Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Е. Россовский, Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 103–113

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:55:56

КОЭРЦИТИВНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. Е. Россовский

Задача о коэрцитивности квадратичных форм, порожденных дифференциальными операторами, рассматривалась в работах М. И. Вишика [1], Л. Гординга [2], С. Агмона [3], Д. Г. Фигуэйредо [4], а также в книге Ж. Нечаса [5]. В частности, было доказано, что необходимым и достаточным условием выполнения неравенства Гординга для системы дифференциальных операторов с условиями Дирихле на границе является сильная эллиптичность этой системы.

А. Л. Скубачевским [6] были получены как необходимые, так и достаточные условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга для дифференциально-разностных операторов. В этой работе было доказано также, что для почти всех областей $Q \subset \mathbb{R}^n$ эти условия совпадают.

В настоящей работе рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения с условиями Дирихле, содержащие растяжение и сжатие аргументов. Получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга. Суть заключается в следующем: с уравнением связывается некоторое алгебраическое выражение (символ уравнения), и в качестве таковых условий выступает положительность символа. Основные результаты содержатся в теоремах 1, 2. Начнем с предварительных рассуждений.

1. Пусть S^{n-1} есть единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Поставим в соответствие каждой функции $g \in C(S^{n-1})$ функцию $G \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$G(x) = g\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \quad (1)$$

Умножение на $G(x)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ представляет собой ограниченный оператор, который мы также будем обозначать через G . Итак,

$$Gu(x) = G(x)u(x) = g\left(\frac{x}{|x|}\right)u(x).$$

Отображение $g \rightarrow G$ есть, очевидно, гомоморфизм алгебры $C(S^{n-1})$ в алгебру ограниченных операторов $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$. Покажем, что оно является изометрией. С одной стороны,

$$\begin{aligned} \|Gu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |G(x)|^2 |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|G\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{C(S^{n-1})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|G\| \leq \|g\|_{C(S^{n-1})}. \quad (2)$$

С другой стороны, пусть $|g(\xi_0)| = \|g\|_{C(S^{n-1})}$ и пусть

$$u_\varepsilon(x) = 1 \quad (|x - \xi_0| < \varepsilon), \quad u_\varepsilon(x) = 0 \quad (|x - \xi_0| > \varepsilon).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\|Gu_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}} &= \left(\frac{\int_{|x-\xi_0|<\varepsilon} |G(x)|^2 dx}{\int_{|x-\xi_0|<\varepsilon} dx} \right)^{1/2} = |G(\tilde{x})| \quad (|\tilde{x} - \xi_0| < \varepsilon), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\|Gu_\varepsilon\|}{\|u_\varepsilon\|} \right) &= |G(\xi_0)| = |g(\xi_0)|. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $\|G\| = \|g\|_{C(S^{n-1})}$.

Таким образом, $C(S^{n-1})$ изометрически изоморфна замкнутой подалгебре A_G алгебры $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$, состоящей из операторов умножения на функции $G(x)$ вида (1). Отсюда заключаем, что, во-первых, каждый комплексный гомоморфизм h алгебры A_G имеет вид

$$h(G) = g(\xi_h) \quad (\xi_h \in S^{n-1}).$$

Во-вторых, так как полиномы $P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ плотны в $C(S^{n-1})$ (по теореме Стоуна–Вейерштрасса, [7, с. 137]), то в алгебре A_G плотны полиномы $P(G_1, \dots, G_n)$, G_i – оператор умножения на функцию $G_i(x) = x_i/|x|$.

2. Введем оператор $R_0: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ линейного преобразования аргумента по формуле

$$R_0 u(x) = u(q^{-1}x) \quad (q > 1).$$

Нетрудно видеть, что

$$R_0^* u(x) = q^n u(qx) = q^n R_0^{-1} u(x).$$

Оператор $q^{-n/2} R_0$ унитарен, поэтому

$$\sigma(R_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = q^{n/2}\} = q^{n/2} T^1.$$

Покажем, что $\sigma(R_0) = q^{n/2}T^1$, т.е. оператор $R_0 - \lambda I$ необратим, если $|\lambda| = q^{n/2}$. Достаточно построить последовательность $\|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow \infty$ такую, что последовательность $(R_0 - \lambda I)u_k$ ограничена.

