Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, К вопросу об алгоритмах приближенного вычисления минимума выпуклой функции по ее значениям, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 95–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:59:27

К ВОПРОСУ ОБ АЛГОРИТМАХ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ МИНИМУМА ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ЗНАЧЕНИЯМ

В. Ю. Протасов

1. Введение. Пусть нам дана выпуклая функция $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f \neq \text{const}$, где $G \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое тело (выпуклый компакт с непустой внутренностью). Мы можем вычислить функцию f в любой данной точке $x \in G$, и это вычисление составляет одну операцию. Требуется найти минимум функции f с заданной точностью, затратив при этом возможно меньшее число операций.

Работа посвящена алгоритму приближенной минимизации выпуклой функции по ее значениям, который затрачивает (асимптотически по размерности области определения) существенно меньшее число операций, чем ранее построенные алгоритмы.

2. Постановка задачи. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое тело, $V(G)$ – совокупность всех выпуклых непрерывных функций на G . Для заданного ε ($1/2 > \varepsilon > 0$) обозначим через $\nu(G, \varepsilon)$ минимальное число операций, необходимое для того, чтобы для любой функции $f \in V(G)$ найти точку $x \in G$, в которой относительное отклонение от минимума не превосходит ε (т.е. $(f(x) - \min_{t \in G} f(t)) / (\max_{t \in G} f(t) - \min_{t \in G} f(t)) \leq \varepsilon$).

Требуется оценить величину $\nu(G, \varepsilon)$ сверху.

Для данной точки $y \in G$ обозначим через $G'(y)$ – выпуклое тело, лежащее в G и обладающее следующим свойством:

$$\forall t \in G \setminus G'(y) \quad f(t) \geq f(y).$$

В работе [1] доказано, что если для данной точки $y \in G$ существует тело $G'(y)$ такое, что

$$\text{Vol}(G'(y)) \leq \varepsilon^n \text{Vol}(G),$$

то относительное отклонение от минимума в точке y не превосходит ε .

Задача, таким образом, сводится к нахождению такой точки $y \in G$, для которой существует тело $G'(y)$ объема, не превосходящего $\varepsilon^n \text{Vol}(G)$.

Такая постановка задачи восходит к работе [2], где в одномерном случае, когда $G = [a, b]$, величина $\nu(G, \varepsilon)$ была вычислена точно (известный метод с числами Фибоначчи).

В многомерном случае, когда наряду со значением функции разрешается вычислять и ее градиент (при этом функция предполагается гладкой), были построены эффективные алгоритмы и получены оптимальные оценки (см. [1] и [2]).

Для минимизации функции только по ее значениям в многомерном случае оптимальных оценок пока не получено. В работе [1] было показано, что $\nu(G, \varepsilon) \leq C(n) \ln(1/\varepsilon)$, но коэффициент $C(n)$ экспоненциально рос с размерностью n . В работе [3] оценка была улучшена:

$$\nu(G, \varepsilon) \leq C \ln \frac{1}{\varepsilon} n^7 \ln^2(n+1),$$

где C – не зависит от размерности n . Основной целью настоящей работы является построение алгоритма, приводящего к оценке

$$\nu(G, \varepsilon) \leq C \ln \frac{1}{\varepsilon} n^2 \ln(n+1).$$

3. Описание алгоритма. В нашем алгоритме сочетаются метод центрированных сечений А. Ю. Левина и общий замысел метода работы [3], но сама конструкция существенно иная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конус

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{(x-a, b)}{\|x-a\| \cdot \|b\|} \geq \cos \varphi, a \in G, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

(т.е. “прямой шаровой” конус с вершиной a , направляющим вектором b и раствором φ) назовем (y, φ) -конусом для некоторой точки $y \in G$, если $\forall x \in G \cap K f(x) \geq f(y)$.

Если K есть (y, φ) -конус для некоторой точки $y \in G$, то выпуклая оболочка множества $G \setminus K$ является $G'(y)$ -телом.

