Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, Х. Х. Калай, Условия топологической сопряженности градиентноподобных диффеоморфизмов на неприводимых трехмерных многообразиях, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 73–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:25:38

УСЛОВИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ ГРАДИЕНТНОПОДОБНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ НА НЕПРИВОДИМЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В. З. Гринес, Х. Х. Калай

В работах [1]–[3] получены полная топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов и условия топологической сопряженности диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на двумерных многообразиях. В настоящей работе осуществляется переход к рассмотрению аналогичных вопросов на трехмерных многообразиях.

Пусть $f: M \rightarrow M$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, заданный на гладком замкнутом трехмерном многообразии M . Обозначим через $\Omega(f)$ множество периодических точек диффеоморфизма f . Следуя [4], назовем f градиентноподобным диффеоморфизмом, если для любых седловых периодических точек $p, q \in \Omega(f)$ выполняется условие $W^s(p) \cap W^u(q) = \emptyset$.

Представим множество седловых периодических точек в виде объединения $\Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)$, где $\Omega_1(f)$ ($\Omega_2(f)$) состоит из точек p таких, что $\dim W^u(p) = 1$ ($\dim W^u(p) = 2$). Будем предполагать, что $\Omega_1(f) \cup \Omega_2(f) \neq \emptyset$ (в противном случае неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит в точности из одного источника и одного стока, и условия топологической сопряженности становятся тривиальными).

Для $p \in \Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)$ положим $\partial W^\sigma(p) = \text{Cl } W^\sigma(p) \setminus W^\sigma(p)$, $\sigma \in \{s, u\}$. Если $W^\sigma(p)$ одномерно и $W_*^\sigma(p)$ одна из компонент связности множества $W^\sigma(p) \setminus p$, то положим $\partial W_*^\sigma(p) = \text{Cl } W_*^\sigma(p) \setminus W_*^\sigma(p)$.

Следующие леммы 1 и 2 являются следствием градиентноподобности диффеоморфизма f и устанавливаются с использованием результатов работ [4], [5] для произвольных трехмерных многообразий (не обязательно неприводимых). Результаты этих лемм позволяют поставить в соответствие диффеоморфизму f различающий граф $G^*(f)$, с помощью которого

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–01–01–407, Международного научного фонда, грант R99000, и фонда “Культурная инициатива”.

устанавливаются необходимые и достаточные условия топологической сопряженности двух градиентноподобных диффеоморфизмов на трехмерных неприводимых многообразиях.

Напомним, что n -мерное многообразие M^n называется *неприводимым*, если в нем любая цилиндрическая сфера S^{n-1} размерности $n - 1$ ограничивает n -мерный диск; сфера $S^{n-1} \subset M^n$ называется цилиндрической в M^n , если существует гомеоморфное отображение h топологического произведения $\Sigma^{n-1} \times [-1, 1]$ стандартной сферы $\Sigma^{n-1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$, где $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – декартовы координаты евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, на отрезок прямой в M^n такое, что $h(\Sigma^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$.

ЛЕММА 1. *Для любой точки $p \in \Omega_1(f)$ $\partial W^s(p)$ ($\partial W^u_*(p)$) состоит в точности из одного источника (стока), и для любой точки $p \in \Omega_2(f)$ $\partial W^u(p)$ ($\partial W^s_*(p)$) состоит в точности из одного стока (источника).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $p \in \Omega_1(f)$, (если $p \in \Omega_2(f)$, то доказательство аналогичное). Согласно [4] многообразие M представляется в виде объединения неустойчивых (устойчивых) многообразий всех периодических точек. Так как f градиентноподобный диффеоморфизм, то $W^s(p) \setminus p$ ($W^u_*(p)$) содержится в неустойчивом (устойчивом) многообразии в точности одного источника α (стока ω) из $\Omega(f)$, который принадлежит $\partial W^s(p)$ ($\partial W^u_*(p)$).

