0$ и b_β – постоянные, $\sum_{|\beta|=4} b_\beta(y')^\beta > 0$ при $y' \neq 0$, бесконечно дифференцируемая функция $g(y') = o(|y'|^4)$ при $|y'| \rightarrow 0$. Будем предполагать, что в шаре K область G либо совпадает с $G_1 \cap K$, либо с $K \setminus (\bar{G}_1 \cap \bar{K})$. Обозначим через $\dot{H}^1(G)$ пополнение по норме пространства Соболева–Слободецкого $H_{x,t,2}^{1,1}(G)$ множества всех бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю в некоторой окрестности боковой границы Γ и нижнего основания Ω_0 .

Рассматривается обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (1). По определению, функция $u(x, t) \in \dot{H}^1(G)$ называется обобщенным решением задачи, если выполняется тождество

$$\begin{aligned} \iint_G \left[\partial_t u \cdot \bar{\psi} - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha,\beta}(x, t) D_x^\alpha u \overline{D_x^\beta \psi} \right. \\ \left. + \sum_{|\alpha| \leq 1} b_\alpha(x, t) D_x^\alpha u \cdot \bar{\psi} \right] dx dt = \iint_G f \bar{\psi} dx dt \end{aligned}$$

для любой функции $\psi(x, t) \in H_{x,t,2}^{1,1}(G)$, равной нулю в некоторой окрестности “боковой” границы Γ .

Далее будем рассматривать весовые пространства $H_{\gamma}^{2l,l}(G)$ с нормой

$$\|u\|_{l,\gamma}^2 = \iint_G \sum_{\substack{0 \leq s \leq 2l \\ 2k+|\alpha|=s}} \rho^{\gamma-2(2l-s)} |\partial_t^k D_x^\alpha u|^2 dx dt. \quad (4)$$

В (4) функция $\rho = \rho(x, t)$ – бесконечно дифференцируемая и положительная всюду в $\bar{G}$, кроме особой точки $(x^0, t^0) \in \Gamma$. В окрестности точки (x^0, t^0) во введенных выше локальных координатах (y, τ) она имеет вид $\rho(y, \tau) = (y_1^4 + \dots + y_n^4 + \tau^2)^{1/4}$. Отметим, что вне окрестности точки (x^0, t^0) норма пространства $H_{\gamma}^{2l,l}$ эквивалентна норме пространства Соболева–Слободянского $H_{x,t,2}^{2l,l}$.

§ 2. Свойства решений задачи Дирихле в специальной области

Пусть

$$G_1 = \left\{ (x, t) : (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_n^4 > \sum_{|\beta|=4} b_\beta (x')^\beta + b_0 t^2, x_n > 0 \right\},$$

где b_0 и b_β такие же, что и в (3), $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Мы будем рассматривать область G_0 , которая либо совпадает с G_1 , либо с $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{G}_1$. Пусть $\Gamma = \partial G_0 \setminus \{0, 0\}$, $\rho = (x_1^4 + \dots + x_n^4 + t^2)^{1/4}$ и $H_{\gamma}^{2l,l}(G_0)$ – функциональное пространство с нормой

$$\|u\|_{l,\gamma,G_0}^2 = \iint_{G_0} \sum_{\substack{0 \leq s \leq 2l \\ 2k+|\alpha|=s}} \rho^{\gamma-2(2l-s)} |\partial_t^k D_x^\alpha u|^2 dx dt.$$

Обозначим через Q_j , $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – области, которые являются пересечением G_0 и $S_j = \{(x, t) : 2^j < \rho < 2^{j+1}\}$, а через $\Gamma_j = \partial G_0 \cap S_j$. В области G_0 будем рассматривать решение задачи Дирихле $u(x, t)$ параболического уравнения с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}_0 u \equiv \partial_t u - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}^0 D_x^\beta u) = f \quad (5)$$