Идея метода состоит в том, чтобы последовательно “отрезать” от области определения функции f некоторую часть объема, и, после нужного числа шагов, получить точку y и тело $G'(y)$, для которого

$$\text{Vol}(G'(y)) \leq \varepsilon^n \text{Vol}(G).$$

Изложению алгоритма предпослём два вспомогательных утверждения, второе из которых будет доказано в конце статьи.

ЛЕММА 1 [4, с.130]. *Для любого выпуклого тела G существует аффинное преобразование $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, сохраняющее объем, такое, что тело $F(G)$ обладает следующим свойством:*

- (*) *Существует два концентрических шара Γ и γ , причем Γ содержит данное тело, а γ содержится в нем, и при этом $R/r = n$, где R и r – радиусы шаров Γ и γ соответственно.*

ЛЕММА 2. Если выпуклое тело $G \subset \mathbb{R}^n$ обладает свойством (*), g – его центр тяжести и K – конус с вершиной $a \in G$ и раствором φ , причем $\cos \varphi \leq 1/(8n^2)$, $\|a - g\| \leq R/(4n^2)$, то

$$\text{Vol}(\text{Co}(G \setminus K)) \leq \frac{11}{12} \text{Vol}(G)$$

($\text{Co}(X)$ – выпуклая оболочка множества X).

АЛГОРИТМ. Дано: $G \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое тело, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ – выпуклая функция, число $\varepsilon > 0$. Требуется – построить выпуклое тело $G'(y) \subset G$, объем которого не превосходит $\varepsilon^n \text{Vol}(G)$ и точку $y \in G$.

Нулевой шаг. Применяем к телу G аффинное преобразование F_0 из леммы 1. Тело $F_0(G)$ обладает свойством (*). Находим центр тяжести g тела $F_0(G)$.

После этого полагаем $G_0 = F_0(G)$, $g_0 = g$, $f_0 = f(F_0^{-1})$.

Пусть проделано m шагов. При этом получилось тело G_m , обладающее свойством (*), его центр тяжести – точка g_m и функция $f_m: G_m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$(m + 1)$ -й шаг. С помощью специальной конструкции в множестве G_m строятся (g_m, φ) -конус K_{m+1} , вершина и раствор которого удовлетворяют условию леммы 2. После этого остается положить: $G_{m+1} = F_{m+1}(\text{Co}(G_m \setminus K_{m+1}))$, $f_{m+1} = f_m(F_{m+1}^{-1})$, где F_{m+1} – аффинное преобразование из леммы 1 для тела $\text{Co}(G_m \setminus K_{m+1})$.

Согласно лемме 2 $\text{Vol}(G_{m+1}) \leq \frac{11}{12} \text{Vol}(G_m)$, поэтому не более чем за $N = n[\log_{11/12} \varepsilon + 1]$ шагов объем тела G_N станет меньше $\varepsilon^n \text{Vol}(G)$. Множество $G'(y) = F_0^{-1} \cdot F_1^{-1} \cdot \dots \cdot F_N^{-1}(G_N)$ будет искомым телом для точки $y = F_0^{-1} \cdot F_1^{-1} \cdot \dots \cdot F_k^{-1}(g_k)$, где g_k – та из точек $\{g_0, g_1, \dots, g_N\}$, в которой значение $f_k(g_k)$ наименьшее.

Центральным моментом является метод построения (g_m, φ) -конуса. Сложность этого метода (количество операций вычисления функции f , необходимых для построения конуса) определяет сложность всего алгоритма в целом.

4. Метод построения (g_m, φ) -конуса. Дано: $G \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое тело, удовлетворяющее свойству (*), g – его центр тяжести, R – радиус шара Γ (см. формулировку леммы 1), $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая функция.

Требуется построить (g, φ) -конус K с вершиной, удаленной от точки g , не более чем на $R/(4n^2)$, и раствором $\varphi = \arccos(1/(8n^2))$ (согласно лемме 1 данные условия гарантируют отсечение $1/12$ объема тела на каждом шаге алгоритма).