Пусть

$$u_k(x) = \begin{cases} \lambda^{j-1} & (q^{-j} < |x| < q^{-j+1}; \quad j = 1, \dots, k), \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \sum_{j=1}^k \int_{q^{-j} < |x| < q^{-j+1}} |\lambda|^{2(j-1)} dx \\ &= \sum_{j=1}^k q^{n(j-1)} \text{mes}(q^{-j} < |x| < q^{-j+1}) \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\frac{q^n - 1}{q^n} \right) \text{mes}(|x| < 1) \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Кроме того, очевидно,

$$(R_0 - \lambda I)u_k(x) = \begin{cases} -\lambda^{k-1} & (q^{-k} < |x| < q^{-k+1}), \\ 1 & (1 < |x| < q), \\ 0 & \text{для остальных.} \end{cases}$$

$$\|(R_0 - \lambda I)u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \text{mes}(|x| < 1) \frac{q^{2n} - 1}{q^n}.$$

Итак, $\sigma(R_0) = q^{n/2}T^1$. Далее, операторы R_0^* и R_0 коммутируют между собой и операторами из A_G . Следовательно, замыкание (по операторной норме) множества полиномов $P(R_0, R_0^*, G_i)$ есть коммутативная B^* -алгебра (как подалгебра B^* -алгебры $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$). Обозначим ее $A_{R,G}$. A_G , очевидно, является замкнутой подалгеброй в $A_{R,G}$.

По теореме Гельфанда–Наймарка [7, с. 311] преобразование Гельфанда $P \rightarrow \hat{P}$ осуществляет изометрический изоморфизм алгебры $A_{R,G}$ на алгебру $C(\Delta_{R,G})$, где $\Delta_{R,G}$ – пространство максимальных идеалов алгебры $A_{R,G}$. Пространство $\Delta_{R,G}$ снабжается топологией Гельфанда, которая оказывается хаусдорфовой и компактной [7, с. 300].

3. Покажем, что $\Delta_{R,G}$ есть, с точностью до гомеоморфизма, некоторый компакт $K \subset q^{n/2}T^1 \times S^{n-1}$. Для этого рассмотрим отображение $\varphi: \Delta_{R,G} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, заданное формулой

$$\varphi(h) = (\hat{R}_0(h), \hat{G}_1(h), \dots, \hat{G}_n(h)).$$

По определению преобразования Гельфанда оно непрерывно, а множество значений первой координаты есть $\sigma(R_0) = q^{n/2}T^1$. Если h – гомоморфизм $A_{R,G}$, то h есть гомоморфизм A_G и, поэтому

$$h(G) = g(\xi_h) \quad (\xi_h \in S^{n-1}).$$

Но тогда

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_1(h), \dots, \widehat{G}_n(h)) &= (h(G_1), \dots, h(G_n)) \\ &= ((\xi_h)_1, \dots, (\xi_h)_n) = \xi_h. \end{aligned}$$

Таким образом, множество значений вектор-функции $\varphi(h)$ есть компакт $K \subset q^{n/2}T^1 \times S^{n-1}$.

Далее, пусть $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$, т.е. $h_1(R_0) = h_2(R_0)$ и $h_1(G_i) = h_2(G_i)$ ($i = 1, \dots, n$). Так как преобразование Гельфанда сохраняет инволюцию, то $h_1(R_0^*) = h_2(R_0^*)$. Отсюда следует, что гомоморфизмы совпадают на полиномах $P(R_0, R_0^*, G_i)$, а в силу плотности полиномов $h_1 = h_2$. Итак, отображение φ взаимно однозначно, а, как известно, непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства в хаусдорфово есть гомеоморфизм.