такое, что $u \in H_{x,t,2}^{1,1}(Q_j)$ при каждом j и $u|_{\Gamma} = 0$. Нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Если u – определенное выше решение задачи Дирихле для уравнения (5) и $u \in H_{\gamma}^{0,0}(G_0)$, а $f \in H_{\gamma+4(l+1)}^{2l,l}(G_0)$, то в этом случае $u \in H_{\gamma+4(l+1)}^{2(l+1),l+1}(G_0)$ и выполняется оценка*

$$\|u\|_{l+1,\gamma+4(l+1),G_0} \leq c[\|f\|_{l,\gamma+4(l+1),G_0} + \|u\|_{0,\gamma,G_0}]. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области $Q'_0 = Q_{-1} \cup Q_0 \cup Q_1$ функция $f \in H^{2l,l}$. Поэтому в силу результатов о гладкости обобщенных решений внутри области и вблизи гладкого куска границы [11, гл. III, § 12] и известных априорных оценок (см. [6], [7]) имеем неравенство

$$\|u\|_{H^{2(l+1),l+1},(Q_0)}^2 \leq c[\|f\|_{H^{2l,l}(Q'_0)}^2 + \|u\|_{L_2(Q'_0)}^2], \quad (7)$$

в котором c зависит лишь от l, n , константы параболичности δ и коэффициентов $a_{\alpha\beta}^0$. Сделаем в (5) замену переменных $x_i = 2^j x'_i$, $t = 2^{2j} t'$. При этом область Q_j перейдет в область Q_0 , функция $u(2^j x', 2^{2j} t')$ будет обобщенным решением уравнения

$$\partial_t u - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_{x'}^\alpha (a_{\alpha\beta}^0 D_{x'}^\beta u) = f(2^j x', 2^{2j} t') 2^{2j} \quad (8)$$

и на границе Γ будут выполняться нулевые условия Дирихле. Применим к решению уравнения (8) оценку (7) и получим

$$\|u\|_{H^{2(l+1),l+1},(Q_0)}^2 \leq c[\|2^{2j} f\|_{H^{2l,l}(Q'_0)}^2 + \|u\|_{L_2(Q'_0)}^2]. \quad (9)$$

Перейдем в (9) к первоначальным переменным. Тогда

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_j} \sum_{\substack{0 \leq s \leq 2(l+1) \\ s=2i+|\alpha|}} 2^{2js} |\partial_t^i D_x^\alpha u|^2 dx dt \\ & \leq \left[\iint_{Q'_j} \sum_{\substack{0 \leq s \leq 2l \\ s=2i+|\alpha|}} 2^{2j(s+2)} |\partial_t^i D_x^\alpha f|^2 dx dt + \iint_{Q'_j} |u|^2 dx dt \right], \end{aligned}$$

где $Q'_j = Q_{j-1} \cup Q_j \cup Q_{j+1}$. Откуда, после умножения на $2^{\gamma j}$ и суммирования по всем j , получим оценку (6). Лемма доказана.

Рассмотрим преобразование координат $\psi: (x, t) \rightarrow (\omega, \rho)$, где $\omega \in \Omega = \{(x, t) : \rho = 1\}$. Легко видеть, что при $\rho \neq 0$ преобразование ψ – бесконечно дифференцируемое и имеет невырожденный якобиан [12]. При этом область G_0 переходит в $\Omega_0 \times (0, \infty)$, где $\Omega_0 = \Omega \cap G_0$. В уравнении (5), пока формально, сделаем сначала замену переменных ψ , а потом преобразование Меллина

$$\tilde{u}(\omega, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \rho^{i\lambda-1} u(\omega, \rho) d\rho, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Получим уравнение с параметром λ следующего вида

$$P(\omega, D_\omega, \lambda) \tilde{u} \equiv [P_0(\omega) \lambda^2 + P_1(\omega, D_\omega) \lambda + P_2(\omega, D_\omega)] \tilde{u} = \tilde{F}(\omega, \lambda), \quad (10)$$

