Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буренков, Н. Б. Викторова, О теореме вложения для пространств Соболева со смешанной нормой для предельных показателей, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 62–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:37:43

О ТЕОРЕМЕ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

В. И. Буренков, Н. Б. Викторова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, где $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = \overline{1, n}$. Говорят, что функция $f \in L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)$, если f измерима на $\mathbb{R}^n$ и конечна следующая смешанная норма

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_1, \dots, p_n} &\equiv \|f\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times dx_1 \Big)^{p_2/p_1} dx_2 \Big)^{p_3/p_2} \dots \Big)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \Big)^{1/p_n}. \end{aligned}$$

Если некоторое $p_i = \infty$, то в этом выражении вместо интеграла по x_i понимается существенная верхняя грань по этой переменной.

Основные свойства пространства $L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)$ изложены, например, в [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, где $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = \overline{1, n}$. Говорят, что функция $f \in W_{\bar{p}}^l(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)$, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = l$ существуют обобщенные производные $D^\alpha f$ и конечна норма

$$\|f\|_{W_{\bar{p}}^l(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорят, что нормированное пространство Z_1 вложено в нормированное пространство Z_2 ($Z_1 \hookrightarrow Z_2$), если

- 1) $Z_1 \subset Z_2$;
- 2) существует такое $C > 0$, что для любых $f \in Z_1$

$$\|f\|_{Z_2} \leq C \|f\|_{Z_1}$$

(т.е. оператор вложения $I: Z_1 \rightarrow Z_2$ непрерывен).

Свойства пространств Соболева со смешанной нормой $W_{\vec{p}}^l(\mathbb{R}^n)$ и теоремы вложения для них изложены в [2], [3].

Мы рассмотрим более подробно вопрос о том, при каких условиях на параметры справедлива теорема вложения

$$W_{\vec{p}}^l(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n). \quad (1)$$

Простые примеры показывают, что для справедливости этого вложения необходимо, чтобы

$$1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

и чтобы

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} \right) \leq l. \quad (3)$$

В неопределенном случае, когда $\sum_{i=1}^n (1/p_i - 1/q_i) < l$, в [3] доказано, что при выполнении условия (2) вложение (1) имеет место. В предельном случае, когда

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} \right) = l, \quad (4)$$

в [3] справедливость вложения (1) установлена при некоторых дополнительных предположениях, а именно доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $l \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (5)$$

$$1 < p_n < q_n < \infty \quad \text{или} \quad 1 = p_n < q_n = \infty, \quad (6)$$

и выполнено соотношение (4), тогда имеет место вложение (1).

В [3] теорема вложения (1) доказывается на основе некоторого интегрального представления функции f через ее производные. Неопределенный случай не вызывает особых затруднений: достаточно воспользоваться n раз обобщенным неравенством Минковского и неравенством Юнга для свертки. В предельном случае дело обстоит иначе. На первых $(n-1)$ шагах, как и в неопределенном случае, применяются обобщенное неравенство Минковского и неравенство Юнга, а на последнем n -м шаге применяется неравенство Харди–Литтлвуда, что приводит к ограничению $1 < p_n < q_n < \infty$ (случай $p_n = 1$ и $q_n = \infty$ не требует дополнительных оценок).

Отметим, что условие (6) не является необходимым для справедливости вложения (1), как это следует, например, из более раннего результата, полученного в [4], который на языке пространств со смешанной нормой может быть сформулирован следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$, $p_1 = \dots = p_n = p$, $q_1 = \dots = q_m = q$, $q_{m+1} = \dots = q_n = \infty$, причем $1 \leq p < q < \infty$, и выполняется условие (4), принимающее вид

$$\frac{n}{p} - \frac{m}{q} = l. \quad (4')$$

Тогда имеет место вложение (1), принимающее вид

$$W_{(\underbrace{p, \dots, p}_n)}^l(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{(\underbrace{q, \dots, q}_m, \infty, \dots, \infty)}(\mathbb{R}^n). \quad (1')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в [4] опирается на некоторые специальные следствия из неравенства Гёльдера и теорему вложения

$$W_{(p, \dots, p)}^1(\mathbb{R}^s) \hookrightarrow L_{(\infty, \dots, \infty)}(\mathbb{R}^s)$$