Покажем, что $\partial W^s(p)$ ($\partial W^u_*(p)$) не содержит точек, отличных от α (ω и p). Предположим противное и рассмотрим любую точку $x \in \partial W^s(p) \setminus \alpha$ ($\partial W^u_*(p) \setminus (\omega \cup p)$). Тогда существует седловая периодическая точка q такая, что $x \in W^s(q)$ ($x \in W^u(q)$). Из предложений 1.3, 1.5 в [2] следует, что $W^u(q) \cap W^s(p) \neq \emptyset$ ($W^s(q) \cap W^u_*(p) \neq \emptyset$), что противоречит предположению о градиентноподобности f . Лемма 1 доказана.

Положим $W^\sigma = \cup W^\sigma(p)$, $W = \text{Cl}(W^s \cup W^u)$. Пусть $p \in \Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)$, K – компонента связности множества $M \setminus W$. В силу [6] и предположения о том, что $\Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)$ не пусто, компонента K является неприводимой, т.е. любая двумерная цилиндрическая сфера из K ограничивает трехмерный шар. Граница ∂K компоненты K описывается следующей леммой.

ЛЕММА 2. 1) $\partial K \cap \Omega(f)$ состоит в точности из одного источника α , одного стока ω и седловых периодических точек $p_1^1, \dots, p_1^k \in \Omega_1$, $p_2^1, \dots, p_2^r \in \Omega_2$ ($k + r > 0$) таких, что $W^s(p_i^1) \subset \partial K$, $\partial W^s(p_i^1) = \alpha$, $W^u(p_j^2) \subset \partial K$, $\partial W^u(p_j^2) = \omega$, $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ и, по крайней мере одна из компонент связности каждого множества $W^u(p_1^1) \setminus p_1^1$, $W^s(p_2^2) \setminus p_2^2$ принадлежит ∂K , а граница такой компоненты состоит из точек p_1^i и ω , p_2^j и α соответственно.

2) Если $x \in \partial K \setminus \Omega(f)$, то $x \in W^\sigma(p_n^m)$, где $\sigma \in \{s, u\}$, $n \in \{1, 2\}$, и $m \in \{1, \dots, k\}$, если $n = 1$, $m \in \{1, \dots, r\}$, если $n = 2$, причем

компонента связности множества $W^\sigma(p_n^m) \setminus p_n^m$, содержащая точку x , целиком принадлежит ∂K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что граница ∂K компоненты K содержит по крайней мере одну седловую периодическую точку. Предположим противное. Тогда в силу градиентноподобности f $\partial K \cap (W^s \cup W^u) = \emptyset$, и, следовательно, ∂K состоит только из источников и стоков диффеоморфизма f . Но тогда компонента K не является неприводимой, что противоречит [6].

Пусть p – седловая периодическая точка из ∂K . Предположим для определенности, что $p \in \Omega_1$. Тогда в силу градиентноподобности f $W^s(p) \subset \partial K$. В силу леммы 1 $\partial W^s(p)$ состоит из одной точки α , являющейся источником, поэтому $\alpha \in \partial K$.

Покажем, что $K \subset W^u(\alpha)$. Так как $\alpha \in \partial K$, то найдется точка $y \in W^u(\alpha) \cap K$. Пусть y_1 – любая точка из K , отличная от y . Соединим точки y и y_1 простой дугой l , принадлежащей K . Тогда l целиком принадлежит $W^u(\alpha)$, так как в противном случае на l нашлась бы точка, принадлежащая $W^s \cup W^u$, что невозможно. Так как $\text{Cl } W^u(\alpha)$ не содержит источников из $\Omega(f)$, отличных от α , и $\text{Cl } K \subset \text{Cl } W^u(\alpha)$, то α является единственным источником, принадлежащим ∂K .

Рассмотрим, далее, многообразие $W^u(p)$. Из градиентноподобности f следует, что хотя бы одна из компонент связности множества $W^u(p) \setminus p$ принадлежит ∂K . Из леммы 1 следует, что граница такой компоненты состоит из точки p и стока $\omega \in \Omega(f)$, и, следовательно, $\omega \in \partial K$. Рассуждая как и для источника $\alpha \in \partial K$, получаем, что ω – единственный сток из $\Omega(f)$, принадлежащий ∂K . Обозначим через $p_1^1, \dots, p_1^k \in \Omega_1$, $p_2^1, \dots, p_2^r \in \Omega_2$ ($k + r > 0$) все седловые периодические точки, принадлежащие границе компоненты K . По доказанному выше получаем, что $W^s(p_1^i) \subset \partial K$, $\partial W^s(p_1^i) = \alpha$, $W^u(p_2^j) \subset \partial K$, $\partial W^u(p_2^j) = \omega$. Таким образом, первая часть леммы 2 доказана.