Определим следующие константы: $T \geq 3$ – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\cos \frac{2\pi}{T}\right)^n \geq \sin \varphi, \quad \delta = \frac{R}{4n^2}, \quad \delta_k = \delta \left(\frac{\sin^2 2\pi/T}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Первый шаг. Проведем через точку g какую-нибудь двумерную плоскость и построим в ней правильный T -угольник с диаметром δ_1 , одна из вершин которого – точка g .

Найдем три соседние вершины этого T -угольника (обозначив их по порядку b_1, a_1, c_1 , для которых $f(a_1) \geq \max\{f(b_1), f(c_1), f(g)\}$). В качестве a_1 годится, например, вершина с наибольшим значением функции.

Положим $\alpha_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - b_1\| = \|x - c_1\|\} - (n-1)$ -мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$ (“серединный перпендикуляр” к отрезку $[b_1, c_1]$).

Пусть проделано m шагов. Имеем $(n-m)$ -мерную плоскость α_m , точку $a_m \in \alpha_m$.

$(m+1)$ -й шаг. Проводим через точку a_m двумерную плоскость в α_m и построим в ней правильный T -угольник с диаметром δ_{m+1} , так, чтобы точка a_m была одной из его вершин. Найдем в нем три соседние вершины $b_{m+1}, a_{m+1}, c_{m+1}$, для которых выполняется неравенство $f(a_{m+1}) \geq \max\{f(b_{m+1}), f(c_{m+1}), f(a_m)\}$, и проводим $(n-m-1)$ -мерную плоскость α_{m+1} в α_m ; $\alpha_{m+1} = \{x \in \alpha_m \mid \|x - b_{m+1}\| = \|x - c_{m+1}\|\}$.

После $(n-1)$ -го шага получаем прямую α_{n-1} (“одномерная плоскость”) и точку a_{n-1} на ней. Получается, эти прямая и точка будут осью и вершиной соответственно искомого конуса.

ТЕОРЕМА. Конус K с раствором $\varphi = \arccos(1/(8n^2))$, вершиной a_{n-1} и направляющим вектором $(a_{n-1} - b_{n-1}) + (a_{n-1} - c_{n-1})$ есть искомый (g, φ) -конус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим плоскость α_{n-m} ($2 \leq m \leq n$), образующуюся на $(n-m)$ -том шаге алгоритма. Пусть $K_m \subset \alpha_{n-m}$ есть m -мерный конус с направляющим вектором $(a_{n-1} - b_{n-1}) + (a_{n-1} - c_{n-1})$, вершиной a_{n-1} и раствором $\varphi_m = \arcsin(\cos^m(2\pi/T))$.

Докажем по индукции, что K_m есть (a_{n-1}, φ_m) -конус для функции f , ограниченной на множестве $G \cap \alpha_{n-m}$.

База ($m=2$). В этом случае возникает “конус” K_2 на двумерной плоскости α_{n-2} . Надо доказать, что $f(a_{n-1})$ – минимум функции f на множестве K_2 . Предположим, что это не так, т.е. что существует точка $x \in K_2$, для которой $f(x) < f(a_{n-1})$. Тогда из выпуклости функции f следует, что $f(y) > f(a_{n-1})$, где y – точка пересечения прямой xa_{n-1} с отрезком $[b_{n-1}, c_{n-1}]$. Так как $f(a_{n-1}) \geq \max\{f(b_{n-1}), f(c_{n-1})\}$, то $f(y) > \max\{f(b_{n-1}), f(c_{n-1})\}$. Но y является внутренней точкой отрезка $[b_{n-1}, c_{n-1}]$, поэтому последнее неравенство невозможно для выпуклой функции. Противоречие.

В доказательстве мы использовали тот факт, что конус K_2 целиком лежит внутри угла, вертикального к углу $b_{n-1}a_{n-1}c_{n-1}$. Это следует из легко доказываемого неравенства

$$b_{n-1}\widehat{a_{n-1}c_{n-1}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{T} > \arcsin\left[\left(\cos\frac{2\pi}{T}\right)^2\right] = \varphi_2.$$

Индуктивный переход $m \rightarrow (m + 1)$. Имеем (a_{n-1}, φ_m) -конус K_m , лежащий в α_{n-m} .

