Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Белошапка, Инварианты CR-многообразий, связанные с касательной квадрикой, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 42–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1692>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:12:14

ИНВАРИАНТЫ $\mathbb{C}\mathbb{R}$ -МНОГООБРАЗИЙ, СВЯЗАННЫЕ С КАСАТЕЛЬНОЙ КВАДРИКОЙ

В. К. Белошапка

1. Введение

Рассмотрим росток M гладкой вещественной поверхности в начале координат комплексного линейного пространства размерности $N \geq 2$. Тогда в некоторой окрестности нуля M можно задать системой соотношений

$$\varphi^p = 0, \quad p = 1, \dots, k \quad (1 \leq k \leq N - 1).$$

Если $\{\text{grad } \varphi(0), p = 1, \dots, k\}$ $\mathbb{C}$ -линейно независимы, то после комплексно-линейного преобразования уравнение M можно записать в виде $\text{Im } W = F(Z, \bar{Z}, \text{Re } W)$; $Z = (Z^1, \dots, Z^n)$, $W = (W^1, \dots, W^k)$, $N = n + k$, F — гладкое отображение окрестности нуля в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^k$, причем F и dF равны нулю при $Z = 0$, $\text{Re } W = 0$. Среди таких многообразий имеются (k, n) -квадрики, т.е. поверхности вида

$$\text{Im } W = \langle Z, Z \rangle, \quad (1)$$

где $\langle Z, Z \rangle$ — это эрмитова форма со значениями в $\mathbb{R}^k$ или, другими словами, набор из k скалярных эрмитовых форм $(\langle Z, Z \rangle^1, \dots, \langle Z, Z \rangle^k)$, $\langle Z, Z \rangle^p = H^p Z \cdot \bar{Z}$, H^p — эрмитова матрица порядка n , $p = 1, \dots, k$. Имеется голоморфная (полиномиальная) замена координат [1], после выполнения которой уравнение M примет вид

$$\text{Im } W = \langle Z, Z \rangle + \text{члены степени три и более}, \quad (2)$$

т.е. можно обеспечить касание третьего порядка. В этом случае (k, n) -квадрика, обозначим ее через Q , называется касательной квадрикой к поверхности M . Отметим, что размерность M равна $k + 2n$, $\text{Im } W = 0$ — уравнение касательной плоскости в начале координат, $W = 0$ — уравнение комплексной касательной, т.е. n — это размерность комплексной касательной, а $\langle Z, Z \rangle$ — форма Леви поверхности M в начале координат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 093-01-00225.

Приведем некоторые сведения о касательных квадраках.

УТВЕРЖДЕНИЕ [2], [3], [4]. Если $\text{Aut}(M)$ – это группа биголоморфных в окрестности начала координат преобразований $\mathbb{C}^{n+k}$, переводящих росток многообразия M в начале координат в себя, то

(1.1) $\dim \text{Aut}(M) \leq \dim \text{Aut}(Q)$, где Q – касательная квадрака;

(1.2) $\dim \text{Aut}(Q)$ конечна в том и только в том случае, если выполнены следующие два условия:

координаты формы $\langle Z, Z \rangle$ линейно независимы,

из $\langle e, z \rangle = 0$ для всех z следует, что $e = 0$, т.е. $\bigcap_1^k \text{Ker } H^p = 0$.

(Квадрика и форма, удовлетворяющие этим условиям называются невырожденными.)

(1.3) Пусть $\langle z, z \rangle$ невырождена, тогда алгебра голоморфных векторных полей на $Q - g(Q)$ состоит из полей $X = f \frac{\partial}{\partial z} + g \frac{\partial}{\partial w}$, где

$$f = p + Cz + aw + A(z, z) + B(z, w),$$

$$g = q + sw + 2i\langle z, p + aw \rangle + r(w, w),$$

все выражения полилинейны, причем

$$\text{Im } q = 0, \quad 2\text{Re}\langle Cz, z \rangle = s\langle z, z \rangle, \quad \langle A(z, z), z \rangle = 2i\langle z, a\langle z, z \rangle \rangle,$$

$$\text{Im } r = 0, \quad \text{Re}\langle B(z, u), z \rangle = r(\langle z, z \rangle, u), \quad \text{Im}\langle B(z, \langle z, z \rangle), z \rangle = 0.$$