Пусть теперь x – произвольная точка, принадлежащая $\partial K \setminus \Omega(f)$. Тогда существует седловая периодическая точка p такая, что x принадлежит $W^\sigma(p)$, $\sigma \in \{s, u\}$. Из градиентноподобности f следует, что $p \in \partial K$, т.е. $p = p_n^m$ при некоторых $n \in \{1, 2\}$ и $m \in \{1, \dots, k\}$, если $n = 1$, $m \in \{1, \dots, r\}$, если $n = 2$. Из доказанного выше следует, что компонента связности множества $W^\sigma(p_n^m) \setminus p_n^m$, содержащая точку x , целиком принадлежит ∂K . Лемма 2 доказана.

Следующие определения дадим по аналогии с [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Графом* $G(f)$ диффеоморфизма f назовем ориентированный граф, вершины которого отвечают точкам из $\Omega(f)$, а ребра – компонентам связности множества

$$(W^s \cup W^u) \setminus (\Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)).$$

Ориентация на любом ребре l задается следующим образом. Если ребру l инцидентны вершины a и b , и l отвечает компоненте связности множества $W^\sigma(p) \setminus p$, то одна из вершин, например a , отвечает точке p , а другая либо источнику (если $\sigma = s$), либо стоку (если $\sigma = u$). Ориентация на ребре l выбирается от b к a , если $\sigma = s$, и от a к b , если $\sigma = u$.

Границе компоненты связности K из множества $M \setminus W$ соответствует подграф графа $G(f)$, который назовем различающим множеством графа $G(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Различающим графом $G^*(f)$ диффеоморфизма f назовем граф $G(f)$ вместе с выделенной системой подграфов – различающих множеств.*

Различающие графы $G^*(f)$ и $G'^*(f')$, соответствующие градиентноподобным диффеоморфизмам Морса–Смейла f и f' , назовем *изоморфными*, если существует изоморфизм φ графов $G(f)$, $G'(f')$ такой, что:

- 1) изоморфные в силу φ вершины графов $G(f)$, $G'(f')$ отвечают топологически эквивалентным периодическим точкам диффеоморфизмов f и f' ;
- 2) изоморфизм φ сохраняет ориентацию ребер;
- 3) изоморфизм φ преобразует различающие множества графа $G(f)$, в различающие множества графа $G'(f')$.

Диффеоморфизмы f и f' индуцируют на множествах вершин графов $G(f)$ и $G'(f')$ подстановки $P(f)$ и $P'(f')$.

Предположим теперь, что исходное многообразие M является неприводимым.

ТЕОРЕМА. *Для того, чтобы градиентноподобные диффеоморфизмы f и f' , заданные на трехмерном замкнутом неприводимом многообразии, были топологически сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм φ графов $G^*(f)$ и $G'^*(f')$ такой, что $P'(f') = \varphi P(f) \varphi^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega \in \Omega(f)$ – сток периода t . Обозначим через k_1 (k_2) число всех седловых периодических точек из Ω_1 (Ω_2) таких, что ω принадлежит границе неустойчивых многообразий этих точек. В силу леммы 2 $k_1 + k_2 > 0$. Предположим для общности, что $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ (если одно из чисел равно 0, то доказательство упрощается). Пусть $p_1^1, \dots, p_1^{k_1} \in \Omega_1(f)$, $p_2^1, \dots, p_2^{k_2} \in \Omega_2(f)$ – эти точки (т.е. $\omega \in \partial W^u(p_j^i)$ для всех $j \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, \dots, k_j\}$).