В конце концов имеем изометрический изоморфизм

$$\begin{aligned} \psi: A_{R,G} &\rightarrow C(K), \quad \psi(P) = \widehat{P} \circ \varphi^{-1} \quad (P \in A_{R,G}), \\ \psi(R_0)(\lambda, \xi) &= \widehat{R}_0(\varphi^{-1}(\lambda, \xi)) = \lambda, \\ \psi(G_i)(\lambda, \xi) &= \widehat{G}_i(\varphi^{-1}(\lambda, \xi)) = \xi_i \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Так как ψ – гомоморфизм, то

$$\psi\left(\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} \sum_l a_{\alpha\beta l} R_0^l G_1^{\alpha_1+\beta_1} \dots G_n^{\alpha_n+\beta_n}\right) = \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} \sum_l a_{\alpha\beta l} \lambda^l \xi^{\alpha+\beta}$$

((λ, ξ) $\in K$, $a_{\alpha\beta l} \in \mathbb{C}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $l \in \mathbb{Z}$ – пробегает конечное число значений).

Далее в работе будем обозначать

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \sum_l a_{\alpha\beta l} R_0^l, \quad r_{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_l a_{\alpha\beta l} \lambda^l, \\ G^{\alpha+\beta} &= G_1^{\alpha_1+\beta_1} \dots G_n^{\alpha_n+\beta_n}. \end{aligned}$$

В ходе доказательства основного результата мы будем опираться на следующий факт, вытекающий из построенного изоморфизма: если

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} r_{\alpha\beta}(\lambda) \xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad ((\lambda, \xi) \in q^{n/2}T^1 \times S^{n-1}),$$

то оператор

$$P = \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^*) G^{\alpha+\beta}$$

положительно определен, т.е.

$$\operatorname{Re}(Pu, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq c \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

$u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $c > 0$ – не зависит от u . (Спектр оператора один и тот же во всех $*$ -алгебрах, его содержащих.)

4. В этом пункте мы переходим к исследованию функционально-дифференциального уравнения и доказываем достаточные условия выполнения неравенства Гординга.

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}_R u(x) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \mathcal{D}^\alpha R_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta u(x) = f(x) \quad (x \in Q) \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$\mathcal{D}_\nu^\mu u|_{\partial Q} = 0 \quad (\mu = 0, \dots, m-1),$$

где $f \in L^2(Q)$, $u \in W^m(\mathbb{R}^n)$, $u(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$), $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей; $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_j = 1/i \cdot \partial/\partial x_j$, $\mathcal{D}_\nu = 1/i \cdot \partial/\partial \nu$ – нормальная производная к границе.

$W^m(\mathbb{R}^n)$ – пространство Соболева со скалярным произведением

$$(u, v)_{W^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^\alpha u \overline{\mathcal{D}^\alpha v} dx.$$

Подпространство функций, обращающихся в нуль вне Q , отождествляется с $\mathring{W}^m(Q)$. В $\mathring{W}^m(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение

$$(u, v)_{\mathring{W}^m(Q)} = \sum_{|\alpha|=m} \int_Q \mathcal{D}^\alpha u \overline{\mathcal{D}^\alpha v} dx.$$

Следующее неравенство для оператора $\mathcal{L}_R$ называется неравенством Гординга:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathcal{L}_R u, u)_{L^2(Q)} &\geq c_1 \|u\|_{\mathring{W}^m(Q)}^2 - c_2 \|u\|_{L^2(Q)}^2, \\ u &\in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp} u \subset Q, \quad c_1, c_2 > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

не зависят от u .

Символом уравнения (4) будем называть выражение

$$\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} r_{\alpha\beta}(\lambda) \xi^{\alpha+\beta} \quad (\lambda \in q^{n/2} T^1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Возникает вопрос: как связано неравенство (5) с положительностью символа? Покажем сейчас, что из условия положительности следует неравенство (5) для оператора (4).

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} r_{\alpha\beta}(\lambda) \xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad (\lambda \in q^{n/2}T^1, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Тогда имеет место неравенство (5) для уравнения (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что дифференциальный оператор в (4) однородный порядка $2m$. Интегрирование по частям с учетом $\operatorname{supp} u \subset Q$ дает

$$\operatorname{Re}(\mathcal{L}_R u, u)_{L^2(Q)} = \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} ((R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^*) \mathcal{D}^\beta u, \mathcal{D}^\alpha u)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Отметим, что $(\widetilde{R_0 u})(\xi) = R_0^* \tilde{u}(\xi)$ (проверяется непосредственно). По теореме Планшереля