(1.4) Вводя в $g(Q)$ естественную градуировку (z “весит” 1, w – 2, $\frac{\partial}{\partial z} - (-1)$ и $\frac{\partial}{\partial w} - (-2)$), мы получаем разложение алгебры $g(Q)$ на однородные компоненты $g(Q) = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2$, $g_{-2} + g_{-1}$ – это подалгебра, порожденная группой аффинных преобразований $\{z \rightarrow p + z, w \rightarrow q + w + 2i\langle z, p \rangle\}$, транзитивно действующей на Q , $\dim g_{-2} = k$, $\dim g_{-1} = 2n$. Подалгебра g_0 – это алгебра группы $\text{LAut}(Q)$ линейных преобразований Q вида $\{z \rightarrow Cz, w \rightarrow sw, \text{ где } \langle Cz, Cz \rangle = s\langle z, z \rangle\}$. При $k = 1$ $\dim g_0 = n^2 + 1$, $\dim g_1 = 2n$, $\dim g_2 = 1$. При больших значениях k набор размерностей зависит от квадраки, так для квадраки общего положения при $k = 2$ $\dim g_0 = n + 1$, $\dim g_1 = 0$, $\dim g_2 = 0$, а при $3 \leq k \leq n^2 - 3$ $\dim g_0 = 2$, $\dim g_1 = 0$, $\dim g_2 = 0$.

(1.5) Положим

$$\Gamma(p) = \{z \in \mathbb{CP}^{n-1} : \text{rank}_{\mathbb{C}}(H^1 z, \dots, H^k z) \leq p\},$$

$$\Gamma r(p) = \{z \in \mathbb{RP}^{2n-1} : \text{rank}_{\mathbb{R}}(H^1 z, \dots, H^k z) \leq p\},$$

$$\gamma(q) = \{w \in \mathbb{CP}^{k-1} : \text{rank}(w^1 H^1 + \dots + w^k H^k) \leq q\},$$

$$\gamma r(q) = \{u \in \mathbb{RP}^{k-1} : \text{rank}(u^1 H^1 + \dots + u^k H^k) \leq q\}.$$

Пусть имеются два СР-многообразия M_1 и M_2 типа (k, n) , чьи локальные уравнения записаны в форме (2) и $\langle z, z \rangle_1$, $\langle z, z \rangle_2$ – их формы

Леви соответственно, $f: M_1 \rightarrow M_2$ – локальный CR-диффеоморфизм класса C^2 вида $z \rightarrow Cz + \dots$, $w \rightarrow sw + \dots$, $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$, $s \in \text{GL}(k, \mathbb{R})$. Тогда, если $\Gamma_j(p), \text{Gr}_j(p), \gamma_j(q), \gamma_{r_j}(q)$ – система, соответствующая $\langle z, z \rangle_j$, то $C(\Gamma_1(p)) = \Gamma_2(p)$, $C(\text{Gr}_1(p)) = \text{Gr}_2(p)$, $s'(\gamma_1(q)) = \gamma_2(q)$, $s'(\gamma_{r_1}(q)) = \gamma_{r_2}(q)$ (s' – транспонированная s), т.е. эти системы множеств CR-инвариантны.

(1.6) Если из координатных матриц $H^1, \dots, H^k$ нельзя составить невырожденной линейной комбинации, то квадратика называется нуль-квадрикой. При этом многочлен $P_H(t) = \det(t^1 H^1 + \dots + t^k H^k)$ равен нулю тождественно и

$$\gamma(n-1) = \{w \in \mathbb{CP}^{k-1} : P_H(t) = 0\} = \mathbb{CP}^{k-1}.$$

2. Проективные инварианты квадратки

Квадрика является алгебраическим множеством, поэтому можно рассмотреть $\overline{Q}$ – замыкание в $\mathbb{CP}^{n+k}$. Если однородные координаты в $\mathbb{CP}^{n+k}(t, z, w)$, $t \in \mathbb{C}^1$, $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^k$ ввести так, что $Z = z/t$, $W = w/t$, то уравнение $\overline{Q}$ будет выглядеть следующим образом $\text{Im } w\bar{t} = \langle z, z \rangle$. Все точки аффинной части квадратки являются неособыми, как это видно из уравнения (1), более того, аффинная часть квадратки является аффинно-однородной. Если $k = 1$, то $\overline{Q}$ остается неособой и проективно однородной. Наблюдение, на котором основана данная работа, состоит в том, что при $k > 1$ это не так. На бесконечности у квадратки появляются особенности. Простейшая характеристика особой точки – это размерность касательного пространства в ней. Ниже мы осуществляем соответствующее построение.

