Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. В. Пиядина, Аналог обобщенной проблемы Харди–Литтлвуда с почти простыми числами, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 81–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 18:20:34

АНАЛОГ ОБОБЩЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА С ПОЧТИ ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Ж. В. Пиядина

Введение. Пусть n достаточно большое натуральное число (основной параметр работы). Рассмотрим уравнение

$$m' - \varphi(u, v) = a, \quad (0.1)$$

где a – любое фиксированное целое число, m' – почти простое число, удовлетворяющее условиям: $\Omega(m') \leq 6$ и если $p \mid m'$, то $p \geq n^{1/883}$ ($\Omega(m')$ – количество простых делителей m' , считая и кратность, p – простое число), $(m', a) = 1$; $\varphi(u, v) = a_1 u^2 + b_1 uv + c_1 v^2$ – заданная бинарная квадратичная форма (здесь будем рассматривать лишь случай, когда $\varphi(u, v)$ – положительная примитивная квадратичная форма с дискриминантом $\Delta = b_1^2 - 4a_1 c_1$, совпадающим с дискриминантом квадратичного поля $K(\sqrt{d})$, d – отрицательное целое число, свободное от квадратов), u, v независимо пробегает целые числа с условием $0 < \varphi(u, v) < n$, которое в силу положительности формы $\varphi(u, v)$ выполняется автоматически. Уравнение (0.1) является аналогом обобщенного уравнения Харди–Литтлвуда $p + \varphi(u, v) = n$, асимптотика для которого получена в работе [1].

Пусть $Q(n)$ – число решений уравнения (0.1). В данной работе выводится асимптотическая формула для $Q(n)$ комбинированием дисперсионного метода, теоремы Фуври–Иванца [2] о распределении почти простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем и элементарных соображений об эргодических свойствах решений уравнения (0.1). Причем эта асимптотика получена с понижающим множителем в остаточном члене (по сравнению с главным) порядка $O(1/(\ln n)^\gamma)$, где γ – константа, зависящая от числа классов квадратичных форм заданного дискриминанта.

§ 1. Формулировки основных результатов.

ТЕОРЕМА 1. При $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) = C_\varphi \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)} \right) \sum_{m' \leq n} A(\Delta, m') + O\left(\frac{n}{(\ln n)^{1+\gamma}} \right), \quad (1.1)$$

© Ж. В. Пиядина 1996

где

$$A(\Delta, m') = \prod_{p|\Delta m'} \frac{(p-1)(p-\chi(p))}{p^2 - p + \chi(p)},$$

выполняются неравенства

$$B_1 \frac{n}{\ln n} (\ln \ln n)^4 < \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)} \right) \sum_{m' \leq n} A(\Delta, m') \\ < B_2 \frac{n}{\ln n} (\ln \ln n)^6,$$

$$C_\varphi = \frac{2g}{\varphi(|\Delta|)} \sum_{\sigma|\mathcal{P}} \frac{1}{\sigma} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{\substack{r=1, (r,a)=1, \\ (a+r^2\sigma\mathcal{L}, \Delta)=1}}^{\infty} \frac{1}{r^2} \prod_{\substack{p|r^2\sigma \\ p \nmid \Delta}} \frac{p^2}{p^2 - p + \chi(p)},$$

$C_\varphi \geq C_0 > 0$, $\mathcal{P}$ – произведение всех различных простых делителей дискриминанта Δ , $\chi(x)$ – квадратичный характер $\bmod |\Delta|$ поля $K(\sqrt{d})$, $(\mathcal{L})_\sigma$ – набор чисел $\mathcal{L}$ в количестве $\varphi(|\Delta|)/(2g)$, причем,

$$0 < \mathcal{L} < |\Delta|, \quad (\mathcal{L}, \Delta) = 1, \quad \chi(\mathcal{L}) = 1;$$

$$r = \prod_{p|\mathcal{P}} p^\alpha, \quad \alpha \geq 0; \quad 0 < \gamma < \varepsilon_0 \ln 2,$$

где ε_0 – определяется далее в § 3, см. (3.4).

Задачу нахождения асимптотики для $Q(n)$ удобно сформулировать в терминах теории квадратичных полей. Устанавливая соответствие между формами вида $\varphi(u, v)$ и идеалами поля $K(\sqrt{d})$, заданной форме $\varphi(u, v)$ поставим в соответствие класс идеалов A_φ . Тогда вопрос о представлении числа m формой $\varphi(u, v)$ сводится к вопросу о существовании целых идеалов $\mathfrak{a}$ поля $K(\sqrt{d})$ с нормой $N(\mathfrak{a}) = m$, принадлежащих классу $A = A_\varphi^{-1}$, точнее

$$\sum_{\varphi(u,v)=m} 1 = w \sum_{N(\mathfrak{a})=m, \mathfrak{a} \in A} 1, \quad (1.2)$$

где

$$w = \begin{cases} 6, & \text{при } \Delta = -3, \\ 4, & \text{при } \Delta = -4, \\ 2, & \text{при } \Delta < -4, \end{cases}$$

$N(\mathfrak{a})$ – норма идеала $\mathfrak{a}$. Таким образом,

$$Q(n) = \sum_{m' - \varphi(u,v)=a} 1 = w \sum_{m' - N(\mathfrak{a})=a, \mathfrak{a} \in A} 1. \quad (1.3)$$

Рассмотрим род идеалов R , определенный классом $A \in R$, т.е. $R = R(A)$ и положим

$$\tilde{Q}(n) = w \sum_{m' - N(\mathfrak{a})=a, \mathfrak{a} \in R} 1, \quad (1.4)$$

где $\mathfrak{a}$ пробегает целые идеалы по всем классам рода R .