где $P_0(\omega)$ – гладкая функция, P_k – дифференциальные операторы порядка k на многообразии Ω_0 с гладкими коэффициентами. Функция $\tilde{F}$ – преобразование Меллина функции $f(x(\omega, \rho), t(\omega, \rho)) \cdot \rho^2$. Обозначим через $\mathring{W}^1(\Omega_0)$ пополнение $C_0^\infty(\Omega_0)$ по норме пространства Соболева $W_2^1(\Omega_0)$ с естественной мерой $d\omega$, индуцированной мерой Лебега $dxdt$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. $dxdt = \rho^{n+1}d\rho d\omega$. Операторный пучок (10) не является эллиптическим с параметром в смысле работы [13], так как его коэффициенты могут вырождаться на Ω_0 . Тем не менее, используя параболичность уравнения (5), которое порождает этот пучок, можно исследовать его резольвенту. Введем на Ω_0 оператор $\mathfrak{P}$ с областью определения $D_{\mathfrak{P}} = \mathring{W}^1(\Omega_0)$. Этот оператор на функциях $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$ определяется как $\mathfrak{P}\varphi = P(\omega, D_\omega, \lambda)\varphi$. На $\mathring{W}^1(\Omega_0)$ он определяется с помощью соответствующей билинейной формы. При этом используется тот факт, что оператор P_2 в (10) легко записывается в виде произведения двух дифференциальных операторов 1-го порядка с гладкими коэффициентами.

ТЕОРЕМА 1. *Если уравнение (5) – параболическое, то*

- (i) *для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathfrak{P}$ имеет конечный индекс;*
- (ii) *существуют $\theta \in (0, \pi/2)$ и $N > 0$ такие, что оператор $\mathfrak{P}$ в области*

$$\Lambda_{\theta, N} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\pm\lambda)| < \theta, |\lambda| > N\}$$

имеет ограниченный обратный $R(\lambda): L_2(\Omega_0) \rightarrow \mathring{W}^1(\Omega_0)$;

- (iii) *для любой функции $w \in W^1(\Omega_0)$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется оценка*

$$\|w\|_{\mathring{W}^1(\Omega_0)} + |\lambda| \cdot \|w\|_{L_2(\Omega_0)} \leq c[\|\mathfrak{P}w\|_{L_2(\Omega_0)} + \|w\|_{L_2(\Omega_0)}], \quad (11)$$

где c не зависит от w . Если $|\Im \lambda| < C_1 < \infty$, то постоянную c в (11) можно выбрать не зависящей от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценку (11) достаточно получить для любой функции $w \in C_0^\infty(\Omega_0)$. Для этого возьмем функцию $\varphi_\varepsilon(\rho) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ такую, что $\varphi_\varepsilon(\rho) = \sqrt{\varepsilon/M} \Psi(\varepsilon \ln \rho)$, где $\Psi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\Psi(y) \equiv 1$ при $|y| < 1$, $\Psi(y) \equiv 0$ при $|y| > 2$, $M = \|\Psi\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}^2$. Тогда $\int_0^\infty \varphi_\varepsilon^2(\rho) \rho^{-1} d\rho = 1$. Рассмотрим функцию $U_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(\rho) \rho^{-i\lambda} w(\omega)$, где $w(\omega) \in C_0^\infty(\Omega_0)$. Подставим U_ε в неравенство (6) при $l = 0$. После перехода к координатам (ω, ρ) будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |\varphi_\varepsilon(\rho)|^2 \rho^{(\gamma+n+1+2\Im \lambda)} d\rho \cdot \int_{\Omega_0} (|\lambda|^2 \cdot |w|^2 + |\nabla_\omega w|^2) d\omega \\ & \leq \int_0^\infty |\varphi_\varepsilon(\rho)|^2 \rho^{(\gamma+n+1+2\Im \lambda)} d\rho \cdot \int_{\Omega_0} (|P(\omega, D_\omega, \lambda)w|^2 + |w|^2) d\omega + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (12)$$

Выберем γ так, чтобы $\gamma + n + 2 + 2\Im\lambda = 0$. Тогда из (12) вытекает

$$\|w\|_{\dot{W}^1(\Omega_0)}^2 + |\lambda|^2 \cdot \|w\|_{L_2(\Omega_0)}^2 \leq c(\|P(\omega, D_\omega, \lambda)w\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \|w\|_{L_2(\Omega_0)}^2) + o(\varepsilon), \quad (13)$$