Пусть $e_j(t, z, w) = \text{grad}(-\text{Im } w^j \bar{t} + \langle z, z \rangle^j)$. Положим для $(t, z, w) \in \overline{Q}$

$$\begin{aligned} \sigma r(t, z, w) &= \text{rank}_{\mathbb{R}}(e_1(t, z, w), \dots, e_k(t, z, w)), \\ \sigma c(t, z, w) &= \text{rank}_{\mathbb{C}}(e_1(t, z, w), \dots, e_k(t, z, w)), \end{aligned}$$

т.е. это вещественный и комплексный ранги системы градиентов.

ЛЕММА 1. *Величины σr и σc сохраняются при регулярных комплексных отображениях.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гиперповерхности $\{-\text{Im } w^j \bar{t} + \langle z, z \rangle^j = 0\}$ в аффинной части $\mathbb{CP}^{n+k}$ пересекаются трансверсально, поэтому определяющие их многочлены порождают идеал множества Q [5], а, следовательно, и идеал множества $\overline{Q}$. Таким образом, касательное пространство к $\overline{Q}$ задается уравнениями $d(-\text{Im } w^j \bar{t} + \langle z, z \rangle^j) = 0$, $j = 1, \dots, k$. Размерность касательного пространства инварианта при регулярных изоморфизмах. А

δr — это разница между размерностью объемлющего пространства и размерностью касательного. Поэтому δr не может измениться. Аналогичное рассуждение, проведенное для комплексной части касательного пространства, доказывает инвариантность δc .

В результате мы получаем две стратификации $\overline{Q}$ на точки с различными значениями δr и δc , которые на Q тривиальны (вся аффинная часть попадает в страты максимальных рангов), а на бесконечности характеризуют особые точки. Пусть $p = 0, 1, \dots, k$, положим

$$\begin{aligned}\delta r(p) &= \{(t, z, w) \in \overline{Q} : \delta r(t, z, w) \leq p\}, \\ \delta c(p) &= \{(t, z, w) \in \overline{Q} : \delta c(t, z, w) \leq p\}.\end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Имеют место вложения:*

- (2.1) $\delta r(0) \subset \delta r(1) \subset \dots \subset \delta r(k-1) \subset \delta r(k) = \overline{Q}$,
 $\delta c(0) \subset \delta c(1) \subset \dots \subset \delta c(k-1) \subset \delta c(k) = \overline{Q}$,
- (2.2) $\delta r(p) \subset \delta c(p) \subset \delta r(2p)$,
- (2.3) $Q \subset \delta r(k) \setminus \delta r(k-1)$, $Q \subset \delta c(k) \setminus \delta c(k-1)$.

Утверждение вполне очевидно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пусть имеются два CR-многообразия M_1 и M_2 типа (k, n) , $\langle Z, Z \rangle_1$, $\langle Z, Z \rangle_2$ — их формы Леви соответственно, $f: M_1 \rightarrow M_2$ — локальный CR-диффеоморфизм класса C^2 вида*

$$Z \rightarrow CZ + \dots, \quad W \rightarrow sW + \dots, \quad C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \quad s \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}).$$

Тогда:

- (3.1) $\langle CZ, CZ \rangle_2 = s\langle Z, Z \rangle_1$ и, тем самым, $Z \rightarrow CZ$, $W \rightarrow sW$ есть линейный изоморфизм касательных квадрик,
- (3.2) проективизация этого линейного отображения $t \rightarrow t$, $z \rightarrow Cz$, $w \rightarrow sw$ переводит систему множеств $\{\delta c(p)\}_1$ в $\{\delta c(p)\}_2$, а $\{\delta r(p)\}_1$ в $\{\delta r(p)\}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (3.1) Соотношение есть запись CR-инвариантности формы Леви.

(3.2) Проективное отображение сохраняет размерность касательного пространства.