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} ((R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^*) \mathcal{D}^\beta u, \mathcal{D}^\alpha u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} ((R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^*) \xi^\beta \tilde{u}, \xi^\alpha \tilde{u})_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} \left((R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^*) \frac{\xi^\beta}{|\xi|^m} |\xi|^m \tilde{u}, \frac{\xi^\alpha}{|\xi|^m} |\xi|^m \tilde{u} \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} \left((R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^*) \frac{\xi^{\alpha+\beta}}{|\xi|^{2m}} |\xi|^m \tilde{u}, |\xi|^m \tilde{u} \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} ((R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^*) G^{\alpha+\beta} |\xi|^m \tilde{u}, |\xi|^m \tilde{u})_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

По условию теоремы

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} r_{\alpha\beta}(\lambda) \xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad ((\lambda, \xi) \in K \subset q^{n/2}T^1 \times S^{n-1}).$$

Остается воспользоваться результатом пункта 3.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (R_{\alpha\beta} G^{\alpha+\beta} |\xi|^m \tilde{u}, |\xi|^m \tilde{u})_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \geq c \| |\xi|^m \tilde{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = c \| u \|_{W^m(Q)}^2. \end{aligned}$$

Оценка младших членов стандартным способом приводит к неравенству (5). Теорема доказана.

5. В этом пункте мы покажем, что для определенного класса областей положительность символа является также и необходимым условием выполнения оценки (5). А именно, дополнительно предположим, что

$$\overline{Q} \subset qQ. \quad (6)$$

Нам понадобится матричное представление операторов $R_{\alpha\beta}$. Введем ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такую, что

$$\begin{aligned} \Omega &= \bigcup_{k=1}^N \Omega_k, \quad \Omega_{k_1} \cap \Omega_{k_2} = \emptyset \quad (k_1 \neq k_2), \\ \Omega_k &= q^{-(k-1)}\Omega_1 \quad (k = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $u \in L^2(\Omega)$. Тогда соответствие

$$(Uu)_k(x) = q^{-n(k-1)/2}u(q^{1-k}x) \quad (x \in \Omega_1, \quad k = 1, \dots, N) \quad (8)$$

есть унитарный оператор $U: L^2(\Omega) \rightarrow L^{2,N}(\Omega_1)$.

Действительно, используя замену переменных, получим:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} |u(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^N q^{-n(k-1)} \int_{\Omega_1} |u(q^{1-k}x)|^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^N \|(Uu)_k\|_{L^2(\Omega_1)}^2 = \|Uu\|_{L^{2,N}(\Omega_1)}^2. \end{aligned}$$

Пусть

$$R = \sum_{|l| \leq J} a_l R_0^l: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Определим также $R: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, считая функции из $L^2(\Omega)$ продолженными нулем в $\mathbb{R}^n$.

Введем теплицевы матрицы $\hat{R}$ порядка $N \times N$ с элементами

$$\rho_{jk} = \begin{cases} q^{n(k-j)/2} a_{k-j} & (|k-j| \leq J), \\ 0 & (|k-j| > J). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (URu)_k(x) &= q^{-n(k-1)/2}(Ru)(q^{1-k}x) \\ &= \sum_{|l| \leq J} q^{-n(k-1)/2} a_l u(q^{1-(k+l)}x) \\ &= \sum_{|j-k| \leq J} q^{-n(j-1)/2} q^{n(j-k)/2} a_{j-k} u(q^{1-j}x) \\ &= \sum_{j=1}^N \rho_{kj} (Uu)_j (\hat{R}Uu)_k(x) \quad (x \in \Omega_1). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что оператор $R: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ унитарно эквивалентен оператору умножения на матрицу $\widehat{R}$ в пространстве $L^{2,N}(\Omega_1)$:

$$R = U^{-1} \widehat{R} U. \quad (9)$$

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть матрицы $\widehat{R} + \widehat{R}^*$ положительно определены равномерно по $N = 1, 2, \dots$. Тогда оператор

$$R + R^*: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

положительно определен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем N и область Ω , удовлетворяющую (7) и зависящую от N . Пусть функция $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и равна нулю вне Ω . Тогда, используя (9), будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Ru, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \operatorname{Re}(URu, Uu)_{L^{2,N}(\Omega_1)} = \operatorname{Re}(\widehat{R}Uu, Uu)_{L^{2,N}(\Omega_1)} \\ &\geq c \|Uu\|_{L^{2,N}(\Omega_1)}^2 = c \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

где $c > 0$ не зависит от N , Ω , u .