ТЕОРЕМА 2. При $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{Q}(n) = t_0 C_\varphi \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)} \right) \sum_{m' \leq n} A(\Delta, m') + O\left(\frac{n}{(\ln n)^C}\right), \quad (1.5)$$

где C_φ и $A(\Delta, m')$ определены в теореме 1, t_0 – число классов идеалов в роде, $C > 0$ – любая константа.

Доказательство теоремы 2 основано на комбинации дисперсионного метода и теоремы Фуври–Иванца [2] о распределении почти простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем, как это сделано в работе [3] для аналога проблемы Харди–Литтлвуда. В случае, когда $t_0 = 1$, т.е. в случае одноклассных родов форм, теорема 2 уже дает асимптотику для уравнения (0.1). Причем, понижающий множитель в остаточном члене для данного случая – любая степень логарифма. В общем случае переход от решения уравнения (0.1) в роде к решению этого уравнения для индивидуальной формы осуществляется с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. При $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) = \frac{1}{t_0} \tilde{Q}(n) + O\left(\frac{n}{(\ln n)^\gamma}\right), \quad (1.6)$$

где $0 < \gamma < \varepsilon_0 \ln 2$ и ε_0 определено в § 3.

Справедливость теоремы 1 вытекает из соотношений (1.5) и (1.6). Поэтому теорема 1 будет доказана, как только будут доказаны теоремы 2 и 3.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Всякий целый идеал $\mathfrak{a} \in R(A)$ однозначно представим в виде

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1^2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c} \quad (2.1)$$

с нормой $N(\mathfrak{b}_1^2 \mathfrak{b}_2)$, состоящей из простых делителей дискриминанта Δ , и $(N(\mathfrak{c}), \Delta) = 1$; $\mathfrak{b}_2$ – бесквадратный идеал.

Пусть A, B, C – классы, которым принадлежат соответственно идеалы $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}$. Так как $\mathfrak{b}_1^2 \mathfrak{b}_2 \sim \mathfrak{b}_2$, то $A = B \cdot C$, откуда

$$R(A) = R(B) \cdot R(C) \quad (2.2)$$

(здесь употребляется групповая запись для операций умножения классов и родов).

Так как все идеалы с данной нормой принадлежат соответственно одному и тому же роду, то при фиксированной норме $\sigma = N(\mathfrak{b}_2)$ и заданном роде $R(A)$ род $R_\sigma = R(C)$ будет однозначно определяться равенством (2.2).

Известно [4], что

$$f(m) = \sum_{N(a)=m, a \in R} 1 = \sum_{x|m} \chi(x). \quad (2.3)$$

Поэтому для m , содержащего только простые делители дискриминанта Δ , имеет место равенство

$$\sum_{N(b)=m, b \in R(B)} 1 = 1. \quad (2.4)$$

Из (1.4), (2.2), (2.4) находим, что

$$\tilde{Q}(n) = w \sum_{\sigma|\mathcal{P}} \sum_{\substack{m' - r^2 \sigma N(c) = a \\ c \in R_\sigma, (N(c), \Delta) = 1}} 1, \quad (2.5)$$

где r пробегает натуральные числа, содержащие в каноническом разложении только степени простых делителей из $\mathcal{P}$.

Для выражения условий принадлежности идеалов заданному роду воспользуемся символом Гильберта. Тогда из (2.3), (2.5) и свойств символа Гильберта будем иметь

$$\tilde{Q}(n) = w \sum_{\sigma|\mathcal{P}} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{\substack{m' - r^2 \sigma xy = a, r^2 \sigma xy \leq n, \\ xy \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}, \Omega(m') \leq 6}} \chi(x), \quad (2.6)$$

где $\mathcal{L}$ пробегает некоторый набор $(\mathcal{L})_\sigma$ в количестве $\varphi(|\Delta|)/2g$ значений, причем $0 < \mathcal{L} < |\Delta|$, $(\mathcal{L}, \Delta) = 1$, $\chi(\mathcal{L}) = 1$. Будем считать, что в (2.6) $(r, a) = 1$, $(\sigma, a) = 1$ и $r^2 \sigma \leq (\ln n)^{C_0}$, что вносит в (2.6) допустимую погрешность

$$O(n/(\ln n)^{C_0/3}). \quad (2.7)$$

С допустимой погрешностью можно также считать, что в (2.6) выполняется условие

$$(a + r^2 \sigma \mathcal{L}, r^2 \sigma \Delta) = (a + r^2 \sigma \mathcal{L}, \Delta) = 1. \quad (2.8)$$