Ввиду (2.3) при изучении особых точек можно ограничиться бесконечно удаленной плоскостью $\{t = 0\}$. Бесконечно удаленные точки $\overline{Q}$ задаются следующими уравнениями

$$Q^\infty = \overline{Q} \setminus Q = \{t = 0, \langle z, z \rangle = 0\}.$$

Уравнения касательной имеют следующий вид

$$\mathrm{Re}(iwd\bar{t} - itd\bar{w} + 2\langle z, dz \rangle) = 0.$$

Если обозначить через $x \cdot \bar{y}$ стандартную эрмитову форму $x^1 \bar{y}^1 + \dots + x^n \bar{y}^n$ в $\mathbb{C}^n$, а через H^p – матрицу формы $\langle z, z \rangle^p$, то уравнение можно записать так:

$$\operatorname{Re}(-i\bar{w}^p dt + i\bar{t}dw^p + 2H^p \bar{z} - dz) = 0, \quad p = 1, \dots, k,$$

а уравнения комплексной касательной так:

$$-i\bar{w}^p dt + i\bar{t}dw^p + 2H^p \bar{z} - dz = 0, \quad p = 1, \dots, k.$$

Если обозначить h^{pq} q -ю координату вектора $H^p z$, то получим следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Величины $\delta c(t, z, w)$ и $\delta r(t, z, w)$ – это ранг комплексной матрицы размера $k \times (n + k + 1)$ вида $H = (iw, 2Hz, -itE)$, где E – это единичная матрица размером $k \times k$*

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} iw^1 & 2h^{11}z & 2h^{12}z & \dots & 2h^{1n}z & -it & \dots & 0 \\ iw^2 & 2h^{21}z & 2h^{22}z & \dots & 2h^{2n}z & 0 & -it & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ iw^k & 2h^{k1}z & 2h^{k2}z & \dots & 2h^{kn}z & 0 & \dots & -it \end{pmatrix}$$

и ранг вещественной матрицы размера $k \times 2(n + k + 1)$, полученной из первой отделением в каждом столбце действительной и мнимой части.

Величины $\delta c(0, z, w)$ и $\delta r(0, z, w)$ аналогичным образом связаны с матрицей размера $k \times (n + 1)$ вида $H^\infty = (iw, 2Hz)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *$\delta r(p)$ и $\delta c(p)$ – это пересечение квадрики с некоторыми проективными множествами, которые задаются условиями на ранг матрицы $\tilde{H}$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.

$$(5.1) \quad \delta r(0) = \delta c(0) = \emptyset,$$

$$(5.2) \quad \text{если } p > \min(k, n + 1), \quad p \neq k, \text{ то } \delta c(p) = \emptyset,$$

$$(5.3) \quad \text{если } p > \min(k, 2n + 1), \quad p \neq k, \text{ то } \delta r(p) = \emptyset,$$

$$(5.4) \quad \text{бесконечно удаленная часть всякой квадрики содержит } \mathbb{CP}^{k-1}, \text{ состоящее из точек вида } \{(0, 0, w) : w \in \mathbb{CP}^{k-1}\}, \text{ которое содержится в } \delta c(1) \text{ и в } \delta r(2), \text{ причем } \{(0, 0, w) : w \in \mathbb{CP}^{k-1}, \operatorname{Im} w^p \bar{w}^q = 0\} \subset \delta r(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (5.1) Если ранги равны нулю, то все элементы равны нулю. Это означает, что $w = 0$ и $H^p z = 0$ для всех p . Но в силу невырожденности формы $\langle z, z \rangle$ отсюда следует, что $z = 0$ и $t = 0$, так как иначе точка имеет ранг k .

(5.2) Если $p \neq k$, то $\delta c(p)$ не содержит конечных точек, но в этом случае ранг – это ранг матрицы H^∞ размером $k \times (n + 1)$.

(5.3) Аналогично.

$$(5.4) \quad \text{В этом случае } H^\infty = (iw, 0).$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим случай гиперквадрики ($k = 1$). Тогда $G = (iw, 2h^1z, \dots, 2h^nz, -it)$, при этом, в силу (5.1), $\delta c(0) = \delta r(0) = \emptyset$, т.е. $\overline{Q} = \delta c(1) = \delta r(1)$. Все точки неособые. Группа проективных преобразований $\mathbb{CP}^{n+1}$ транзитивно действует на $\overline{Q}$.