со специально выбранным s . В случаях, когда $m = n$ или $m = n - 1$, достаточно воспользоваться одномерным вложением $W_1^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R})$, которое сводится к элементарному неравенству

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f'\|_1 \quad (7)$$

(постоянная $1/2$ точная). Напомним его доказательство, которое достаточно провести для функций $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. При фиксированном x для достаточно больших y $f(x) = -\int_x^y f'(\zeta) d\zeta$, откуда $|f(x)| \leq \int_x^\infty |f'| d\zeta$. Аналогично, $|f(x)| \leq \int_{-\infty}^x |f'| d\zeta$, откуда следует, что

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty |f'| d\zeta.$$

Отметим еще, что равенство в (7) достигается тогда и только тогда, когда функция f эквивалентна такой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции, которая стремится к нулю на бесконечности и для некоторого x_0 монотонно возрастает (или убывает) на $(-\infty, x_0)$ и монотонно убывает (соответственно возрастает) на (x_0, ∞) .

В связи с указанными соображениями возникает вопрос о том, насколько существенным является условие (6) и нельзя ли заменить его условием

$$1 \leq p_n \leq q_n \leq \infty.$$

Целью настоящей работы является доказательство того, что во всяком случае при $n = 2$ это сделать можно.

Отметим прежде всего, что при $n = 2$ из условий (2) и (4) следует, что $l = 1$ или $l = 2$, причем при $l = 2$, кроме того, $p_1 = p_2 = 1$ и $q_1 = q_2 = \infty$.

В последнем случае (являющемся случаем несмешанной нормы)

$$W_{(1,1)}^2(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L_{(\infty,\infty)}(\mathbb{R}^2),$$

причем

$$\|f\|_{\infty,\infty} \leq \frac{1}{4} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right\|_{1,1} \quad (8)$$

(это неравенство следует из дважды примененного неравенства (7), постоянная $1/4$ – точная).

Таким образом, достаточно рассмотреть случай $l = 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$1 \leq p_1 \leq q_1 \leq \infty, \quad 1 \leq p_2 \leq q_2 \leq \infty \quad (9)$$

и

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = 1, \quad (10)$$

причем при $q_1 = q_2 = \infty$ дополнительно предполагается, что $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ или $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$. Тогда

$$W_{(p_1,p_2)}^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L_{(q_1,q_2)}(\mathbb{R}^2), \quad (11)$$

причем для любых $f \in W_{(p_1,p_2)}^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|f\|_{q_1,q_2} \leq c_1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1,p_2}^{1/p_1-1/q_1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1,p_2}^{1/p_2-1/q_2}, \quad (12)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 \right)^{-(1/p_1-1/q_1)} p_2^{1-2(1/p_1-1/q_1)}, \quad (13)$$

если $q_1 < \infty$ или $q_2 < \infty$, и

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad (14)$$

если $q_1 = q_2 = \infty$ (при этом, согласно (9) и (10) $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$ или $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в работе О. В. Бесова [5] было получено, в частности, вложение, совпадающее с (11) при $p_1 = p_2$.

В доказательстве теоремы 3 и ряда вспомогательных утверждений, на которых оно будет основываться, будут использоваться только неравенство Гёльдера, неравенство (7) и очевидные соотношения

$$\| |f|^\zeta \|_\infty = \|f\|_\infty^\zeta, \quad (15)$$

и при $1 \leq p < \infty$

$$\| |f|^\zeta \|_p = \|f\|_{\zeta p}^\zeta \quad (16)$$

со специально выбираемым параметром $\zeta > 0$.