Представим $\tilde{Q}(n)$ в виде

$$\tilde{Q}(n) = \tilde{Q}_1(n) - \tilde{Q}_2(n), \quad (2.9)$$

где

$$\tilde{Q}_1(n) = w \sum_{\sigma|\mathcal{P}} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{r^2 \sigma \leq (\ln n)^{C_0}} \sum_{\substack{m' - r^2 \sigma xy = a, \Omega(m') \leq 883, \\ xy \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}}} \chi(x), \quad (2.10)$$

$$\tilde{Q}_2(n) = w \sum_{\sigma|\mathcal{P}} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{r^2 \sigma \leq (\ln n)^{C_0}} \sum_{\substack{m' - r^2 \sigma xy = a, 7 \leq \Omega(m') \leq 883, \\ xy \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}}} \chi(x), \quad (2.11)$$

а остальные условия в (2.10) и (2.11) такие же, что и в (2.6).

Произведем асимптотический расчет $\tilde{Q}_2(n)$. Преобразуем $\tilde{Q}_2(n)$ к виду

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2(n) &= w \sum_{\sigma | \mathcal{P}} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{r^2 \sigma \leq (\ln n)^{C_0}} \left(2 \sum_{\substack{m' - r^2 \sigma xy = a, x \leq \sqrt{n}, \\ r^2 \sigma xy \leq n, 7 \leq \Omega(m') \leq 883, \\ xy \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}}} \chi(x) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{m' - r^2 \sigma xy = a, x \leq \sqrt{n}, \\ r^2 \sigma xy \leq r^2 \sigma x \sqrt{n}, xy \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}, \\ 7 \leq \Omega(m') \leq 883}} \chi(x) \right) \\ &= w \sum_{\sigma | \mathcal{P}} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{r^2 \sigma \leq (\ln n)^{C_0}} (2S - T) + O\left(\frac{n}{(\ln n)^{C_1}}\right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где остальные условия на $\mathcal{L}$, r , σ , a те же, что и в (2.6). Суммы S и T будем рассчитывать дисперсионным методом, причем, этот расчет можно объединить, если ввести сумму $A(n)$ с параметром n_1 следующим образом

$$A(n) = \sum_{\substack{m' - r^2 \sigma xy = a, x \leq \sqrt{n}, \\ r^2 \sigma xy \leq n_1, 7 \leq \Omega(m') \leq 883, xy \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}, \\ (\mathcal{L}, \Delta) = 1, \chi(\mathcal{L}) = 1}} \chi(x), \quad (2.13)$$

где n_1 имеет значения n или $r^2 \sigma x \sqrt{n}$, r , σ , $\mathcal{L}$ – фиксированные. Асимптотику $A(n)$ будем искать дисперсионным методом, используя его вариант с когерентными числами. Для этого наряду с $A(n)$ рассмотрим сумму

$$A_i(n) = \sum_{m' - r^2 \sigma xy = a_i} \chi(x), \quad (2.14)$$

а остальные условия те же, что в (2.13). В (2.14) $a_i = a \cdot q_i$ ($i = 1, 2, \dots, s_1$), где q_i – квазипростые числа интервала $(\frac{1}{2}n^{1-\varepsilon_1}, n^{1-\varepsilon_1})$ при вычерпывании до $n^{1/(\ln \ln n_0)^2}$ (см. [5, с. 37]), подчиненные дополнительному условию $q_i \equiv 1 \pmod{r^2 \sigma |\Delta|}$, $n_0 = n^{1-\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$ – малая константа, s_1 – число квазипростых чисел указанного вида в интервале $(\frac{1}{2}n^{1-\varepsilon_1}, n^{1-\varepsilon_1})$. Заметим, что по лемме 3 работы [6] получим

$$s_1 = \frac{s}{\varphi(r^2 \sigma |\Delta|)} + B \frac{n^{1-\varepsilon_1}}{(\ln n)^C r^2 \sigma |\Delta|}, \quad (2.15)$$

где $C > 0$ – любая константа, s – число всех квазипростых чисел в интервале $(\frac{1}{2}n^{1-\varepsilon_1}, n^{1-\varepsilon_1})$. Сумма $A(n)$ будет частным случаем суммы $A_i(n)$,