Но для всевозможных N , Ω функция u пробегает плотное в $L^2(\mathbb{R}^n)$ подмножество. Поэтому неравенство

$$\operatorname{Re}(Ru, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq c \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

выполняется для любых $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Лемма доказана.

Отметим, что положительная определенность оператора

$$R + R^*: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

означает положительность выражения

$$\operatorname{Re} \sum_{|l| \leq J} a_l \lambda^l = \operatorname{Re} r(\lambda) \quad (\lambda \in q^{n/2} T^1).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть область Q удовлетворяет условию (6) и имеет место оценка (5) для уравнения (4). Тогда

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} r_{\alpha\beta}(\lambda) \xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad (\lambda \in q^{n/2} T^1, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя в (5) по частям и оценивая младшие члены оператора $\mathcal{L}_R$, будем иметь:

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (R_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta u, \mathcal{D}^\alpha u)_{L^2(Q)} \geq c_3 \|u\|_{W^m(Q)}^2 - c_4 \|u\|_{L^2(Q)}^2. \quad (10)$$

Обозначим

$$\Omega_1 = Q \setminus q^{-1}\overline{Q}, \quad \Omega_k = q^{-(k-1)}\Omega_1 \quad (k = 2, \dots, N), \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k.$$

Так как область Q удовлетворяет (6), то область Ω удовлетворяет условиям (7). Возьмем $u \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u \in \Omega$, и положим

$$H_k(x) = q^{m(k-1)}(Uu)_k(x) \quad (x \in \Omega_1; \quad k = 1, \dots, N). \quad (11)$$

Для $|s| = m$ справедливо следующее:

$$\begin{aligned} (U\mathcal{D}^s u)_k(x) &= q^{-n(k-1)/2} \mathcal{D}^s u(y)|_{y=q^{1-k}x} \\ &= q^{m(k-1)} q^{-n(k-1)/2} \mathcal{D}^s (u(q^{1-k}x)) \\ &= q^{m(k-1)} \mathcal{D}^s (Uu)_k(x) = \mathcal{D}^s H_k(x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$U\mathcal{D}^s u = \mathcal{D}^s H. \quad (12)$$

Используя (9), (11), (12), получим

$$\begin{aligned} (R_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta u, \mathcal{D}^\alpha u)_{L^2(Q)} &= (R_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta u, \mathcal{D}^\alpha u)_{L^2(\Omega)} \\ &= (UR_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta u, U\mathcal{D}^\alpha u)_{L^2, N(\Omega_1)} = (\hat{R}_{\alpha\beta} U\mathcal{D}^\beta u, U\mathcal{D}^\alpha u)_{L^2, N(\Omega_1)} \\ &= (\hat{R}_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta H, \mathcal{D}^\alpha H)_{L^2, N(\Omega_1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^m(Q)}^2 &= \sum_{|s|=m} \|\mathcal{D}^s u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{|s|=m} \sum_{k=1}^N \|(U\mathcal{D}^s u)_k\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\ &= \sum_{|s|=m} \sum_{k=1}^N \|\mathcal{D}^s H_k\|_{L^2(\Omega_1)}^2 = \sum_{|s|=m} \|\mathcal{D}^s H\|_{L^2, N(\Omega_1)}^2 \\ &= \|H\|_{W^{m, N}(\Omega_1)}^2, \end{aligned}$$

$$\|u\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_{k=1}^N \|(Uu)_k\|_{L^2(\Omega_1)}^2 = \sum_{k=1}^N q^{-2m(k-1)} \|H_k\|_{L^2(\Omega_1)}^2.$$