где c не зависит от w и от ε . Переходя в (13) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим оценку (11). Если $|\Im\lambda| < C_1$, то постоянную c в (11) можно выбрать не зависящей от λ . Эта оценка позволяет установить конечномерность пространства $\text{Ker } \mathfrak{P}$ и замкнутость $\Im\mathfrak{P}$. Чтобы завершить доказательство пункта (i) теоремы, достаточно получить аналогичную оценку для сопряженной задачи. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_0^* \equiv \partial_t - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_x^\alpha (\overline{a_{\alpha\beta}^0} D^\beta)$, формально сопряженный к оператору $\mathcal{L}_0$ в (5). Легко видеть, что

$$\iint_{G_0} \mathcal{L}_0 u \bar{v} dx dt = \iint_{G_0} u \cdot \overline{\mathcal{L}_0^* v} dx dt \quad (14)$$

для любых $u, v \in C_0^\infty(G_0)$.

Пусть $P^*(\omega, D_\omega, \lambda)$ – операторный пучок, порожденный оператором $\mathcal{L}_0^*$ так же, как $P(\omega, D_\omega, \lambda)$ был порожден оператором $\mathcal{L}_0$. Введем оператор $\mathfrak{P}^*$ с областью определения $\dot{W}^1(\Omega_0)$, который на $C_0^\infty(G_0)$ определяется так:

$$\mathfrak{P}^* \varphi = P^*(\omega, D_\omega, \bar{\lambda} - in) \varphi.$$

На $\dot{W}^1(\Omega_0)$ оператор $\mathfrak{P}^*$ задается соответствующей билинейной формой так же, как и оператор $\mathfrak{P}$. Из (14) с помощью рассуждений, аналогичных приведенным при выводе неравенства (11), можно получить тождество

$$\int_{\Omega_0} \mathfrak{P} w \bar{z} d\omega = \int_{\Omega_0} w \overline{\mathfrak{P}^* z} dw \quad \forall w, z \in C_0^\infty(\Omega_0). \quad (15)$$

С учетом известных результатов об оценках решений квазиэллиптических краевых задач [14] выводится также неравенство

$$\|z\|_{\dot{W}^1(\Omega_0)} + |\lambda| \cdot \|z\|_{L_2(\Omega_0)} \leq c(\|\mathfrak{P}^* z\|_{L_2(\Omega_0)} + \|z\|_{L_2(\Omega_0)}) \quad (16)$$

при любой $z \in C_0^\infty(\Omega_0)$ и любом $\lambda \in \mathbb{C}$. Постоянная c в (16) не зависит от z . Следовательно, равенство (15) и оценка (16) справедливы для всех $z \in \dot{W}^1(\Omega_0)$. Таким образом $\mathfrak{P}^*$ является сопряженным к $\mathfrak{P}$ и из (16) вытекает, что $\text{Coker } \mathfrak{P}$ конечномерно. Из (11) и (16) следует также, что в области $\Lambda_{\theta, N}$ при $N > 0$ – достаточно большом $\text{Ker } \mathfrak{P}$ и $\text{Coker } \mathfrak{P}$ имеют нулевую размерность. Это доказывает пункт (ii). Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Оператор $R(\lambda): L_2(\Omega_0) \rightarrow L_2(\Omega_0)$ является конечномероморфной операторной функцией λ и $\|R(\lambda)\| = O(|\lambda|^{-1})$ при $|\Re \lambda| \rightarrow \infty$, $|\Im \lambda| \leq C_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждений (i) и (ii) теоремы 1 в силу работы [15] вытекает, что $R(\lambda)$ – конечномероморфная функция λ . Оценка $\|R(\lambda)\| \leq c|\lambda|^{-1}$ при $|\Im \lambda| < C_1$ и $|\lambda| > N$ получается из неравенства (11).

