Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ф. Бикбаев, О невырожденности амплитудно-частотной модуляции для конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 53–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1693>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:57:59

О НЕВЫРОЖДЕННОСТИ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИИ ДЛЯ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. Ф. Бикбаев

Введение

В работах [1] и [2] была доказана важная для приложений теорема об “амплитудно-частотной” модуляции для конечнозонных решений уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ). Эта модель является простейшей, поскольку точки ветвления λ_i соответствующей гиперэллиптической спектральной кривой Γ вещественны: $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$, $N < \infty$. Актуальной задачей является перенос этих результатов на случай кривых с комплексными точками ветвления, поскольку именно эта ситуация реализуется для большей части интегрируемых моделей. Эта проблема обсуждалась в ряде работ (см., например, [3], [4]), однако используемые в этих работах эвристические соображения, неудовлетворительны с математической точки зрения.

В этой работе мы демонстрируем характер возникающих трудностей и способы их преодоления на примере комплексных конечнозонных для физически важных моделей – нелинейного уравнения Шредингера (НШ)

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, \quad (1)$$

и модели Синус–Гордон (СГ)

$$u_{xt} = \sin u. \quad (2)$$

Именно эти модели обсуждались в работах [3], [4]. Используемая нами техника является модификацией методики [2] и основана на элементарном комплексном анализе.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00193.

Автор благодарен рецензенту за критические замечания, существенно улучшившие качество статьи.

§ 1. Модель НШ

Рассмотрим гиперэллиптическую риманову поверхность Γ конечного рода $g > 0$, заданную уравнением

$$z^2(\lambda) = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j), \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad (3)$$

$$\lambda_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, 2g+2.$$

Точка P на кривой Γ задается парой $P = (\lambda, z)$. Мы будем иметь в виду обычное представление Γ в виде двулистного накрытия комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Выберем на Γ канонический базис циклов $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ с матрицей пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$, $i = 1, \dots, g$; $j = 1, \dots, g$.

Пусть ∞^+ и ∞^- — две бесконечно удаленные точки на Γ : $\lambda(\infty^{\pm}) = \infty$, $\sigma \infty^+ = \infty^-$, где σ — гиперэллиптическая инволюция на кривой Γ , именно, $\sigma: (\lambda, z) \rightarrow (\lambda, -z)$. Определим стандартные в теории конечнозонных решений модели НШ абелевы интегралы $\Omega_1(P)$ и $\Omega_2(P)$, имеющие асимптотики

$$\Omega_1(P) = \mp \left(\lambda + \alpha_1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad P \rightarrow \infty^{\pm}, \quad (4)$$

$$\Omega_2(P) = \mp \left(\lambda^2 + \alpha_2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad P \rightarrow \infty^{\pm},$$

и нормированные условиями

$$\oint_{a_i} d\Omega_j = 0; \quad i = 1, \dots, g; \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

Обозначим через $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ g -мерные векторы b -периодов этих абелевых интегралов

$$V_j^{(1)} = \oint_{b_j} d\Omega_1(P), \quad V_j^{(2)} = \oint_{b_j} d\Omega_2, \quad (6)$$

$$j = 1, \dots, g.$$

Справедливо следующее утверждение, усиливающее результат работы [3].

ТЕОРЕМА 1. 1) *Отображение* $F: \mathbb{C}^{2g+2} \rightarrow \mathbb{C}^{2g+2}$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g+2}) \xrightarrow{F} (V^{(1)}, V^{(2)}, \alpha_1, \alpha_2) \quad (7)$$

невырождено почти всюду. 2) В частности, это отображение невырождено, если нули дифференциала $d\Omega_1(P)$ не совпадают с нулями дифференциала $d\Omega_2(P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что из пункта 2) теоремы 1 и аналитичности отображения F следует утверждение пункта 1). Для доказательства пункта 2) будем рассуждать “от противного”.

Предположим F вырождено, т.е. существует такая гладкая деформация $\Gamma(\tau)$, $\tau \ll 1$, исходной кривой $\Gamma = \Gamma(0)$, что в то время, как левая часть (7) изменяется на $O(\tau)$, правая часть в (7) изменяется на $O(\tau^2)$. Это утверждение в дальнейшем будем называть предположением.

Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Рассмотрим на кривой Γ следующие объекты:

$$v_j(P) := \frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_j(P, \tau) \Big|_{\tau=0}, \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Здесь через $\Omega_j(P, \tau)$ обозначены абелевы интегралы, определенные с помощью (4) и (5), на деформированной римановой поверхности Γ .

ЛЕММА 1. $v_j(P)$, $j = 1, 2$ – суть мероморфные однозначные функции на Γ . Их особенности могут иметь лишь вид простых полюсов, расположенных в тех точках ветвления λ_k , где

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \lambda_k \Big|_{\tau=0} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (8) легко видеть, что $v_j(P)$ локально, в окрестности любой точки $P \in \Gamma$, являются мероморфными функциями на Γ . Особенности при $P \rightarrow \infty^\pm$ отсутствуют: в силу асимптотик (4) и нашего предположения о деформации имеем

$$v_j(\infty^\pm) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Покажем, что эти функции глобально определены на Γ , т.е. докажем их однозначность на Γ . Действительно, в силу нормировок (6) a -периоды этих функций равны нулю. Согласно нашему предположению b -периоды также равны нулю. Это и означает, что $v_j(P)$ – корректно определенные на Γ мероморфные функции. Из определения этих функций (8) нетрудно извлечь, что вне точек ветвления λ_k эти функции голоморфны. В окрестности точек ветвления имеем

$$v_j(P) \sim c_{k,j} \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda_k \Big|_{\tau=0} \frac{1}{\sqrt{\lambda - \lambda_k}}, \quad (9)$$

где $k = 1, \dots, 2g+2$, $j = 1, 2$, а коэффициенты $c_{k,j}$ обращаются в нуль тогда и только тогда, когда $d\Omega_j(\lambda_k) = 0$. Формула (9) описывает структуру особенностей функций $v_j(P)$, $j = 1, 2$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Имеют место следующие представления*

$$d\Omega_1(P) = \frac{A(\lambda)}{z(\lambda)} d\lambda, \quad d\Omega_2(P) = \frac{B(\lambda)}{z(\lambda)} d\lambda, \quad (10)$$

$$v_1(P) = \frac{\hat{A}(\lambda)}{z(\lambda)}, \quad v_2(P) = \frac{\hat{B}(\lambda)}{z(\lambda)}, \quad (11)$$

Здесь $A, B, \hat{A}, \hat{B}$ – полиномы от λ , причем

$$\deg A(\lambda) = g + 1, \quad \deg B(\lambda) = g + 2, \quad (12)$$

$$\deg \hat{A}(\lambda) \leq g, \quad \deg \hat{B}(\lambda) \leq g. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (10) и (12) общеизвестны и легко выводятся из теоремы Лиувилля, гиперэллиптичности римановой поверхности Γ и асимптотик (4). Формулы (11), (13) выводятся аналогично с учетом леммы 1 и зануления функций $v_j(P)$, $j = 1, 2$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Имеет место тождество*

$$\frac{v_2(P)}{v_1(P)} = \frac{d\Omega_2(P)}{d\Omega_1(P)} \quad \forall P \in \Gamma. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на Γ следующий объект

$$\dot{\Omega}_2(P) = \frac{d}{d\tau} \Omega_2(\tilde{P}(P, \tau), \tau) \Big|_{\tau=0}, \quad (15)$$

где точка $\tilde{P}(P, \tau) \in \Gamma(\tau)$ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \Omega_1(\tilde{P}, \tau) &= \Omega_1(P, \tau), \\ P &\in \Gamma(0), \quad \tilde{P} \in \Gamma(\tau). \end{aligned} \quad (16)$$

Это уравнение однозначно разрешимо относительно $\tilde{P} = \tilde{P}(P, \tau)$ для почти всех $P \in \Gamma(0)$. Это следует из теоремы о неявной функции. Действительно, проблемы с разрешимостью уравнения (16) могут возникнуть лишь в $2g + 2$ точках на Γ , совпадающих с нулями дифференциала $d\Omega_1(P)$. Исследуем поведение функции $\dot{\Omega}_2(P)$ в этих точках. Из (12), (13) легко вывести формулу

$$\dot{\Omega}_2(P) = v_2(P) - v_1(P) \frac{d\Omega_2}{d\Omega_1}(P), \quad (17)$$

из которой, в частности, следует, что $\dot{\Omega}_2(P)$ может иметь в нулях $d\Omega_1(P)$ особенности типа полюсов.