ПРИМЕР 2 ($k = 2$). В этом случае

$$H^\infty = \begin{vmatrix} iw^1 & 2H^1z \\ iw^2 & 2H^2z \end{vmatrix},$$

$$\delta c(1) = \{ \{(0, 0, w) : w \in \mathbb{CP}^1\} \cup \{(0, z, w) : z \in \Gamma(1), \\ l \cdot w = 0, l = (l^1, l^2) \in \gamma(n-1)\} \} \cap Q^\infty,$$

т.е. z — это собственный вектор задачи $l^1 H^1 z + l^2 H^2 z = 0$, а l — соответствующее собственное значение.

$$\delta r(1) = \{ \{(0, 0, w) : w \in \mathbb{CP}^1, \text{Im } w^1 \overline{w}^2 = 0\} \cup \{(0, z, w) : z \in \Gamma r(1), \\ l \cdot w = 0, l = (l^1, l^2) \in \gamma r(n-1)\} \} \cap Q^\infty,$$

т.е. z — это собственный вектор задачи $l^1 H^1 z + l^2 H^2 z = 0$, а l — соответствующее вещественное собственное значение.

Из примера видно, что введенные здесь инвариантные множества $\delta c(p)$ и $\delta r(p)$ связаны с системой инвариантов $\Gamma(p)$, $\Gamma r(p)$, $\gamma(q)$, $\gamma r(q)$. Однако инвариантные множества $\Gamma(p)$ и $\Gamma r(p)$ расположены в пространстве переменных z , множества $\gamma(q)$ и $\gamma r(q)$ — в пространстве переменных w и u , тогда как уравнения, задающие множества $\delta c(p)$ и $\delta r(p)$ связывают обе группы переменных.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим в качестве примера ситуацию $k = n = 2$. Как известно [6], имеются всего три попарно неэквивалентные $(2, 2)$ -квадрики

$$\begin{vmatrix} 2 \operatorname{Re} z^1 \overline{z}^2 \\ 2 \operatorname{Im} z^1 \overline{z}^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} |z^1|^2 \\ |z^2|^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} |z^1|^2 \\ 2 \operatorname{Re} z^1 \overline{z}^2 \end{vmatrix}.$$

В восьмимерном вещественном пространстве $(2, 2)$ -квадрик квадрики первого и второго типа — это две области, разделенные гиперповерхностью, состоящей из квадрик третьего типа.

Первый тип:

$$\delta c(1) = \{(0, 0, 0; w^1, w^2)\} \cup \{(0; 0, z; w, iw)\} \cup \{(0; 0, z; w, -iw)\}, \\ \delta r(1) = \{(0; 0, 0, w^1, w^2), \text{ где } \operatorname{Im} w^1 \overline{w}^2 = 0\}.$$

Второй тип:

$$\delta c(1) = \{(0; 0, 0, w^1, w^2)\}, \\ \delta r(1) = \{(0; 0, 0, w^1, w^2), \text{ где } \operatorname{Im} w^1 \overline{w}^2 = 0\}.$$

Третий тип:

$$\delta c(1) = \{(0; 0, 0; w^1, w^2)\} \cup \{(0; 0, z; 0, w)\}, \\ \delta r(1) = \{(0; 0, 0, w^1, w^2), \text{ где } \operatorname{Im} w^1 \overline{w}^2 = 0\} \cup \{(0; 0, z; 0, w)\}.$$

3. Проективные автоморфизмы квадрики

Выписанные выше системы подмножеств $\overline{Q}$ инвариантны по отношению как к аффинным, так и проективным автоморфизмам. Группа линейных автоморфизмов $\text{LAut}(Q)$ состоит из преобразований вида

$$t \rightarrow t, \quad z \rightarrow Cz, \quad w \rightarrow sw,$$

с соотношением $\langle Cz, Cz \rangle = s\langle z, z \rangle$ эта группа является подгруппой в группе $\text{PAut}(Q)$ проективных преобразований $\overline{Q}$. $\text{PAut}(Q)$ при $k = 1$ исчерпывает всю группу автоморфизмов $\text{Aut}(Q)$. При $k > 1$ это, вообще говоря, не так. Например, при $k = 2$ $\text{Aut}(Q)$ может состоять из квадратично-рациональных преобразований, хотя для квадрики общего положения группа содержит лишь линейные преобразования [7]. Наша ближайшая цель – получить описание $\text{PAut}_0(Q)$ – группы дробно-линейных преобразований Q , сохраняющих начало координат в $\mathbb{C}^{n+k}$. Всякое такое преобразование имеет вид

$$Z \rightarrow \frac{C(Z + aW)}{1 - (\beta Z + \gamma W)}, \quad W \rightarrow \frac{s(W + bZ)}{1 - (\beta Z + \gamma W)}. \quad (3)$$

Записывая, что (3) есть автоморфизм квадрики, получаем

$$\text{Re}(i(1 - (\overline{\beta Z + \gamma W}))s(W + bZ) + \langle C(Z + aW), C(Z + aW) \rangle) = 0 \quad (4)$$

при $W = U + i\langle Z, Z \rangle$.