Будем говорить, что $f \in W_{p,r}^1(\mathbb{R})$, где $1 \leq p, r \leq \infty$, если $f \in L_p(\mathbb{R})$ и существует обобщенная производная $f' \in L_r(\mathbb{R})$.

Положим

$$\|f\|_{W_{p,r}^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} + \|f'\|_{L_r(\mathbb{R})}.$$

Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$. Известно, что для того чтобы

$$W_{p,r}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}),$$

необходимо и достаточно, чтобы $p \leq q$ (в наиболее общей форме подобное утверждение приведено в [6]). Для полноты изложения мы приведем элементарное доказательство этого результата, основывающееся на неравенстве (7) (которое соответствует простейшему частному случаю указанного вложения: $W_{1,1}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R})$), с постоянной в сопутствующем неравенстве, которая при $q = \infty$ является точной.

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$, причем $p < q$. Тогда для любых $f \in W_{p,r}^1(\mathbb{R})$

$$\|f\|_q \leq c_2 \|f\|_p^{1-\alpha} \cdot \|f'\|_r, \quad (17)$$

где

$$\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r'} \right)^{-1} \quad (18)$$

(r' — показатель, сопряженный к r), а

$$c_2 = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{p}{r'} \right) \right]^\alpha. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $q = \infty$. Тогда для $\zeta > 0$ согласно (15), (7), неравенству Гёльдера и (16)

$$\begin{aligned}\|f\|_{\infty} &= \| |f|^{\zeta} \|_{\infty}^{1/\zeta} \leq \left(\frac{1}{2} \| (|f|^{\zeta})' \|_1 \right)^{1/\zeta} \\ &= \left(\frac{\zeta}{2} \right)^{1/\zeta} \| |f|^{\zeta-1} f' \|_1^{1/\zeta} \leq \left(\frac{\zeta}{2} \right)^{1/\zeta} (\|f\|_{(\zeta-1)r'} \|f'\|_r)^{1/\zeta}.\end{aligned}$$

Выбирая здесь ζ так, чтобы $(\zeta - 1)r' = p$, т.е. $\zeta = 1 + p/r'$, получим, что

$$\|f\|_{\infty} \leq \left(\frac{p + r'}{2r'} \right)^{r'/(p+r')} \|f\|_p^{p/(p+r')} \|f'\|_r^{r'/(p+r')}, \quad (17')$$

что совпадает с (17) при $q = \infty$.

Если $q < \infty$, то достаточно учесть, что при $q > p$

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^{p/q} \|f\|_{\infty}^{1-p/q}$$

и воспользоваться неравенством (17').

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При любых $1 \leq p, r \leq \infty$ постоянная в неравенстве (17') является точной. Равенство достигается, например, при $1 \leq r < p$ для $f(x) = (1 + |x|)^{r/(r-p)}$, при $r = p$ для $f(x) = e^{-|x|}$, при $p < r < \infty$ для $f(x) = (1 - |x|)_+^{r/(r-p)}$ (здесь $a_+ = a$ при $a \geq 0$, $a_+ = 0$ при $a < 0$), при $r = \infty$ для $f(x) = (1 - |x|)_+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Положим для $u, v > 0$

$$H(u, v) = \frac{u^u v^v}{(u + v)^{u+v}} \frac{\Gamma(1 + u + v)}{\Gamma(1 + u)\Gamma(1 + v)},$$

где Γ – гамма-функция, и

$$H(0, v) = H(u, 0) = 1$$

(отметим, что $H(u, v) \leq 1$). В работе [6] неравенство (17) доказано с постоянной

$$c_2 = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{p}{r'} \right) H \left(\frac{1 + p/r'}{q - p}, \frac{r - 1}{r} \right) \right]^{\alpha},$$

которая является точной при $p = r$.