Однако, на самом деле, никаких особенностей там нет, поскольку

$$\dot{\Omega}_2(P) \equiv 0 \quad \forall P \in \Gamma. \quad (18)$$

Действительно, из (17) следует, что $\dot{\Omega}_2(P)$ – мероморфная функция на Γ . Подсчитаем ее нули и полюса. Покажем, что

$$\dot{\Omega}_2(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, \dots, 2g + 2. \quad (19)$$

Этот факт проще всего увидеть из формулы (17) с учетом того, что $\dot{\Omega}_2(\sigma P) = -\dot{\Omega}_2(P)$, а члены порядка $O(1/\sqrt{\lambda - \lambda_k})$ в правой части (17) сокращаются. Кроме того, функция $\dot{\Omega}_2(P)$ имеет нули в бесконечно удаленных точках $P = \infty^{(\pm)}$. Действительно, точки $\tilde{P}(\infty^{(\pm)}, \tau)$, вычисляемые из уравнения (16), совпадают с бесконечно удаленными точками на $\Gamma(\tau)$:

$$\tilde{P}(\infty^{\pm}, \tau) = (\infty, \pm) \in \Gamma(\tau).$$

Это значит, что они не зависят от τ , и при вычислении $\dot{\Omega}_2(\infty^{(\pm)})$ мы не должны учитывать в (15) зависимость от τ посредством $\tilde{P}(\infty^{(\pm)}, \tau)$. Иными словами,

$$\dot{\Omega}_2(\infty^{(\pm)}) = v_2(\infty^{(\pm)}) = 0. \quad (20)$$

Итак, мероморфная функция $\dot{\Omega}_2(P)$ имеет по крайней мере $(2g + 4)$ нулей и не более, чем $(2g + 2)$ полюсов. Это значит, что эта функция тождественно равна нулю. Лемма 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Наличие нулей в бесконечно удаленных точках (20) у функции $\dot{\Omega}_2(P)$ не удастся усмотреть из представления (17). Действительно, на первый взгляд кажется, что в этой формуле нуль функции $v_1(P)$ гасится полюсом функции $(d\Omega_2/d\Omega_1)(P)$, $P \rightarrow \infty^{\pm}$. Это отличает нашу ситуацию от модели КдФ (см [2]), а также СГ, где “дополнительный” нуль в бесконечно удаленной точке можно было найти из представления типа (17).

ЛЕММА 4. В условиях теоремы 1 справедливы тождества

$$v_1(P) = v_2(P) \equiv 0 \quad \forall P \in \Gamma. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества (14) и формул (10), (11) следует, что функция $v_2(P)$ имеет на Γ нули более, чем в $2(g+2)$ точках, совпадающих с нулями $d\Omega_2(P)$ и $v_1(P)$. Здесь использовано то обстоятельство, что нули $d\Omega_2(P)$ и $d\Omega_1(P)$ не совпадают. С другой стороны, согласно (11) и (13), число нулей функции не превышает $2g$. Противоречие. Следовательно, $v_2(P) \equiv 0$, что, с учетом (14), влечет $v_1(P) \equiv 0$. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. *Деформация спектральной кривой Γ тривиальна:*

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \lambda_k|_{\tau=0} = 0, \quad k = 1, \dots, 2g+2. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 и того обстоятельства, что в локальном представлении (9) хотя бы один из коэффициентов $c_{k,j}$ не равен нулю (что является следствием условия теоремы 2 о несовпадении нулей дифференциалов $d\Omega_1(P)$ и $d\Omega_2(P)$) немедленно следует искомое равенство (22). Лемма 5 доказана.

Таким образом, мы пришли к противоречию с нашим исходным Предположением о нетривиальности деформации $\Gamma(\tau)$. Теорема 1 доказана полностью.

§ 2. Модель Синус–Гордон

В этом разделе мы используем старые обозначения для стандартных объектов конечнозначной теории СГ (2). Спектральную кривую будем по-прежнему обозначать через Γ , пару абелевых интегралов $\Omega_1(P)$ и $\Omega_2(P)$ и т.п.

Мы делаем это, чтобы не загромождать суть дела новыми обозначениями и сделать аналогию с § 1 предельно ясной.