ТЕОРЕМА 2. Если на прямой $\Im \lambda = h$, $h = (4l + 2 - n - \beta)/2$ нет точек спектра операторного пучка, то при любых $f \in H_{\beta}^{2l,l}(G_0)$ существует единственное решение $u \in H_{\beta}^{2(l+1),l+1}(G_0)$ уравнения (5) такое, что $u|_{\Gamma} = 0$ и выполняется неравенство

$$\|u\|_{l+1,\beta,G_0} \leq c\|f\|_{l,\beta,G_0}, \quad (17)$$

где c не зависит от u и f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$u(\omega, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} R(\lambda) \tilde{F}(\omega, \lambda) \rho^{-i\lambda} d\lambda, \quad (18)$$

где $\tilde{F}(\omega, \lambda)$ означает преобразование Меллина по ρ функции $F(\omega, \rho) = f(x(\omega, \rho), t(\omega, \rho)) \cdot \rho^2$. Так как $f \in H_{\beta}^{2l,l}(G_0)$, то функция $F(\omega, \rho)$ будет удовлетворять оценке

$$\int_0^{\infty} \rho^{\beta-4l+n-3} \|F\|_{L_2(\Omega_0)}^2 d\rho \leq c\|f\|_{l,\beta,G_0}^2. \quad (19)$$

Из (19) в силу равенства Парсеваля для преобразования Меллина имеем

$$\int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} \|\tilde{F}\|_{L_2(\Omega_0)}^2 d\lambda \leq c\|f\|_{l,\beta,G_0}^2, \quad h = (4l + 2 - n - \beta)/2. \quad (20)$$

Поскольку на прямой $\Im \lambda = h$ нет полюсов оператора $R(\lambda)$, то уравнение (10) имеет единственное решение $\tilde{u} = R(\lambda) \tilde{F} \in \mathring{W}^1(\Omega_0)$ и для него справедливо неравенство

$$\|\tilde{u}\|_{\mathring{W}^1(\Omega_0)} + |\lambda| \cdot \|\tilde{u}\|_{L_2(\Omega_0)} \leq c\|\tilde{F}\|_{L_2(\Omega_0)}, \quad (21)$$

где $\Im \lambda = h$ и c не зависит от $\tilde{F}$ и λ . Поэтому в силу равенства Парсеваля и оценок (20), (21) получаем

$$\int_0^{\infty} \rho^{\beta-4l+n-3} \left(\|u\|_{\mathring{W}^1(\Omega_0)}^2 + \|\rho D_{\rho} u\|_{L_2(\Omega_0)}^2 \right) d\rho \leq c\|f\|_{l,\beta,G_0}^2. \quad (22)$$

Возвращаясь в (18) к переменным (x, t) , будем иметь u – решение уравнения (5). Из (22) следует, что $u \in H_{\beta-4(l+1)}^{0,0}(G_0)$. В области Q_j функция $u \in H_{x,t,2}^{1,1}(Q_j)$ и $u|_{\Gamma_j} = 0$ при любых j . По лемме 1 $u \in H_{\beta}^{2(l+1),l+1}(G_0)$. Неравенство (17) вытекает из (22) и (6). Единственность следует из (17).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u \in H_{\beta}^{2(l+1), l+1}(G_0)$ – решение уравнения (5) и $u|_{\Gamma} = 0$. Функция $f \in H_{\gamma}^{2l, l}(G_0)$, $\gamma < \beta$, $h_1 = (4l + 2 - n - \gamma)/2$, и на прямой $\Im \lambda = h_1$ нет точек спектра операторного пучка $\mathfrak{P}$. Тогда

$$u = \sum_j \sum_{s=0}^{k_j-1} a_{js} \rho^{-i\lambda_j} \ln^s \rho \Psi_{js}(\omega) + w, \quad (23)$$