ЛЕММА 2. Пусть $1 \leq p \leq q < \infty$, $f \in W_{q,p}^1(\mathbb{R})$ и $g \in L_p(\mathbb{R})$. Тогда

$$\| |f|^{q-1} g \|_1 \leq c_3 \|f\|_q^{q-1-\beta} \|f'\|_p^\beta \|g\|_p, \quad (20)$$

где

$$\beta = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right)^{-1}, \quad (21)$$

а

$$c_3 = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{q}{p'} \right) \right]^\beta. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\sup_{\substack{g \in L_p(\mathbb{R}) \\ g \neq 0}} \frac{\| |f|^{q-1} g \|_1}{\|g\|_p} = \| |f|^{q-1} \|_{p'} = \|f\|_{(q-1)p'}^{q-1},$$

то неравенство (20) с произвольными $f \in W_{q,p}^1(\mathbb{R})$ и $g \in L_p(\mathbb{R})$ эквивалентно неравенству

$$\|f\|_{(q-1)p'}^{q-1} \leq c_3 \|f\|_q^{q-1-\beta} \|f'\|_p^\beta \quad (23)$$

с произвольными $f \in W_{q,p}^1(\mathbb{R})$. Таким образом, достаточно воспользоваться неравенством (17) с $(q-1)p'$ вместо q , q вместо p и p вместо r .

ЛЕММА 3. Пусть $1 \leq p_1 \leq q_1 < \infty$, $1 \leq p_2 \leq \infty$, $f \in W_{(p_1, p_2)}^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда для почти всех $x_2 \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\|f(\cdot, x_2)\|_{q_1}^{1+\gamma} \right) \right| \leq c_4 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot, x_2) \right\|_{p_1}^\gamma \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\cdot, x_2) \right\|_{p_1}, \quad (24)$$

где

$$\gamma = \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right) \left(\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{q_1} \right)^{-1}, \quad (25)$$

а

$$c_4 = \left(\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{q_1} \right)^{-1} \left[\frac{q_1}{2} \left(\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{q_1} \right) \right]^\gamma. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме об обобщенном дифференцировании под знаком интеграла (см., например, [6])

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^{q_1} dx_1 \\ = q_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^{q_1-1} \operatorname{sign} f(x_1, x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 \end{aligned}$$

и согласно лемме 2

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^{q_1} dx_1 \right| \\ \leq q_1 \cdot \tilde{c}_3 \|f(\cdot, x_2)\|_{q_1}^{q_1-1-\gamma} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot, x_2) \right\|_{p_1}^{\gamma} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\cdot, x_2) \right\|_{p_1}, \end{aligned}$$

где $\tilde{c}_3$ вычисляется по формуле (22) с заменой p на p_1 и q на q_1 . Остается учесть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\|f(\cdot, x_2)\|_{q_1}^{1+\gamma} \right) \\ = \frac{1}{q_1} \left(\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{q_1} \right)^{-1} \|f(\cdot, x_2)\|_{q_1}^{1+\gamma-q_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^{q_1} dx_1. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Пусть $1 \leq p_1 \leq q_1 < \infty$, $1 \leq p_2 \leq \infty$ и

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2} = 1 \quad (27)$$

или $q_1 = \infty$, и при этом $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ или $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$. Тогда для любых $f \in W_{(p_1, p_2)}^1(\mathbb{R}^2)$ справедливо неравенство (12), принимающее вид

$$\|f\|_{q_1, \infty} \leq c_5 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1, p_2}^{1/p'_2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1, p_2}^{1/p_2}, \quad (28)$$

где

$$c_5 = \frac{1}{2} q_1^{1/p'_2} p_2^{2/p_2-1}$$

при $q_1 < \infty$ и $c_5 = 1/2$, если $q_1 = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $q_1 < \infty$. Применяя равенство (15), неравенство (7), (24), неравенство Гёльдера и учитывая, что в силу (27) $\gamma = p_2 - 1$, получим, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{q_1, \infty}^{p_2} &= \| \|f\|_{q_1}^{p_2} \|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \|f\|_{q_1}^{p_2} \right\|_1 \\ &\leq \frac{c_4}{2} \left\| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1}^{p_2-1} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1} \right\|_1 \\ &\leq \frac{c_4}{2} \left\| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1}^{p_2-1} \right\|_{p'_2} \cdot \left\| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1} \right\|_{p_2} \\ &= \frac{c_4}{2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1, p_2}^{p_2-1} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1, p_2}, \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (28).