Неравенство (10) в таком случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (\hat{R}_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta H, \mathcal{D}^\alpha H)_{L^{2,N}(\Omega_1)} \\ \geq c_3 \|H\|_{W^{m,N}(\Omega_1)}^2 - c_4 \|H\|_{L^{2,N}(\Omega_1)}^2, \end{aligned} \quad (13)$$

c_3, c_4 не зависят от H, N , а $H \in \dot{C}^{\infty,N}(\Omega_1)$ – произвольная вектор-функция. Пусть $x^0 \in \Omega_1$, $B_\delta(x^0)$ – шар с центром в точке x^0 и радиусом δ . Если δ достаточно мало, то неравенство (13) выполняется для всех $H \in \dot{C}^{\infty,N}(B_\delta(x^0))$. Выведем аналогичное неравенство для функции $F \in \dot{C}^{\infty,N}(B_\gamma(0))$, где $t = \gamma/\delta > 1$. Сделаем замену переменных $y = t(x - x^0)$, и обозначим $F(y) = H(x(y))$. Неравенство (13) перейдет в

$$\begin{aligned} t^{2m-n} \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (\hat{R}_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta F, \mathcal{D}^\alpha F)_{L^{2,N}(B_\gamma(0))} \\ \geq c_3 t^{2m-n} \|F\|_{W^{m,N}(B_\gamma(0))}^2 - c_4 t^{-n} \|F\|_{L^{2,N}(B_\gamma(0))}^2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (\hat{R}_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta F, \mathcal{D}^\alpha F)_{L^{2,N}(B_\gamma(0))} \\ \geq c_3 \|F\|_{W^{m,N}(B_\gamma(0))}^2 - c_4 \|F\|_{L^{2,N}(B_\gamma(0))}^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Константы c_3, c_4 не зависят от N, γ, F . Положим теперь $F = vY$, где $v \in \dot{C}^\infty(B_\gamma(0))$, а $Y \in \mathbb{C}^N$. С помощью преобразования Фурье из (14) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (\hat{R}_{\alpha\beta} + \hat{R}_{\alpha\beta}^*) \xi^{\alpha+\beta} Y, Y \right) |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi \\ \geq c_3 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m} |Y|^2 |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi - c_4 \int_{\mathbb{R}^n} |Y|^2 |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$. Поскольку множество $\dot{C}^\infty(B_\gamma(0))$ для всевозможных γ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$, из (15) следует

$$\left(\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (\hat{R}_{\alpha\beta} + \hat{R}_{\alpha\beta}^*) \xi^{\alpha+\beta} Y, Y \right) \geq 2c_3 |\xi|^{2m} |Y|^2 - 2c_4 |Y|^2.$$

Если $|\xi|^{2m} > 2c_4/c_3$, то

$$\left(\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (\hat{R}_{\alpha\beta} + \hat{R}_{\alpha\beta}^*) \xi^{\alpha+\beta} Y, Y \right) \geq c_3 |\xi|^{2m} |Y|^2.$$

Но последнее неравенство однородно по ξ . Следовательно, оно выполняется для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$. Итак, матрицы $\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (\hat{R}_{\alpha\beta} + \hat{R}_{\alpha\beta}^*) \xi^{\alpha+\beta}$ равномерно по N положительно определены. Из леммы 1 следует, что оператор $\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^*) \xi^{\alpha+\beta}$ положительно определен, и

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} r_{\alpha\beta}(\lambda) \xi^{\alpha+\beta} > 0.$$

Теорема доказана.

Автор благодарен А. Л. Скубачевскому за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

Московский авиационный институт

Поступило

28.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1951. Т. 29. № 3. С. 615–676.
- [2] Gårding L. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations // Math. Scand. 1953. V. 1. № 1. P. 55–72.
- [3] Agmon S. The coerciveness problem for integro-differential forms // J. Analyse Math. 1958. V. 6. № 1. P. 183–223.
- [4] Figueiredo D. G. The coerciveness problem for forms over vector-valued functions // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 16. № 1. P. 63–94.
- [5] Necas J. Sur les normes équivalentes dans $W_p^{(k)}(\Omega)$ et sur la coercivité des formes formellement positives // Sémin. de Math. Super. Montréal, 1965.
- [6] Skubachevskii A. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // J. Diff. Equat. 1986. V. 63. № 3. P. 332–361.
- [7] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.