Надо доказать, что конус K_{m+1} с вершиной a_{n-1} и раствором φ_{m+1} будет (a_{n-1}, φ_{m+1}) -конусом, иначе говоря, $\forall x \in K_{m+1} \quad f(x) \geq f(a_{n-1})$.

Возьмем любую точку $x \in K_{m+1}$. Надо доказать, что $f(x) \geq f(a_{n-1})$.

Так как x лежит внутри конуса, то угол $\widehat{xa_{n-1}b}$ будет меньше угла φ_{m+1} , где $b \in \alpha_{n-1}$ и $bx \perp a_{n-1}x$. Положим $h = \alpha_{n-m} \cap b_{n-m}x$. Не ограничивая общности, можно считать, что точки x и b_{n-m} лежат в пространстве α_{n-m-1} по разные стороны относительно гиперплоскости α_{n-m} , иначе вместо b_{n-m} берем c_{n-m} .

Докажем, что $\widehat{ha_{n-1}b} < \varphi_m$. В этом случае точка h будет лежать внутри конуса K_m и по предположению индукции $f(h) \geq f(a_{n-1})$.

Так как $h \in [x, b_{n-m}]$, то, в силу выпуклости f , имеем неравенство $f(h) \leq \max\{f(x), f(b_{n-m})\}$. Наконец, $f(b_{n-m}) \leq f(a_{n-m}) \leq f(a_{n-1})$ (из алгоритма построения конуса). Объединяя три неравенства, получим $f(x) \geq f(a_{n-1})$, что и требуется для индуктивного перехода.

Остается показать, что $\widehat{ha_{n-1}b} < \varphi_m$. Введем обозначения: b' – проекция точки b на прямую ha_{n-1} , β – двумерная плоскость, проходящая через точки b_{n-1}, a_{n-1}, x . H_b – расстояние от b до плоскости β . Имеем:

$$\sin(\widehat{ha_{n-1}b}) = \frac{\|bb'\|}{\|a_{n-1}b\|} = \frac{\|bb'\|}{\|bx\|} \cdot \frac{\|bx\|}{\|ba_{n-1}\|} < \frac{\|bb'\|}{H_b} \sin \varphi_{m+1} = \frac{\sin \varphi_{m+1}}{\sin \tau},$$

где τ – угол между α_{n-m} и двумерной плоскостью β . Кроме того, очевидно, что $\tau \geq \widehat{ca_{n-1}b_{n-m}}$, где $c = \frac{1}{2}(c_{n-m} + b_{n-m})$,

$$\begin{aligned} \sin \tau &\geq \sin(\widehat{ca_{n-1}b_{n-m}}) = \cos(\widehat{cb_{n-m}a_{n-1}}) \\ &\geq \cos(2\widehat{cb_{n-m}a_{n-m}}) = \cos \frac{2\pi}{T}. \end{aligned}$$

Поясним второе неравенство:

$$\begin{aligned} \|ca_{n-1}\| &\leq \|ca_{n-m}\| + \|a_{n-m}a_{n-1}\| \\ &\leq \|ca_{n-1}\| + \sum_{i=n-m}^{n-2} \|a_i a_{i+1}\| \leq \sum_{i=n-m}^{n-2} \delta_i \\ &\leq \|ca_{n-m}\| + \delta_{n-m-1} \left(\frac{\sin^2 \pi/T}{2} + \dots + \left(\frac{\sin^2 \pi/T}{2} \right)^{m-1} \right) \\ &\leq \|ca_{n-m}\| + \delta_{n-m-1} \sin \frac{2\pi}{T} \leq 2\|ca_{n-m}\|. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из соотношений в правильном T -угольнике с диаметром δ_{n-m-1} . Итак,

$$\sin \widehat{ha_{n-1}b} < \frac{\sin \varphi_{m+1}}{\cos(2\pi/T)} = \left(\cos \frac{2\pi}{T} \right)^m,$$

т.е. $\widehat{ha_{n-1}b} < \varphi_m$.