где функция $w \in H_{\gamma}^{2l, l}(G_0)$ и выполняется оценка

$$\|w\|_{l+1, \gamma, G_0} \leq c \|f\|_{l, \gamma, G_0}. \quad (24)$$

Числа λ_j – точки спектра задачи (10) кратности k_j , лежащие в полосе $h < \Im \lambda < h_1$. Функции $\Psi_{js}(\omega)$ – соответствующие собственные и присоединенные функции и не зависят от u , постоянные a_{js} зависят от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы следует, что функция $\tilde{F}(\omega, \lambda)$ в (18) аналитическая в полосе $h < \Im \lambda < h_1$, поэтому $\tilde{u} = R(\lambda) \tilde{F}$ в этой полосе будет иметь конечное число полюсов. На прямой $\Im \lambda = h_1$ будет выполняться неравенство

$$\int_{-\infty + ih_1}^{\infty + ih_1} \left(\|\tilde{u}\|_{\tilde{W}^1(\Omega_0)}^2 + |\lambda|^2 \cdot \|\tilde{u}\|_{L_2(\Omega_0)}^2 \right) d\lambda \leq c \|f\|_{l, \gamma, G_0}^2. \quad (25)$$

Проводя далее такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 2.2 работы [3], получим

$$u(\omega, \rho) = \sqrt{2\pi i} \sum_j \text{Res}(\rho^{-i\lambda} R(\lambda) \tilde{F}(\omega, \rho)) + w(\omega, \rho), \quad (26)$$

где

$$w(\omega, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + ih_1}^{\infty + ih_1} \rho^{-i\lambda} R(\lambda) \tilde{F}(\omega, \lambda) d\lambda.$$

В силу (25) и равенства Парсеваля справедлива оценка

$$\int_0^{\infty} \rho^{\gamma - 4l + n - 3} \left(\|w\|_{\tilde{W}^1(\Omega_0)}^2 + \|\rho D_{\rho} w\|_{L_2(\Omega_0)}^2 \right) d\rho \leq c \|f\|_{l, \gamma, G_0}^2. \quad (27)$$

Найдем вычеты функции $\rho^{-i\lambda} R(\lambda) \tilde{F}(\omega, \lambda)$ и подставим их в (26). Возвращаясь к переменным (x, t) , будем иметь равенство (23), в котором функция w является решением уравнения (5). Из (27) следует, что для этой функции $w \in H_{\gamma - 4(l+1)}^{0,0}(G_0)$, $w \in H_{x,t,2}^{1,1}(Q_j)$ при любых j и $w|_{\Gamma_j} = 0$. Применим лемму 1 и получим $w \in H_{\gamma}^{2(l+1), l+1}(G_0)$. Неравенство (24) вытекает из (27) и (6). Теорема доказана.

§ 3. Задача Дирихле в ограниченной области

Рассмотрим задачу Дирихле для равномерно параболического уравнения (1) в ограниченной области G , удовлетворяющей условиям § 1. Не нарушая общности будем считать, что особая точка $(x^0, t^0) = (0, t^0) \in \Gamma$ и в некоторой окрестности этой точки уравнение граничной поверхности Γ имеет вид

$$x_n^4 = \sum_{|\beta|=4} b_\beta (x')^\beta + b_0 \tau^2,$$

где $\tau = t - t^0$ и коэффициенты b_0, b_β такие же, как и в (3). Этого можно добиться, если сделать бесконечно дифференцируемое преобразование координат в окрестности точки (x^0, t^0) . В (1) возьмем старшую однородную часть оператора $\mathcal{L}$ с “замороженными” коэффициентами в точке (x^0, t^0) и получим оператор $\mathcal{L}_0$ с постоянными коэффициентами вида (5). После замены переменных $\psi: (x, \tau) \rightarrow (\omega, \rho)$ и преобразования Меллина он перейдет в оператор с параметром на многообразии Ω_0 вида (10). Согласно теореме 1 и следствию из нее $\mathfrak{P}$ имеет обратный оператор $R(\lambda): L_2(\Omega_0) \rightarrow \mathring{W}^1(\Omega_0)$, который является конечномероморфной функцией $\lambda \in \mathbb{C}$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in H_\beta^{2l, l}(G)$ и согласована с нулем при $t = 0$. Пусть $h = (4l + 2 - n - \beta)/2$ и на прямой $\Im \lambda = h$ нет полюсов оператор-функции $R(\lambda)$. Тогда при выполнении конечного числа условий вида $F_i[f] = 0$, где F_i – линейные функционалы в $H_\beta^{2l, l}(G)$, существует решение $u \in H_\beta^{2(l+1), l+1}(G)$ уравнения (1) такое, что $u|_{\Gamma \setminus \{x^0, t^0\}} = 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть u – обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (1) и $f \in H_\beta^{2l, l}(G)$. Пусть $\beta < 4l + 2$, $h = (4l + 2 - n - \beta)/2$ и на прямой $\Im \lambda = h$ нет полюсов оператор-функции $R(\lambda)$. Тогда в окрестности точки $(x^0, t^0) = (0, t^0) \in \Gamma$ функция u представима в виде