если при $i = 0$ положить $a_0 = a$, т.е. $A(n) = A_0(n)$. Будем рассматривать $A_i(n)$ при $i = 0, 1, \dots, s_1$. Сначала покажем, что все $A_i(n)$ с допустимой погрешностью совпадают друг с другом. Для этого можно сравнивать $A_0(n)$ с $A_i(n)$, где i – любой фиксированный номер $i = 1, 2, \dots, s_1$. Приведем уравнение в (2.14) к виду, удобному для применения дисперсионного метода. Можно показать, что $A_i(n)$ с допустимой погрешностью порядка $Bn/(\ln n)^{C_2}$ совпадает с суммой

$$B_i(n) = \sum_{\mathcal{D}'\nu - r^2\sigma xy = a_i} \chi(x), \quad (2.16)$$

где $\nu \in (\nu) = (\nu_0 - \nu'_0, \nu_0]$, $\nu'_0 = \nu_0/(\ln n)^{K_1}$, $n^{1/883} \leq \nu_0 \leq n_1^{1/7}$, ν – простое число; $\mathcal{D}' \in (\mathcal{D}) = (an^{1-\varepsilon_1}/\nu_0, n_1/\nu_0]$, все простые делители $\mathcal{D}'$ больше ν_0 и различны, $6 \leq \Omega(\mathcal{D}') \leq 882$; $\mu(\mathcal{D}') \neq 0$, $(r^2\sigma, a) = 1$; $\mathcal{D}'$ повторяется $(k-1)!$ раз, где $7 \leq k \leq 883$. $(\nu\mathcal{D}', \Delta a) = 1$ откуда следует, что $(x, a) = 1$, $r^2\sigma xy \leq n_1$, $x \leq \sqrt{n}$, $xy \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}$, $\chi(\mathcal{L}) = 1$, $(\mathcal{L}, \Delta) = 1$.

Рассмотрим теперь $B_0(n)$ и $B_i(n)$, где i – любой фиксированный номер, $i = 1, 2, \dots, s_1$, когда $\mathcal{D}'$ пробегает в них одну и ту же последовательность значений. Составляя разность V сумм $B_0(n)$ и $B_i(n)$ и применяя затем к V неравенство Коши–Буняковского, получим

$$V^2 \leq B \frac{n}{\nu_0} V', \quad (2.17)$$

где

$$V' = \sum_{\mathcal{D}' \in (\mathcal{D})} \left(\sum_{\mathcal{D}'\nu_2 - r^2\sigma xy = a} \chi(x) - \sum_{\mathcal{D}'\nu_1 - r^2\sigma zt = a_i} \chi(z) \right)^2$$

– дисперсия разности сумм $B_0(n)$ и $B_i(n)$. Далее, очевидно, что

$$V' \leq V'' = \sum_{\mathcal{D} \in (\mathcal{D})} \left(\sum_{\mathcal{D}\nu_2 - r^2\sigma xy = a} \chi(x) - \sum_{\mathcal{D}\nu_1 - r^2\sigma zt = a_i} \chi(z) \right)^2, \quad (2.18)$$

где $\mathcal{D}$ пробегает уже все натуральные числа из $(\mathcal{D})$. Преобразуя (2.18), получим при $\nu_1, \nu_2 \in (\nu)$, $\nu_1 \neq \nu_2$ (ν_1, ν_2 – простые) выражение

$$V'' = V_1 - 2V_2 + V_3 + O(n \exp(-\sqrt{\ln n})), \quad (2.19)$$

где V_1, V_2, V_3 представляют собой следующие основные суммы дисперсионного метода:

$$V_1 = \sum_{\nu_1 r^2\sigma xy - \nu_2 r^2\sigma zt = a(\nu_2 - \nu_1)} \chi(x)\chi(z),$$

$$\begin{aligned}
& \text{где } x, z \leq \sqrt{n}, \quad \frac{a + r^2 \sigma xy}{\nu_2} \in (\mathcal{D}), \quad xy \equiv zt \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}, \\
& \chi(\mathcal{L}) = 1, \quad (x, a) = (z, a) = 1; \\
V_2 = & \sum_{\nu_1 r^2 \sigma xy - \nu_2 r^2 \sigma zt = a_i \nu_2 - a \nu_1} \chi(x) \chi(z), \\
& \text{где } x, z \leq \sqrt{n}, \quad \frac{a + r^2 \sigma xy}{\nu_2} \in (\mathcal{D}), \\
& xy \equiv zt \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}, \quad \chi(\mathcal{L}) = 1, \quad (x, a) = (z, a) = 1; \\
V_3 = & \sum_{\nu_1 r^2 \sigma xy - \nu_2 r^2 \sigma zt = a_i (\nu_2 - \nu_1)} \chi(x) \chi(z), \\
& \text{где } x, z \leq \sqrt{n}, \quad \frac{a_i + r^2 \sigma xy}{\nu_2} \in (\mathcal{D}), \\
& xy \equiv zt \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}, \quad \chi(\mathcal{L}) = 1, \quad (x, a) = (z, a) = 1.
\end{aligned}$$

ОСНОВНАЯ ЛЕММА ДИСПЕРСИОННОГО МЕТОДА. Пусть n – достаточно большое натуральное число и пусть ν_1, ν_2 – простые числа, удовлетворяющие условиям $\nu_1 \neq \nu_2$, $n^{1/883} \leq \nu_i \leq n^{1/7}$, $\nu_i \in (\nu_0 - \nu'_0, \nu_0]$ ($i = 1, 2$), где $n^{1/883} \leq \nu_0 \leq n^{1/7}$, $\nu'_0 = \nu_0 / (\ln n)^{K_1}$, $K_1 > 0$ – любая константа. Положим $(\mathcal{D}) = (an^{1-\varepsilon_1} / \nu_0, n / \nu_0)$, где $0 < \varepsilon_1 < 1$, ε_1 – фиксировано. Пусть