Для завершения доказательства остается положить $m = n$, $\alpha_0 = \mathbb{R}^n$, $K = K_n$. Получаем n -мерный (a_{n-1}, φ) -конус K с вершиной a_{n-1} и расстоянием $\varphi = \arccos(1/(8n^2))$. В силу выбора точек $a_1, \dots, a_{n-1}$ имеем неравенства $f(g) \leq f(a_1) \leq \dots \leq f(a_{n-1})$. Поэтому всякий (a_{n-1}, φ) -конус будет также и (g, φ) -конусом. В частности, полученный конус K является (g, φ) -конусом. Остается оценить расстояние от вершины конуса K до центра тяжести g :

$$\|ga_{n-1}\| \leq \|a_{n-1}a_{n-2}\| + \dots + \|a_2a_1\| + \|a_1g\| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \leq \delta.$$

Итак, конус K является искомым (g, φ) -конусом. Теорема доказана.

5. Оценка сложности алгоритма. При реализации алгоритма мы должны построить $N = n[\log_{11/12} \varepsilon + 1]$ конусов. Метод построения (g, φ) -конуса состоит из $(n - 1)$ шага. На k -м шаге операция вычисления функции в точке используется только при нахождении вершины a_{k+1} правильного T -угольника, для которой $f(a_{k+1}) \geq \max\{f(a_k), f(b_{k+1}), f(c_{k+1})\}$, где b_{k+1} и c_{k+1} – соседние с a_{k+1} вершины T -угольника, а вершина a_k наперед задана. Обозначим количество операций, необходимых для этого, через $\mu(T)$.

Весь алгоритм, таким образом, использует $(n - 1)n[\log_{11/12} \varepsilon + 1]\mu(T)$ операций. Осталось оценить величину $\mu(T)$.

ЛЕММА 3. $\mu(T) \leq C_1 \ln T$, где C_1 – некая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этого утверждения предъ-
явим способ нахождения в k -м многоугольнике вершин $b_{k+1}, a_{k+1}, c_{k+1}$, для которых $f(a_{k+1}) \geq \max\{f(a_k), f(b_{k+1}), f(c_{k+1})\}$, затрачивающий не более чем $C_1 \ln T$ операций вычисления функции f .

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_T$ – наш T -угольник. Можно считать, что $T = 2^m$, иначе добавим к нему еще вершины $A_{T+1}, \dots, A_{2^m}$ ($2^{m-1} < T \leq 2^m$), доопределив в них функцию f таким образом, чтобы последовательность $f(A_T), f(A_{T+1}), \dots, f(A_{2^m}), f(A_1)$ была монотонной.

Способ таков.

Нулевой шаг. Полагаем $A_1 = a_k$. Из вершин $A_{2^m}, A_{2^m-2}, A_{2^m-1}, A_{3 \cdot 2^{m-2}}$, делящих периметр 2^m -угольника на четыре равные части, выберем вершину с наибольшим значением функции. Обозначим эту вершину через N_1 , а ближайшие к ней (из этих четырех) – через L_1 и P_1 .

i -й шаг. Вычислим $f(M_i), f(O_i)$, где вершины M_i, N_i и O_i делят дугу $L_i P_i$ на четыре равные части (вершины L_i, N_i и P_i , а также значения функции в них вычислялись на предыдущих шагах таким образом, что $f(N_i) \geq f(L_i), f(N_i) \geq f(P_i)$). Из вершин N_i, M_i и O_i выберем вершину

с максимальным значением функции, обозначим ее через N_{i+1} и ближайшие к ней (из этих пяти) – через L_{i+1} и P_{i+1} . Затем переходим к $(i+1)$ -му шагу.

После $(m-1)$ шага полагаем $a_{k+1} = N_m$, $b_{k+1} = L_m$, $c_{k+1} = P_m$, и искомые вершины найдены. При этом функция вычислялась $2m$ раз.

$$2m \leq 2 \log_2 T + 1 \leq C_1 \ln T,$$

где C_1 – константа.