Отделяя однородные компоненты (4), получаем $b = 0$,

$$\begin{aligned} \langle CZ, CZ \rangle &= s\langle Z, Z \rangle, \quad \text{т.е. } (C, s) \in \text{LAut}(Q), \\ \beta ZU &= 2i\langle Z, aU \rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

если $\text{Re } \gamma(U) = r(U)$, $\text{Im } \gamma(U) = \sigma(U)$, то

$$\sigma(U)U = \langle aU, aU \rangle, \quad (6)$$

$$r(\langle Z, Z \rangle)U - r(U)\langle Z, Z \rangle = 2\text{Im}\langle a\langle Z, Z \rangle, aU \rangle. \quad (7)$$

При $k = 1$ эти соотношения принимают вид

$$\beta Z = 2i\langle Z, a \rangle, \quad \sigma(U) = \langle a, a \rangle U,$$

и мы получаем известную формулу

$$\begin{aligned} Z &\rightarrow \frac{C(Z + aW)}{1 - (2i\langle Z, a \rangle + (r + i\langle a, a \rangle)W)}, \\ W &\rightarrow \frac{sW}{1 - (2i\langle Z, a \rangle + (r + i\langle a, a \rangle)W)}. \end{aligned} \quad (8)$$

ПРИМЕР 4. Среди нуль-квадрик имеются квадрики, такие, что все их автоморфизмы – дробно-линейные преобразования. Шевченко [9] построила классификацию квадрик коразмерности два. Всякая нуль-квадрика, имеющая нелинейные автоморфизмы при $k = 2$ задается парой форм следующего вида

$$\begin{aligned}\langle Z, Z \rangle^1 &= \sum_{j=1}^s \operatorname{Re} Z^{3j-2} \overline{Z}^{3j-1} + [\tilde{Z}, \tilde{Z}]^1, \\ \langle Z, Z \rangle^2 &= \sum_{j=1}^s \operatorname{Re} Z^{3j-2} \overline{Z}^{3j} + [\tilde{Z}, \tilde{Z}]^2,\end{aligned}$$

где $[\tilde{Z}, \tilde{Z}]^j$ – эрмитовы формы от $\tilde{Z} = (Z^{3s+1}, \dots, Z^n)$, такие, что из их матриц $\tilde{H}^1$ и $\tilde{H}^2$ можно составить невырожденную линейную комбинацию. Ежов и Шмальц [10], пользуясь классификацией Шевченко, выписали формулы для нелинейных преобразований квадрики коразмерности два. В частности, все нелинейные автоморфизмы данной квадрики – это дробно-линейные преобразования вида

$$\begin{aligned}Z^{3p-2} &\rightarrow Z^{3p-2} \Big/ \left(1 - 2i \sum_1^s \bar{a}^j Z^{3j-2} \right), \\ Z^{3p-1} &\rightarrow (Z^{3p-1} + a^p W^1) \Big/ \left(1 - 2i \sum_1^s \bar{a}^j Z^{3j-2} \right), \\ Z^{3p} &\rightarrow (Z^{3p} + a^p W^2) \Big/ \left(1 - 2i \sum_1^s \bar{a}^j Z^{3j-2} \right), \quad p = 1, \dots, s; \\ Z^p &\rightarrow Z^p \Big/ \left(1 - 2i \sum_1^s \bar{a}^j Z^{3j-2} \right), \quad p = 3s+1, \dots, n, \\ W^1 &\rightarrow W^1 \Big/ \left(1 - 2i \sum_1^s \bar{a}^j Z^{3j-2} \right), \\ W^2 &\rightarrow W^1 \Big/ \left(1 - 2i \sum_1^s \bar{a}^j Z^{3j-2} \right).\end{aligned}$$

4. Преобразования квадрики как подгруппа группы Кремоны

Туманов доказал [11], что всякое CR-отображение произвольной невырожденной (k, n) -квадрики в другую невырожденную (k, n) -квадрику является рациональным отображением, степень которого (как числителя и знаменателя) равномерно ограничена единой константой m , зависящей лишь от n и k .