$$u = \Theta \cdot \sum_j \sum_{s=0}^{k_j-1} a_{j,s} \rho^{-i\lambda_j} \ln^s \rho P_{sjq}(\rho \ln^q \rho) + w,$$

где λ_j – полюса $R(\lambda)$ кратности k_j в полосе $-n/2 < \Im \lambda < h$, $a_{j,s}$ – постоянные, зависящие от u . Функции P_{sjq} – полиномы от $(\rho \ln^q \rho)$ степени $[h - \Im \lambda_j]$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, зависящими от $\omega \in \Omega_0$, q – некоторые целые числа. Функция w удовлетворяет условиям

$$\|\Theta w\|_{l+1, \beta, G} \leq c \left(\|f\|_{l, \beta, G} + \|u\|_{\mathring{H}^1(G)} \right),$$

$$\Theta(\mathcal{L}u - f) \in H_\beta^{2l, l}(G).$$

Функция Θ – произвольная бесконечно дифференцируемая и равная нулю вне достаточно малой окрестности точки $(x^0, t^0) \in \Gamma$.

Доказательство теорем 4 и 5 проводится с помощью разбиения единицы аналогично доказательству теорем 6.1 и 6.3 работы [3]. При этом вне окрестности особой точки (x^0, t^0) используются известные результаты о разрешимости и гладкости решений параболических краевых задач в гладких областях (см. [3], [4]). В окрестности точки (x^0, t^0) задача сводится к модельной задаче с постоянными коэффициентами и применяются результаты § 2.

§ 4. Одномерное параболическое уравнение

Из предыдущих результатов (теоремы 4 и 5) следует, что вопросы разрешимости и асимптотического поведения решений задачи Дирихле для уравнения (1) в рассматриваемой области сводятся к нахождению собственных чисел операторного пучка (10). При $n = 1$ область G_0 из § 2 может быть двух видов:

- 1) G_0 совпадает с K_0 ,
- 2) $G_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{K_0}$, где

$$K_0 = \{(x, t), x \in \mathbb{R}_+^1, t \in \mathbb{R}^1, -\alpha x^2 < t < \alpha x^2, \alpha > 0\}.$$

Однако метод, изложенный выше, позволяет в случае $n = 1$ исследовать задачу Дирихле и при более сложной структуре особых точек.

Например, в качестве модельных могут выступать области:

$$K_1 = \{(x, t), x \in \mathbb{R}_+^1, t \in \mathbb{R}^1, -\beta x^2 < t < \alpha x^2, \alpha > 0, \beta > 0\},$$

$K_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{K_1}$; K_3 – область с границей, состоящей из двух кусков парабол $\Gamma_3 = \{(x, t); t = \alpha x^2, t \geq 0, x \leq 0\}, \Gamma'_3 = \{(x, t); t = -\beta x^2, t < 0, x > 0\}$ и включающая полуось $t > 0$; K_4 – область с той же границей, что и область K_3 , но не включающая полуось $t < 0$. Во всех этих случаях также справедливы теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3. В этом параграфе мы выпишем трансцендентные уравнения для нахождения собственных чисел операторного пучка (10) в случае области K_1 и K_3 .