В силу леммы 2 и неприводимости многообразия M , для каждой точки p_1^i в точности одна компонента связности множества $W^u(p_1^i) \setminus p_1^i$ целиком принадлежит $W^s(\omega)$, а другая не пересекается с $W^s(\omega)$. Положим $L^u(p_1^i) = W^s(\omega) \cap W^u(p_1^i)$. На каждой компоненте $L^u(p_1^i)$ выбе-

рем точку z_i такую, что если $f^{-m}(z_i) \subset L^u(p_1^j)$, то $f^{-m}(z_i)$ принадлежит дуге $[z_j, p_1^j]^u$ кривой $L^u(p_1^j)$. На каждом многообразии $W^u(p_2^r)$ выберем кривую C^r , гомеоморфную окружности, такую, что C^r ограничивает диск, для которого p_2^r является внутренней точкой, и такую, что если $f^{-m}(C^r) \subset W^u(p_2^j)$, то кривая $f^{-m}(C^r)$ принадлежит внутренности диска, ограниченного кривой C^j .

Введем в рассмотрение согласованные системы трубчатых семейств неустойчивых многообразий для всех седловых периодических точек диффеоморфизмов f и f' (определение и теорему существования согласованных семейств см. в [5]).

Обозначим через $T^u(p_n^m)$ трубчатые семейства многообразий $W^u(p_n^m)$. Для точки x , принадлежащей $W^s(p_n^m) \cap T^u(p_n^m)$, обозначим через T_x^u слой из $T^u(p_n^m)$, проходящий через точку x , и для каждой точки z из $T^u(p_n^m)$ обозначим через $\pi(z)$ послойную проекцию точки z на $W^s(p_n^m)$, полагая $\pi(z) = x$, если z принадлежит T_x^u .

В окрестности точки $p_1^i, i = 1, \dots, k_1$, выберем двумерный замкнутый диск D^i такой, что:

- 1) $z_i \in \text{int } D^i$;
- 2) $D^i, f^{-1}(D^i)$ принадлежат трубчатому семейству $T^u(p_1^i)$ седловой периодической точки p_1^i ;
- 3) D^i трансверсально $T^u(p_1^i)$.

В окрестности точки $p_2^r, r = 1, \dots, k_2$, выберем замкнутое кольцо K^r такое, что $C^r \in \text{int } K^r$ и обладающее свойствами 2), 3) с заменой D^i на K^r .

В малой окрестности множества $\Sigma^u = \bigcup_{i=1}^{k_1} W^u(p_1^i) \cup \bigcup_{r=1}^{k_2} W^u(p_2^r)$ выберем многообразие $S(\omega)$, гомеоморфное двумерной сфере, и такое, что:

- 1) $S(\omega)$ принадлежит $W^s(\omega)$ и ограничивает область, содержащую ω ;
- 2) множество $N_I = \bigcup_{i=1}^{k_1} D^i \cup \bigcup_{r=1}^{k_2} K^r$ принадлежит $S(\omega)$;
- 3) $(S(\omega) \setminus N_I) \cap \Sigma^u = \emptyset$.

Если $f^{-m}(S(\omega)) \cap S(\omega) \neq \emptyset$, то, используя методику работы [8], исправим $S(\omega)$ таким образом, что вновь построенная сфера $\tilde{S}(\omega)$ удовлетворяет условиям 1–3 и дополнительному условию $\tilde{S}(\omega) \cap f^{-m}(S(\omega)) = \emptyset$. Положим $S_I(\omega) = \tilde{S}(\omega)$ (см. рисунок).

Если же $S(\omega) \cap f^{-m}(S(\omega)) = \emptyset$, то положим $S_I(\omega) = S(\omega)$. Положим далее $S_E(\omega) = f^{-m}(S_E)$ и обозначим через $R(\omega)$ замкнутую область, принадлежащую $W^s(\omega)$ и ограниченную поверхностями $S_I(\omega), S_E(\omega)$.

Обозначим через $\tilde{D}^i$ диск из множества $\bigcup_{j=1}^{k_1} f^{-m}(D_1^j)$ такой, что $\tilde{D}^i \cap L^u(p_1^i) \neq \emptyset$, и через $\tilde{K}^r$ кольцо из множества $\bigcup_{j=1}^{k_2} f^{-m}(K_2^j)$ такое, что $\tilde{K}^r \cap W^u(p_2^r) \neq \emptyset$ (см. рисунок).