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_1 = & \sum_{\nu_1 k xy - \nu_2 k zt = a(\nu_2 - \nu_1)} \chi(x) \chi(z), \\
& \text{где } x, z \leq n^{1/2+\alpha}, \quad \frac{kxy + a}{\nu_2} \in (\mathcal{D}), \\
& xy \equiv zt \equiv \mathcal{L} \pmod{\tilde{d}}, \quad \chi(\mathcal{L}) = 1, \quad (x, a) = (z, a) = 1; \\
\tilde{V}_2 = & \sum_{\nu_1 k xy - \nu_2 k zt = a_1 \nu_2 - a \nu_1} \chi(x) \chi(z), \\
& \text{где } x, z \leq n^{1/2+\alpha}, \quad \frac{kxy + a}{\nu_2} \in (\mathcal{D}), \quad xy \equiv zt \equiv \mathcal{L} \pmod{\tilde{d}}, \\
& \chi(\mathcal{L}) = 1, \quad (x, a) = (z, a) = 1; \\
\tilde{V}_3 = & \sum_{\nu_1 k xy - \nu_2 k zt = a_1 (\nu_2 - \nu_1)} \chi(x) \chi(z), \\
& \text{где } x, z \leq n^{1/2+\alpha}, \quad \frac{kxy + a_1}{\nu_2} \in (\mathcal{D}), \quad xy \equiv zt \equiv \mathcal{L} \pmod{\tilde{d}}, \\
& \chi(\mathcal{L}) = 1, \quad (x, a) = (z, a) = 1,
\end{aligned}$$

причем, $\chi(x)$ – действительный неглавный характер с положительным периодом $\tilde{d}$, $0 \leq \mathcal{L} < \tilde{d}$, $(\mathcal{L}, \tilde{d}) = 1$; k – целое число, удовлетворяющее условию $1 \leq k \leq (\ln n)^{C_0}$ (C_0 – большая константа), $(k, a) = 1$,

$(k\mathcal{L} + a, \tilde{d}) = 1$, $a \neq 0$ – фиксированное число, a и a_1 – когерентные числа (см. [5, с. 22], и [2]), $0 < \alpha < 1/42$. Тогда

$$\tilde{V}_1 - 2\tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 = O\left(n \frac{(\nu'_0)^2}{\nu_0} (\ln n)^{-K_2}\right),$$

K_2 – любая положительная константа.

Для доказательства леммы производится асимптотический расчет сумм $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3$. Эти суммы вычисляются одним методом и все рассуждения полностью совпадают с рассуждениями, проводимыми при доказательстве основной леммы работы [3] с заменой лишь неглавного характера mod 4 характером $\chi(x)$ и 2^λ числом k . Значения $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3$, каждое из которых выражается одной и той же формулой с одинаковым главным членом, совпадают друг с другом с точностью до остаточного члена вида $(Bn/\nu_0) \times (\nu'_0)^2 (\ln n)^{-K_2}$, что и доказывает лемму.

Для оценки V'' из (2.19) применим теперь основную лемму, положив $\tilde{d} = |\Delta|$ и $k = r^2\sigma$. Заметим, что эта лемма применима независимо от значения параметра n_1 (см. определение $(\mathcal{D})$ в (2.16)). Если $n_1 = n$, то V'' можно оценить по лемме, что очевидно. Если $n_1 = r^2\sigma x\sqrt{n}$, где $x \leq \sqrt{n}$ и $r^2\sigma \leq (\ln n)^{C_0}$, то легко показать, что и в этом случае лемма применима для оценки V'' . Итак, формулы (2.18), (2.19) и основная лемма дают

$$|V| = O\left(n \frac{\nu'_0}{\nu_0} (\ln n)^{-K_3/2}\right), \quad (2.20)$$

где $\nu'_0/\nu_0 = (\ln n)^{-K_1}$, $K_3 > 0$ – любая константа. Суммируя (2.20) по всем сегментам (ν) , число которых есть $B(\ln n)^{K_1+1}$, будем иметь оценку

$$B_0(n) - B_i(n) = O\left(\frac{n}{(\ln n)^{C_3}}\right),$$

где i имеет одно из значений $1, 2, \dots, s_1$; $C_3 > 0$ – любая константа. Отсюда, приняв во внимание (2.16) и то, что $A(n) = A_0(n)$, путем суммирования по всем значениям $i = 1, 2, \dots, s_1$, выводим равенство

$$A(n) = \frac{1}{s_1} \tilde{A}(n) + O\left(\frac{n}{(\ln n)^{C_3/2}}\right), \quad (2.21)$$