Несингулярная гиперэллиптическая риманова поверхность Γ рода $g > 0$ задается уравнением

$$z^2(\lambda) = \lambda \prod_{j=1}^{2g} (\lambda - \lambda_j), \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad (23)$$

где точки ветвления λ_i комплексны. Пусть Γ^+ – верхний лист кривой Γ , а $\Gamma^- = \sigma\Gamma^+$ – ее нижний лист. Выберем канонический базис циклов на Γ ($a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$) и определим абелевы интегралы $\Omega_1(P)$ и $\Omega_2(P)$, нормированные условием зануления a -периодов (5) и фиксированные асимптотиками в точках $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$, являющихся точками ветвления кривой Γ .

$$\begin{aligned} \Omega_1(P) &\rightarrow \sqrt{\lambda} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), & \lambda \rightarrow \infty, \\ \Omega_2(P) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O(\sqrt{\lambda}), & \lambda \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ – векторы b -периодов интегралов $\Omega_1(P)$ и $\Omega_2(P)$ соответственно. Имеет место аналог теоремы 1, описывающий “частотное” отображение для модели СГ.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение $\Phi: \mathbb{C}^{2g} \rightarrow \mathbb{C}^{2g}$ вида*

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}) \xrightarrow{\Phi} (V^{(1)}, V^{(2)}) \quad (25)$$

обладает следующими свойствами невырожденности.

- 1) Φ невырождено всюду для $g = 1$.
- 2) Φ невырождено почти всюду для $g > 1$.
- 3) В случае $g > 1$ для невырожденности Φ достаточно, чтобы число общих нулей дифференциалов $d\Omega_1(P)$ и $d\Omega_2(P)$, лежащих на верхнем листе Γ^+ и не совпадающих с точками ветвления, было меньше двух.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пункт 2), очевидно, является следствием пункта 3) и аналитичности отображения Φ .

Аналогично (10) дифференциалы $d\Omega_1(P)$ и $d\Omega_2(P)$ могут быть записаны в виде

$$d\Omega_1(P) = \frac{A_g(\lambda)}{z(\lambda)} d\lambda, \quad d\Omega_2(P) = \frac{B_g(\lambda)}{z(\lambda)} d\lambda, \quad (26)$$

где $A_g(\lambda)$ и $B_g(\lambda)$ – полиномы степени g , и кроме того, $B_g(\lambda)|_{\lambda=0} \neq 0$. В терминах этих полиномов пункт 3) теоремы 1 формулируется так: Полином $A_g(\lambda)$ либо не имеет общих нулей с $B_g(\lambda)$, либо $A_g(\lambda)$ и $B_g(\lambda)$ имеют лишь один общий нуль, не совпадающий с точкой ветвления $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, \dots, 2g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Основная линия рассуждений следует методике § 1. Приведем здесь лишь те фрагменты доказательства, которые отличаются от § 1. Вновь предполагается, что Φ – вырожденное отображение и конструируются мероморфные функции $v_1(P)$ и $v_2(P)$, соответствующие абелевым интегралам (24). Легко убедиться, что функции $v_j(P)$, $j = 1, 2$, допускают представление

$$v_1(P) = \frac{\lambda \hat{A}_{g-1}(\lambda)}{z(\lambda)}, \quad v_2(P) = \frac{\lambda \hat{B}_{g-1}(\lambda)}{z(\lambda)}, \quad (27)$$

где $\hat{A}_{g-1}(\lambda)$ и $\hat{B}_{g-1}(\lambda)$ – полиномы по λ , степень которых не выше $g - 1$. Формулы (27) являются следствием представлений

$$\Omega_1(P) = \int_0^P d\Omega_1(P),$$

$$\Omega_2(P) = \int_\infty^P d\Omega_2(P)$$

для абелевых интегралов $\Omega_j(P)$, $j = 1, 2$, а также того факта, что точки ветвления $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ не зависят от τ .

ЛЕММА 6. *Имеет место тождество*

$$\lambda A_g(\lambda) \widehat{B}_{g-1}(\lambda) \equiv \widehat{A}_{g-1}(\lambda) B_g(\lambda) \quad \forall \lambda. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тем же способом, что и в лемме 3, устанавливается тождество (14). (При этом для доказательства вспомогательного тождества $\widehat{\Omega}_2(P) \equiv 0$ можно пользоваться как определением (15), так и представлением (17).) Сравнивая (14), (26) и (27), приходим к искомому тождеству (28). Лемма 6 доказана.