Для $z \in D^i$ обозначим через γ_z^i замкнутую дугу, принадлежащую слою $T_{\pi(z)}^u \in T^u(p_1^i)$, граничными точками которой являются z и $\tilde{z} = \tilde{D}^i \cap T_{\pi(z)}^u$.

Для $z \in K^r$ обозначим через K_z^r замкнутую область, гомеоморфную кольцу, принадлежащую слою $T_{\pi(z)}^u$ из трубчатого семейства $T^u(p_2^r)$ и ограниченную кривыми $T_{\pi(z)}^u \cap K^r$ и $T_{\pi(z)}^u \cap \tilde{K}^r$.

Положим $\Pi^i = \bigcup_{z \in D^i} \gamma_z^i$, $Q^r = \bigcup_{z \in K^r} K_z^r$ и $N = (\bigcup_{i=1}^{k_1} \Pi^i) \cup (\bigcup_{r=1}^{k_2} Q^r)$. По построению $N_I = N \cap S_I$, положим $N_E = N \cap S_E$.

Обозначим через $G_1, \dots, G_s$ компоненты связности множества $M \setminus W$, для которых точка ω принадлежит их границе, и положим $S_I^i = S_I \cap G_i$, $i = 1, \dots, s$.

Положим $\Gamma^s (\bigcup_{p \in \Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)} W^s(p)) \cup \Omega(f)$ и определим аналогично множество Γ'^s для диффеоморфизма f' . В силу изоморфности графов $G^*(f)$ и $G'^*(f')$ и сопряженности подстановок $P(f)$ и $P'(f')$ существует гомеоморфизм $g: \Gamma^s \Rightarrow \Gamma'^s$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) для точки $p \in \Omega(f)$ имеем, что $p' = g(p) \in \Omega'(f')$ и вершины графов $G^*(f)$ и $G'^*(f')$, соответствующие точкам p и p' , изоморфны в силу изоморфизма φ , причем если $p \in \Omega_2(f)$, то ребра графов $G^*(f)$ и $G'^*(f')$, соответствующие компонентам связности $W_*^s(p)$ и $g(W_*^s(p))$, изоморфны в силу φ ;
- 2) $f'|_{\Gamma'^s} = gfg^{-1}|_{\Gamma'^s}$.

Выберем из каждой стоковой орбиты диффеоморфизма f по единственной произвольной точке, множество всех таких точек обозначим через Ω^s и положим $\Omega'^s = g(\Omega^s)$.

Пусть $\omega \in \Omega^s$ и $\omega' = g(\omega)$. Положим $p_1^i = g(p_1^i)$ и $p_2^r = g(p_2^r)$, $i = 1, \dots, k_1$, $r = 1, \dots, k_2$. Сделаем для точки ω' построения, аналогичные сделанным выше для точки ω , и снабдим соответствующие обозначения штрихами, сохранив индексацию изоморфных объектов.

Построим гомеоморфизм $h_1(\omega, \omega'): N \rightarrow N'$ такой, что если z принадлежит слою $T_{\pi(z)}^u$ из трубчатой поверхности $T^u(p)$, где $p \in (\bigcup_{i=1}^{k_1} p_1^i) \cup (\bigcup_{r=1}^{k_2} p_2^r)$, то $h_1(\omega, \omega')(z)$ принадлежит слою $T_{g(\pi(z))}^{u'}$ из трубчатой окрестности $T'^u(g(p))$.

В силу изоморфизма различающих графов $G^*(f)$ и $G'^*(f')$, леммы 2 и того факта, что каждая цилиндрическая сфера из M делит многообразие M на две части, для каждого $i \in \{1, \dots, s\}$ существует гомеоморфизм $g_i: S_i \Rightarrow S'_i$ такой, что g_i совпадает с $h_1(\omega, \omega')$ для точек из множества N_I , и, следовательно, существует гомеоморфизм $h_2(\omega, \omega'): S_I \Rightarrow S'_I$, также совпадающий с $h_1(\omega, \omega')$ для точек из множества N_I .