где

$$\tilde{A}(n) = \sum_{i=1}^{s_1} \sum_{\substack{m' - r^2\sigma xy = a_i, x \leq \sqrt{n}, r^2\sigma xy \leq n_1, \\ xy \equiv \mathcal{L} \pmod{|\Delta|}, \chi(\mathcal{L})=1, 1 \leq \Omega(m') \leq 883, (\mathcal{L}, \Delta)=1}} \chi(x). \quad (2.22)$$

Далее находим асимптотику $\tilde{A}(n)$, что представляет собой уже тернарную задачу, которая решается с помощью леммы Хооли о распределении квазипростых чисел в арифметических прогрессиях. Применим усиленный вариант этой леммы (лемма 3 работы [6]). Опуская промежуточные рассуждения, получим

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2(n) = & w \sum_{\sigma | \mathcal{P}} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{r^2 \sigma \leq (\ln n)^{C_0}} \sum_{x \leq \sqrt{n}, (x, a | \Delta) = 1} \frac{\chi(x)}{\varphi(r^2 \sigma | \Delta | x)} \\ & \times \left(2 \sum_{\substack{m' \leq n, (m', x) = 1, \\ 7 \leq \Omega(m') \leq 883}} 1 - \sum_{\substack{m' \leq r^2 \sigma x \sqrt{n}, (m', x) = 1, \\ 7 \leq \Omega(m') \leq 883}} 1 \right) + O\left(\frac{n}{(\ln n)^{C_7}}\right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Асимптотический расчет $\tilde{Q}_1$ произведем с помощью основной теоремы работы [2], тогда имеем

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1(n) = & w \sum_{\sigma | \mathcal{P}} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{r^2 \sigma \leq (\ln n)^{C_0}} \sum_{x \leq \sqrt{n}, (x, a | \Delta) = 1} \frac{\chi(x)}{\varphi(r^2 \sigma | \Delta | x)} \\ & \times \left(2 \sum_{\substack{m' \leq n, \Omega(m') \leq 883, \\ (m', x) = 1}} 1 - \sum_{\substack{m' \leq r^2 \sigma x \sqrt{n}, \Omega(m') \leq 883, \\ (m', x) = 1}} 1 \right) + O\left(\frac{n}{(\ln n)^{C_4}}\right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из (2.9), (2.23), (2.24) получим асимптотическую формулу для

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(n) = & w \sum_{\sigma | \mathcal{P}} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{r^2 \sigma \leq (\ln n)^{C_0}} \sum_{x \leq \sqrt{n}, (x, a | \Delta) = 1} \frac{\chi(x)}{\varphi(r^2 \sigma | \Delta | x)} \\ & \times \left(2 \sum_{\substack{m' \leq n, \Omega(m') \leq 6, \\ (m', x) = 1}} 1 - \sum_{\substack{m' \leq r^2 \sigma x \sqrt{n}, \Omega(m') \leq 6, \\ (m', x) = 1}} 1 \right) + O\left(\frac{n}{(\ln n)^{C_5}}\right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Доказательство теоремы 2 завершается расчетом внутренних сумм в (2.25) с помощью леммы 2.3.2 работы [7] (применяется видоизмененный вариант

этой леммы, доказательство которого аналогично). Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(n) &= t_0 \frac{4\pi g}{\varphi(|\Delta|)\sqrt{|\Delta|}} \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) \\ &\times \sum_{\sigma|\mathcal{P}, (\sigma, a)=1} \frac{1}{\sigma} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{\substack{r=1, (r, a)=1, \\ (a+r^2\sigma\mathcal{L}, \Delta)=1}}^{\infty} \frac{1}{r^2} \prod_{\substack{p|r^2\sigma, \\ p \nmid \Delta}} \frac{p^2}{p^2 - p + \chi(p)} \\ &\times \sum_{m' \leq n} \prod_{p|a\Delta m'} \frac{(p-1)(p-\chi(p))}{p^2 - p + \chi(p)} + O\left(\frac{n}{(\ln n)^{C_6}}\right), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \sum_{m' \leq n} \prod_{p|a\Delta m'} \frac{(p-1)(p-\chi(p))}{p^2 - p + \chi(p)} &= \sum_{m' \leq n} A(\Delta, m'), \\ B_1 \frac{n}{\ln n} (\ln \ln n)^4 &\leq \frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}} \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) \sum_{m' \leq n} A(\Delta, m') \\ &\leq B_2 \frac{n}{\ln n} (\ln \ln n)^6; \\ \frac{2g}{\varphi(|\Delta|)} \sum_{\sigma|\mathcal{P}} \frac{1}{\sigma} \sum_{\mathcal{L} \in (\mathcal{L})_\sigma} \sum_{\substack{r=1, (r, a)=1, \\ (a+r^2\sigma\mathcal{L}, \Delta)=1}}^{\infty} \frac{1}{r^2} \\ &\times \prod_{\substack{p|r^2\sigma, \\ p \nmid \Delta}} \frac{p^2}{p^2 - p + \chi(p)} = C_\varphi \geq C_0 \geq 0. \end{aligned}$$