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Можно положить $m = 6(n + k)$, т.е. если $Z \rightarrow R(Z, W)/T(Z, W)$, $W \rightarrow S(Z, W)/T(Z, W)$ произвольное СР-отображение невырожденной (k, n) -квадрики в другую невырожденную (k, n) -квадрику, где $R = (R^1, \dots, R^n)$, $S = (S^1, \dots, S^k)$, T – взаимно простые многочлены, то $\deg R^p$, $\deg S^q$, $\deg T$ не превосходят $6(n + k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство получается применением рассуждения Туманова с учетом того, что если $X = f \frac{\partial}{\partial z} + g \frac{\partial}{\partial w} \in g(Q)$, то f и g – многочлены степени не выше второй (см. (1.3)).

Эта оценка не является точной. При $k = 1$ m можно положить равным 1 (см. [12]). При $k = 2$ можно положить $m = 2$ (см. [7], [10]). Наша гипотеза состоит в том, что всегда можно положить $m = k$.

В связи с этим вопросом можно сформулировать следующую задачу, которая является вполне независимой и на которую мне хотелось бы обратить внимание математической общественности.

Пусть G – подгруппа группы бирациональных автоморфизмов пространства $\mathbb{C}^n$ (группы Кремоны), обладающая свойством равномерной ограниченности степени, т.е. существует постоянная m , такая, что для любого $g \in G$, где $g = (x \rightarrow A(x)/B(x))$ и дробь несократима, $\deg A \leq m$ и $\deg B \leq m$. Требуется дать описание таких групп G .

Задача описания таких групп не представляется безнадежной, так как, в некотором смысле, таких групп не должно быть. Действительно, при подстановке одного рационального отображения в другое степень должна возрастать. Имеющиеся примеры – это исключения. Задача состоит в том, что их нужно явно описать. Ниже приводятся известные нам примеры.

ПРИМЕР 5.

(А) Дробно-линейные преобразования, т.е. автоморфизмы $\mathbb{C}P^n$

$$x^p \rightarrow \frac{\sum a_j^p x^j}{\sum \alpha_j x^j},$$

здесь $m = 1$.

(В) Матрично дробно-линейные преобразования: $n = p^2$, Z, A, B, C, D – матрицы размером $p \times p$. $Z \rightarrow (AZ + B)/(CZ + D)$, здесь $m = p$.

(С) Треугольные преобразования: $x \rightarrow x + f(y)$, $y \rightarrow y$, где f – произвольная рациональная функция, $m = \deg f$.

(D) Автоморфизмы невырожденных квадрик.

(Е) Прямое произведение отображений пунктов (А)–(D) и они же, записанные в других координатах, бирационально связанных с исходными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белошাপка В. К. О построении нормальной формы уравнения поверхности высокой коразмерности // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 2. С. 3–9.
- [2] Белошাপка В. К. Теорема единственности для автоморфизмов невырожденной поверхности в комплексном пространстве // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 3. С. 17–22.
- [3] Белошাপка В. К. О голоморфных преобразованиях квадрики // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 2. С. 203–219.
- [4] Белошাপка В. К. Геометрические инварианты CR-многообразий // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 5. С. 3–12.
- [5] Шафаревич И. Р. Алгебраическая геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1968.
- [6] Лобода А. В. Порождающие вещественно аналитические многообразия коразмерности 2 в $\mathbb{C}^2$ и их биголоморфные отображения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. № 5. С. 970–990.
- [7] Абросимов А. В. Описание локально биголоморфных автоморфизмов стандартных квадрик коразмерности два // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 10. С. 3–52.
- [8] Палинчак Н. Ф. О $\mathcal{C}$ -жестких квадриках // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 2.
- [9] Шевченко С. Н. Описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов квадрик коразмерности два и их классификация // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 5. С. 142–153.
- [10] Ezov V., Schmalz G. Holomorphic Automorphisms of Quadrics of Codimension 2. Preprint. Bohn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1993.
- [11] Туманов А. Е. Конечность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 3. С. 651–659.
- [12] Chern S. S., Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133. № 3–4. P. 219–271.