Из леммы 6 немедленно следуют утверждения:

- а) $\widehat{A}_{g-1}(0) = 0$;
- б) $\deg \widehat{B}_{g-1}(\lambda) \leq g - 2$;
- в) полином $A_g(\lambda)$ имеет не менее двух общих нулей с полиномом $B_g(\lambda)$.

Очевидно, в условиях теоремы 2 последнее условие не выполнено. Следовательно, с необходимостью $\widehat{A}_{g-1}(\lambda) = \widehat{B}_{g-1}(\lambda) \equiv 0$, и должны быть выполнены тождества $v_1(P) = v_2(P) \equiv 0$.

Остается сделать последний шаг – вывести из этого тождества аналог леммы 5. Для $g > 1$ это очевидным образом следует из нашего ограничения на нули $d\Omega_1(P)$ и $d\Omega_2(P)$. Итак, $d\lambda_i/d\tau|_{\tau=0} = 0$, $i = 1, \dots, 2g$. В случае $g = 1$ единственный нетривиальный случай, заслуживающий анализа – это попадание совместного нуля наших дифференциалов в точку ветвления $\lambda = \lambda_i$:

$$d\Omega_1(\lambda_i) = d\Omega_2(\lambda_i) = 0. \quad (29)$$

Покажем, что это вариант невозможен. Пусть для определенности $\lambda_i = \lambda_1$.

Рассмотрим дифференциал $d\widetilde{\Omega}(P) = \xi d\Omega_1(P) + d\Omega_2(P)$, где константа ξ выбрана так, что $d\widetilde{\Omega}(P)$ имеет в точке $\lambda = \lambda_1$ нуль второго порядка.

Рассмотрим линии уровня для мнимой части абелева интеграла $\widetilde{\Omega}(P)$:

$$L := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \nu(P) = \operatorname{Im} \int_{\lambda_1}^P d\widetilde{\Omega}(P) = 0 \right\},$$

и рассмотрим локальную картину множеств L вблизи особых точек $\{\lambda_1, \lambda_2, 0, \infty\}$. Из точки $\lambda = \lambda_1$ выходит пять “усов”, принадлежащих L . А из точек $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ выходит по одному “усу”. Очевидно, два уса, выходящих из точки $\lambda = \lambda_1$, замыкаются в петлю Q . Гармоническая функция $\nu(P)$ обращается в нуль на границе Q , следовательно, по принципу максимума, $\nu(P) \equiv 0$ внутри Q . Но это противоречит явным формулам для дифференциала $d\widetilde{\Omega}(P)$, $d\widetilde{\Omega}(P) \neq 0$. Итак, свойство (29) невозможно

для $g \geq 1$. Значит, либо $d\Omega_1(\lambda_i) \neq 0$, либо $d\Omega_2(\lambda_i) \neq 0$. Отсюда следует тривиальность деформации

$$\left. \frac{d\lambda_i}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2g, \quad g \geq 1.$$

Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае, когда спектральная кривая Γ допускает дополнительную антиинволюцию типа комплексного сопряжения $\pi: \lambda \rightarrow \bar{\lambda}$, $z \rightarrow \bar{z}$ (физически интересный случай модели СГ) разбор специального случая $g = 1$ сильно упрощается: невозможность равенства (29) сразу следует из соображений симметрии.

Институт математики и механики
Уральского отделения РАН

Поступило
29.11.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Krichever I. M. Perturbation theory in periodic problems for two-dimensional integrable systems // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1991. V. 9. P. 1–101.
- [2] Bikbaev R. F., Kuksin S. B. On the parametrization of finite-gap solutions by the frequency and wave number vectors and a Theorem of I. Krichever // Lett. Math. Phys. 1993. V. 28. P. 115–122.
- [3] Бикбаев Р. Ф. Алгебро-геометрические неравенства, порождаемые теорией возмущений: нелинейные уравнения Шредингера // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 4. С. 67–82.
- [4] Бикбаев Р. Ф., Куксин С. Б. Периодическая краевая задача для уравнения Синус–Гордон, ее малые гамильтоновы возмущения и КАМ-деформации конечнозонных торов // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 3. С. 42–78.