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Обозначим

$$\tilde{S}(n) = w\tilde{Q}(n) = \sum_{m' - N(\mathfrak{a}) = a, \mathfrak{a} \in R} 1, \quad (3.1)$$

где R – фиксированный род, определяемый заданной формой $\varphi(u, v)$. Из (2.3) и (3.1) следует, что

$$\tilde{S}(n) = \sum_{m' - m = a, m' - m \leq n} f(m), \quad (3.2)$$

где $f(m)$ – число решений уравнения

$$N(\mathfrak{a}) = m \quad (3.3)$$

при условии, что целые идеалы $\mathfrak{a}$ пробегает заданный род R ; для m выполняются родовые условия:

$$\left(\frac{m, \Delta}{p}\right) = e_p(R) \text{ для всех } p, \text{ включая } p = \infty.$$

Множество чисел m , удовлетворяющих соотношению (3.2), разобьем на два класса. В класс E включим те m , в разложение которых входит по крайней мере K_0 простых чисел p_{ij} ($j = 1, 2, \dots, K_0$) точно в первой степени, для которых $\chi(p_{ij}) = 1$. Следовательно, $p_{ij} = \mathfrak{p}_{ij}\mathfrak{p}'_{ij}$, $\mathfrak{p}_{ij} \neq \mathfrak{p}'_{ij}$ ($\mathfrak{p}'_{ij}$ – сопряженный идеал), $N(\mathfrak{p}_{ij}) = N(\mathfrak{p}'_{ij}) = p_{ij}$. При этом $\mathfrak{p}_{ij}$ (или $\mathfrak{p}'_{ij}$) лежат в C_i для каждого $i = 1, 2, \dots, h$. $K_0 = [\varepsilon_0 \ln \ln n]$, где ε_0 – наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{1}{h} - 2\varepsilon \ln 2 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon = 0. \quad (3.4)$$

Таким образом,

$$\tilde{S}(n) = \sum_{m'-m=a, m \in E} f(m) + \sum_{m'-m=a, m \in F} f(m) = \sum_E + \sum_F. \quad (3.5)$$

Сумму $\sum_F$ оценим сверху с помощью лемм 3 и 4 работы [1], и леммы 2.

ЛЕММА 2 (см. [8]). Пусть n – достаточно большое число, $l \neq 0$ – заданное целое число, d, r – целые числа с условием

$$(d, r) = 1, \quad dr \leq 0.1n, \quad 0 < \beta < 1.$$

а) Число решений уравнения

$$n = dQ_1 + rQ_2, \quad (3.6)$$

где все простые делители Q_1 и Q_2 больше n^β , имеет оценку

$$B \frac{n}{rd} \left(\frac{1}{\ln^2 \frac{n}{rd}} + \frac{1}{(\beta \ln n)^2} \right) (\ln \ln n)^2 \left(\ln \ln \frac{n}{rd} \right), \quad (3.7)$$

где B – ограниченная абсолютной константой функция.

б) Число решений уравнения

$$dQ_1 - rQ_2 = l \quad (3.8)$$

есть та же величина (3.6).

Обозначим через F_i множество тех m , в разложение которых входит меньше, чем K_0 , простых чисел p_{ij} точно в первой степени, для которых $\chi(p_{ij}) = 1$, $p_{ij} = \mathfrak{p}_{ij}\mathfrak{p}'_{ij}$, $\mathfrak{p}_{ij} \in C_i$ или $\mathfrak{p}'_{ij} \in C_i$. Очевидно, что

$$\sum_F \leq h \max_i \sum_{F_i}, \quad (3.9)$$

где

$$\sum_{F_i} = \sum_{m' - m = a, m \in F_i} f(m) \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Родовые условия для m из соотношений (3.3) в (3.9) отброшены. Положим

$$\sum_{F_i} = \sum_{F'_i} + \sum_{F''_i}, \quad (3.10)$$

где множество F'_i содержит числа m , имеющие только простые делители $p \leq n^{1/\ln \ln n}$, а F''_i содержит числа m , каждое из которых имеет хотя бы один простой делитель $p > n^{1/\ln \ln n}$, т.е. $F_i = F'_i \cup F''_i$. Оценим $\sum_{F'_i}$. Очевидно, что $\sum_{F'_i} \leq \sum_{m \leq n, m \in F'_i} \tau(m)$. Отсюда, применяя неравенство Коши–Буняковского, будем иметь

$$\sum_{F'_i} \leq \left(\sum_{m \leq n, m \in F'_i} 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{m \leq n} \tau^2(m) \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

В лемме 3 работы [1] возьмем $x = n$, $z = n^{1/\ln \ln n}$. Тогда из этой леммы следует, что

$$\sum_{m \leq n, m \in F'_i} 1 = O(n(\ln n)^{-C_0}), \quad (3.12)$$

где C_0 – достаточно большое положительное число. В то же время

$$\sum_{m \leq n} \tau^2(m) = O(n \ln^3 n). \quad (3.13)$$

Так как C_0 – достаточно большое положительное число, то из (3.11)–(3.13) выводим оценку

$$\sum_{F'_i} = O\left(\frac{n}{(\ln n)^C}\right), \quad (3.14)$$

где C – большая константа, зависящая от C_0 . Оценим $\sum_{F''_i}$. Принимая во внимание соотношение (2.3), находим, что

$$\sum_{F''_i} \leq \sum_{m' - p'^\alpha m = a} \sum_{x | p'^\alpha m} \chi(x) = \sum_1 + \sum_2, \quad (3.15)$$