При $n = 1$ модельным уравнением (5) является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (28)$$

Если λ – собственное число операторного пучка (10), то функция

$$u(x, t) = \rho^\mu \Psi(\xi) \quad (29)$$

является решением уравнения (28) и равна нулю на границе соответствующей области $\partial K_j \setminus \{0\}$. В (29) функция $\rho = (x^4 + t^2)^{1/4}$, $\mu = -i\lambda$, ξ – координата точки на кривой

$$S_j = \{(x, t) : x^4 + t^2 = 1, (x, t) \in K_j\} \quad j = 1, 3.$$

Нетрудно показать, что при $\Im \mu \neq 0$ такая задача в каждой из указанных выше областей не может иметь нетривиального решения. После подстановки (29) в (28) с учетом нулевого условия Дирихле получаем спектральную задачу на кривой S_1 или S_3 . Откуда и выводятся трансцендентные уравнения для определения собственных чисел. В случае области K_1 это уравнение имеет вид

$$D_{-\mu-1}(1/\sqrt{2\alpha}) \cdot D_\mu(1/\sqrt{2\beta}) = 0, \quad (30)$$

а для области K_3 получается уравнение

$$D_{-\mu-1}(-1/\sqrt{2\alpha}) \cdot D_\mu(1/\sqrt{2\beta}) = 0. \quad (31)$$

В (30), и в (31) через $D_\nu(z)$ обозначены функции параболического цилиндра [16, гл.8]. Из свойств функций параболического цилиндра, в частности, следует, что в асимптотическом разложении решения по степеням ρ положительные показатели определяются нулями функции $D_\mu(1/\sqrt{2\beta})$, а отрицательные, соответственно, – нулями функций $D_{-\mu-1}(1/\sqrt{2\alpha})$ и $D_{-\mu-1}(-1/\sqrt{2\alpha})$. Выводу уравнений (30), (31) и аналогичных уравнений для других областей, исследованию их корней, а также доказательству ряда свойств решений для $n = 1$ будет посвящена другая работа авторов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Петровский И. Г. О решении краевой задачи для уравнения теплопроводности // Уч. записки МГУ. 1934. № 2. С. 55–59.
- [2] Kohn J. J., Nirenberg L. Degenerate elliptic–parabolic equations of second order // Comm. Pure and Appl. Math. 1967. V. 20. № 4. P. 797–872.
- [3] Кондратьев В. А. Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях // Тр. ММО. 1967. Т. 15. С. 400–451.
- [4] Михайлов В. П. О задаче Дирихле для параболического уравнения // Матем. сб. 1963. Т. 61(103). № 1. С. 40–64.
- [5] Фейгин В. И. О гладкости решений краевых задач для параболических и вырождающихся эллиптических уравнений // Матем. сб. 1970. Т. 82(124). № 4(8). С. 551–573.
- [6] Ивасишен С. Д. Оценки функции Грина однородной первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Укр. матем. ж. 1969. Т. 21. № 1. С. 15–27.
- [7] Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН. 1965. Т. 83. С. 3–162.
- [8] Бадерко Е. А. О параболической задаче в области простого вида // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 17–21.
- [9] Орынбасаров М. О. О разрешимости краевых задач для параболического и полипараболического уравнений в нецилиндрической области с негладкими боковыми границами // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 1. С. 151–161.
- [10] Доан Ван Нгок. Асимптотика решений краевых задач для параболических уравнений второго порядка в окрестности угловой точки границы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 1. С. 34–36.
- [11] Ладыженская Л. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [12] Багиров Л. А. Априорные оценки, теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1979. Т. 110(152). № 4(12). С. 475–492.
- [13] Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161.
- [14] Arkerud. On L_p -estimates for quasi-elliptic boundary problems // Math. Scand. 1969. V. 24. P. 141–144.
- [15] Блехер П. М. Об операторах, зависящих мероморфно от параметра // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1969. № 5. С. 30–36.
- [16] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции II. М.: Наука, 1974.