Если $p_2 = \infty$, то согласно (27) $q_1 = \infty$, $p_1 = 1$.

Пусть теперь $q_1 = \infty$. Тогда или $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ или $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$. В первом случае неравенство (28) принимает вид

$$\|f\|_{\infty, \infty} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{1, \infty}$$

и непосредственно следует из неравенства (7). Во втором случае оно принимает следующий вид

$$\|f\|_{\infty, \infty} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{\infty, 1}$$

и также следует из (7).

ЛЕММА 5. Пусть $1 \leq p_1 \leq \infty$, $1 \leq p_2 \leq q_1 < \infty$ и

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = 1 \quad (29)$$

или $q_2 = \infty$ и при этом $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ или $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$. Тогда для любых $f \in W_{(p_1, p_2)}^1(\mathbb{R}^2)$ справедливо неравенство (14), принимающее вид

$$\|f\|_{\infty, q_2} \leq c_6 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1, p_2}^{1/p_1} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1, p_2}^{1/p'_1}, \quad (30)$$

где

$$c_6 = \frac{1}{2} q_2^{1/p_1} p_2^{1-2/p_1}$$

при $q_2 < \infty$ и $c_6 = 1/2$ при $q_2 = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $q_2 < \infty$, $p_1 > 1$. Вводя параметр $\zeta \geq 1$ и пользуясь соотношениями (7), (15), (16) и неравенством Гёльдера, получим, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty, q_2} &= \left\| \| |f|^\zeta \|_{\infty}^{1/\zeta} \right\|_{q_2} = \left\| \| |f|^\zeta \|_{\infty} \right\|_{q_2/\zeta}^{1/\zeta} \\ &\leq \left(\frac{\zeta}{2} \right)^{1/\zeta} \left\| \left\| |f|^{\zeta-1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_1 \right\|_{q_2/\zeta}^{1/\zeta} \\ &\leq \left(\frac{\zeta}{2} \right)^{1/\zeta} \left\| \|f\|_{(\zeta-1)p'_1}^{\zeta-1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1} \right\|_{q_2/\zeta}^{1/\zeta} \\ &\leq \left(\frac{\zeta}{2} \right)^{1/\zeta} \|f\|_{(\zeta-1)p'_1, \infty}^{(\zeta-1)/\zeta} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1, q_2/\zeta}^{1/\zeta}. \end{aligned}$$

Положим $(\zeta - 1)p'_1 = q_2$, тогда

$$\zeta = 1 + \frac{q_2}{p'_1} \geq 1, \quad \frac{q_2}{\zeta} = p_2.$$

Учитывая еще, что число q_1 , определяемое равенством (27), совпадает с q_2 , определяемым равенством (29), получим, что

$$\|f\|_{\infty, q_2} \leq \left(\frac{\zeta}{2} \right)^{1/\zeta} \|f\|_{q_1, \infty}^{p_2/p'_1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1, p_2}^{p_2/q_1}.$$

Применяя лемму 4, получим искомое неравенство (29). Если $p_1 = 1$, то согласно (29) $p_2 = q_2$, и неравенство (30) непосредственно следует из неравенства (7).