Зададим $h_3(\omega, \omega'): S_E \Rightarrow S'_E$ с помощью формулы

$$h_3(\omega, \omega') = f'^{-1} h_2(\omega, \omega') f.$$

Аналогично [3] проверяется, что $h_3(\omega, \omega')$ совпадает с $h_1(\omega, \omega')$ на множестве N_E .

Из построения следует, что существует гомеоморфизм такой $h_4(\omega, \omega'): R(\omega) \Rightarrow R'(\omega')$, что $h_4(\omega, \omega')$ совпадает с $h_1(\omega, \omega')$ на множестве N , с $h_2(\omega, \omega')$ на S_I и с $h_3(\omega, \omega')$ на S_E .

Зададим гомеоморфизм $h_5(\omega, \omega'): W^s(\omega) \Rightarrow W^s(\omega')$ следующим образом. Если $x \in W^s(\omega)$, то положим

$$h_5(\omega, \omega')(x) = f'^{lm}(h_4(\omega, \omega')(f^{-lm}(x))),$$

где $l \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^{-lm}(x) \in R(\omega)$. Определим отображение

$$h_6(\omega, \omega'): \bigcup_{i=0}^{i=m-1} f^i W^s(\omega) \rightarrow \bigcup_{i=0}^{i=m-1} f^i W^s(\omega')$$

так, что если $x \in \bigcup_{i=0}^{i=m-1} f^i W^s(\omega)$, то

$$h_6(\omega, \omega')(x) = f'^i(h_5(\omega, \omega')(f^{-i}(x))),$$

где i такое, что $f^{-i}(x) \in W^s(\omega)$.

Непосредственно проверяется, что гомеоморфизм $h_6(\omega, \omega')$ удовлетворяет условию:

$$f' \Big|_{\bigcup_{i=0}^{i=m-1} f^i(W^s(\omega'))} = h_6(\omega, \omega') f(h_6(\omega, \omega'))^{-1} \Big|_{\bigcup_{i=0}^{i=m-1} f^i(W^s(\omega'))}.$$

Пусть $x \in M$, тогда либо $x \in \Gamma^s$, либо найдется точка ω из Ω^s периода m такая, что $x \in \bigcup_{i=0}^{i=m-1} f^i W^s(\omega)$. Положим:

$$H(x) = \begin{cases} h_6(\omega, \omega')(x), & \text{если } x \in \bigcup_{i=0}^{i=m-1} f^i(W^s(\omega)), \\ H(x), & \text{если } x \in \Gamma^s. \end{cases}$$

По нашему построению отображение $H: M \rightarrow M$ удовлетворяет условию $f' = H \cdot f \cdot H^{-1}$, и совершенно аналогично [5, лемма 2.7] устанавливается, что H является гомеоморфизмом (см. также [3], где это доказательство воспроизведено). Теорема доказана.

Нижегородская государственная
сельскохозяйственная академия

Поступило
13.12.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях // Методы качественной теории дифференциальных уравнений / ed. Е. А. Лентович-Андропова. Межвуз. темат. сб. науч. тр. Ч. 1. Горький, 1985. Р. 22–38; Ч. 2. Горький, 1987. Р. 24–32.
- [2] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // Дифференциальные и интегральные уравнения / ред. Н. Ф. Отроков. Сб. науч. тр. Горький: ГГУ, 1985. С. 33–37.
- [3] Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 3. С. 3–17.
- [4] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 6. Р. 747–817; Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25. № 1. С. 113–185.
- [5] Palis J., Smale S. Structural stability theorems // Global analysis Proc. Symp. Pure Math. Providence: AMS Publ., 1970. V. 14. Р. 223–231; Пали Дж., Смейл С. Теоремы структурной устойчивости // Математика. 1969. Т. 13. № 2. С. 145–155.
- [6] Медведев В. С., Уманский Я. Л. Регулярные компоненты гомеоморфизмов на n -мерных многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. № 6. С. 1324–1342.
- [7] Peixoto M. On the classification of flows on two-manifolds // Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ. of Bahia / ed. M. Peixoto. Salvador, Brasil 1971. New York–London: Academic Press, 1973. Р. 389–419.
- [8] Медведев В. С. Исследование поведения траекторий каскада в окрестности инвариантного множества // Дифференц. уравнения. 1977. Т. XIII. № 7. С. 1192–1201.