где $p' > n^{1/\ln \ln n}$, $(p', m) = 1$, $m \in F'_i$; $\alpha = 1$ в $\sum_1$ и $\alpha \geq 2$ в $\sum_2$. Сумма $\sum_2$ оценивается грубо следующим образом

$$\sum_2 \leq 2 \sum_{p'^\alpha m \leq n, \alpha \geq 2} \alpha \tau(m) = O\left(\frac{n}{(\ln n)^{C_0}}\right). \quad (3.16)$$

Для оценки $\sum_1$ применим лемму 2. Получим

$$\sum_1 \leq C_1 \frac{n(\ln \ln n)^6}{\ln^2 n} \sum_{N(a) \leq n, N(a) \in F_i} \frac{1}{N(a)}. \quad (3.17)$$

Для оценки суммы в (3.17) потребуется

ЛЕММА 3. *Имеет место равенство*

$$\sum_{N(a) \leq n, N(a) \in F_i} \frac{1}{N(a)} = O(\ln \ln n (\ln n)^{1-1/h + \varepsilon_0 \ln 2e - \varepsilon_0 \ln \varepsilon_0}). \quad (3.18)$$

Эта лемма следует из соотношений (3.17), (3.19), (3.20), (3.28) и (3.29) работы [1]. Из оценок (3.17), (3.18) данного параграфа будем иметь

$$\sum_1 = O\left(\frac{n(\ln \ln n)^7 (\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2e - \varepsilon_0 \ln \varepsilon_0}}{(\ln n)^{1+1/h}}\right). \quad (3.19)$$

Далее, из (3.9), (3.10), (3.14), (3.15), (3.16), (3.19) получим оценку для $\sum_F$:

$$\sum_F = O\left(\frac{n(\ln \ln n)^7 (\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2e - \varepsilon_0 \ln \varepsilon_0}}{(\ln n)^{1+1/h}}\right). \quad (3.20)$$

Оценим сумму $\sum_E$, применяя лемму 5 работы [1]. Тогда $\sum_E$ можно записать в виде

$$\sum_E = t_0 \sum_{m' - m = a, m \in E} f_A(m) \left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2}}\right)\right). \quad (3.21)$$

Окончательно имеем $Q(n) = w \sum_{m' - m = a} f_A(m)$. Следовательно,

$$Q(n) = w \sum_{m' - m = a, m \in E} f_A(m) + O\left(\sum_F\right). \quad (3.22)$$

Из (3.21) и (3.22) находим, что

$$Q(n) = \frac{w}{t_0} \sum_E \left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2}}\right)\right) + O\left(\sum_F\right).$$

Из (3.1) и (3.5) получаем $\sum_E + \sum_F = \frac{1}{w} \tilde{Q}(n)$. Таким образом,

$$\tilde{Q}(n) = \frac{1}{t_0} \tilde{Q}(n) \left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2}}\right)\right) + O\left(\sum_F\right). \quad (3.23)$$

Пусть число ε_1 удовлетворяет условию

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 \ln 2, \quad (3.24)$$

где ε_0 – наименьший положительный корень уравнения (3.4). Тогда из (1.5), (3.20), (3.23) следует, что

$$Q(n) = \frac{1}{t_0} \tilde{Q}(n) + O\left(\frac{n}{(\ln n)^{\varepsilon_1}}\right).$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бредихин Б. М., Линник Ю. В. Асимптотика и эргодические свойства решений обобщенного уравнения Гарди–Литтлвуда // Матем. сб. 1966. Т. 71. № 2. С. 145–161.
- [2] Fouvry E., Iwaniec H. On a theorem of Bombieri–Vinogradov type // *Mathematika*. 1980. V. 27. № 2. P. 135–152.
- [3] Пиядина Ж. В. Об одном аналоге уравнения Харди–Литтлвуда // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 3. С. 58–67.
- [4] Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1964.
- [5] Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.
- [6] Пиядина Ж. В. Аддитивные задачи с почти простыми числами. Дисс. ... к. ф.-м. н. Куйбышев, 1990.
- [7] Бредихин Б. М. Дисперсионный метод и бинарные аддитивные проблемы определенного типа // УМН. 1965. Т. 20. № 2. С. 89–130.
- [8] Виноградов А. И. Обобщение леммы Эрдеша // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астроном. 1960. № 19. С. 124–126.
- [9] Виноградов А. И. О числах с малыми простыми делителями // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. № 4. С. 683–686.
- [10] Бредихин Б. М. Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$ // Изв. вузов. Матем. 1960. Т. 6. № 19. С. 40–49.