Лемма 3 доказана.

Из определения числа T :

$$\left(\cos \frac{2\pi}{T} \right)^n \geq \sin \left(\arccos \frac{1}{8n^2} \right),$$

легко получить оценку

$$\ln T \leq C_2 \ln(n+1).$$

Итак, получаем

$$\mu(T) \leq C_3 \ln(n+1),$$

C_3 – некая константа.

Итоговая оценка сложности алгоритма такова: общее количество операций не превосходит

$$(n-1)n[\log_{11/12} \varepsilon + 1]C_3 \ln(n+1),$$

C_3 – константа, не зависящая от n и ε .

Алгоритм, таким образом, привел нас к оценке

$$\nu(G, \varepsilon) \leq C \ln \frac{1}{\varepsilon} n^2 \ln(n+1),$$

C – константа.

В заключение приводим

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Обозначим через c – направляющий вектор конуса K . Положим

$$t_0 = \frac{R}{\|c\|4n^2}, \quad b = a + t_0 c.$$

Две гиперплоскости, проходящие через точки g и b , и перпендикулярные вектору c (расстояние h между ними, очевидно, не превосходит $R/(2n^2)$), делят тело G на три части G^1, G^2, G^3 соответственно. Тела G^3 и $\text{Co}(G \setminus K)$ не пересекаются. В самом деле, если x – какая-нибудь точка из G^3 , то косинус угла между векторами c и $(x-a)$ не меньше, чем

$$\frac{\|ab\|}{\|ax\|} \geq \frac{R}{4n^2} \cdot \frac{1}{2R} = \frac{1}{8n^2}$$

и, следовательно, $x \in K$. Но из выпуклости множества $G^1 \cup G^2$ следует, что $\text{Co}(G \setminus K) \subset G^1 \cup G^2$, а, значит, $G^3 \cap \text{Co}(G \setminus K) = \emptyset$.

Так как часть G^1 отсекается от G гиперплоскостью, проходящей через центр тяжести тела G , то $\text{Vol}(G^1) \leq \text{Vol}(G)(1 - 1/e)$ (см. [5]). $\text{Vol}(G^2)$ запишем в виде интеграла $\int_0^h S(t) dt$, где $S(t)$ — $(n-1)$ -мерный объем сечения тела G гиперплоскостью, проходящей через точку $g + t(c/\|c\|)$ перпендикулярно вектору c .

По теореме о среднем $\exists t_1 \in [0, h]$ $\int_0^h S(t) dt = hS(t_1)$. Так как объем сечения не превосходит отношения величины $n \text{Vol}(G)$ к проекции G на нормаль к плоскости сечения, а эта проекция, в свою очередь, не меньше $2r$, то

$$S(t_1)h \leq \frac{n \text{Vol}(G)}{2r} h \leq \frac{n \text{Vol}(G)}{2r} \cdot \frac{R}{2n^2} = \text{Vol}(G) \frac{R}{4nr} \leq \frac{1}{4} \text{Vol}(G).$$

В итоге получаем,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Co}(G \setminus K)) &\leq \text{Vol}(G^1) + \text{Vol}(G^2) \leq \text{Vol}(G) \left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{4} \text{Vol}(G) \\ &\leq \frac{11}{12} \text{Vol}(G), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Лемма 2 доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18.04.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Немировский А. С., Юдин Д. Б. Информативная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач // Экономика и матем. методы. 1976. Т. 12. № 2. С. 357–369.
- [2] Левин А. Ю. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 6. С. 1241–1243.
- [3] Юдин Д. Б., Горяшко Д. М., Немировский А. С. Математические методы оптимизации устройств и алгоритмов на АСУ. М.: Радио и связь, 1982.
- [4] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
- [5] Митягин Б. С. Два неравенства для объемов выпуклых тел // Матем. заметки. 1959. Т. 5. № 5. С. 20–26.