Случай $q_2 = \infty$ совпадает со случаем $q_1 = \infty$ из леммы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Случай $q_1 = q_2 = \infty$ (при котором или $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ или $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$) рассмотрен в лемме 4. Пусть $q_1 < \infty$ или $q_2 < \infty$, тогда $1/p_1 + 1/p_2 > 1$. Положим $r = (1/p_1 + 1/p_2 - 1)^{-1}$. Согласно (10) $1/r = 1/q_1 + 1/q_2$. Выберем $\theta = 1/q_2(1/q_1 + 1/q_2)^{-1}$. Так как

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty}, \quad \frac{1}{q_2} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{r},$$

то

$$\|f\|_{q_1, q_2} \leq \|f\|_{r, \infty}^{1-\theta} \|f\|_{\infty, r}^{\theta}.$$

Применяя леммы 4 и 5, получим, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{q_1, q_2} &\leq c_5^{1-\theta} c_6^{\theta} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1, p_2}^{(1-\theta)/p'_2 + \theta/p_1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1, p_2}^{(1-\theta)/p_2 + \theta/p'_1} \\ &= c_5^{1-\theta} c_6^{\theta} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1, p_2}^{1/p_1 - 1/q_1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1, p_2}^{1/p_2 - 1/q_2}, \end{aligned}$$

откуда и следует (12) с $c_1 = c_5^{1-\theta} c_6^{\theta}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что пользуясь результатом работы [6], приведенным в замечании 3, и следуя изложенному доказательству, можно несколько уточнить значение постоянной c_1 в теореме 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Дополнительные предположения в теореме 3, относящиеся к случаю $q_1 = q_2 = \infty$ (закрывающиеся в том, что $p_2 = 1$ или $p_2 = \infty$) являются необходимыми. Это можно установить, рассматривая следующий контрпример. Пусть $q_1 = q_2 = \infty$ и $1 < p_2 < \infty$. Положим

$$f(x) = |\ln |x||^{(1-1/p_2)/2} \eta(x),$$

где $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\eta(x) = 1$ при $|x| \leq 1/4$, $\eta(x) = 0$ при $|x| \geq 1/2$. Тогда $f \notin L_{(\infty, \infty)}(\mathbb{R}^2)$ и можно проверить, что $f \in W_{(p_1, p_2)}^1(\mathbb{R}^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Объединяя приведенные в параграфе результаты, можно сформулировать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$. Для того, чтобы $W_{(p_1, p_2)}(\mathbb{R}^2) \subset L_{(q_1, q_2)}(\mathbb{R}^2)$, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) $p_1 \leq q_1$, $p_2 \leq q_2$,
- 2) $1/p_1 - 1/q_1 + 1/p_2 - 1/q_2 \leq l$,
- 3) если $l = 1$, в 2) имеет место знак равенства и $q_1 = q_2 = \infty$, то $p_2 = 1$ (при этом $p_1 = \infty$) или $p_2 = \infty$ (при этом $p_1 = 1$).

В частности, для того, чтобы $W_{(p_1, p_2)}^l(\mathbb{R}^2) \subset L_{(\infty, \infty)}(\mathbb{R}^2)$, необходимо и достаточно, чтобы $1/p_1 + 1/p_2 < l$ или $l = 2$ и $p_1 = p_2 = 1$, или $l = 1$ и $p_1 = 1, p_2 = \infty$ и $l = 1$ и $p_1 = \infty, p_2 = 1$.

Российский университет
Дружбы народов

Поступило
03.11.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Benedec A., Panzone R. The space L^p with mixed norm // Duke Math. J. 1961. V. 28. № 3. P. 301–324.
- [2] Гудиев А. Х. Теорема вложения для следа в абстрактных функциях // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 4. С. 764–767.
- [3] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [4] Gagliardo E. Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili // Ricerche di Mat. 1958. V. 7. № 1. P. 102–137.
- [5] Бесов О. В. Вложение анизотропного пространства Соболева для области с условием гибкого рога // Тр. МИАН. 1988. Т. 181. С. 3–14.
- [6] Габущин В. Н. Неравенства для норм функций и ее производных в метриках L_p // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 291–298.