Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Субботин, Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n -й производной при больших интервалах усреднения, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 114–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 08:11:39

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В СРЕДНЕМ С НАИМЕНЬШИМ ЗНАЧЕНИЕМ n -Й ПРОИЗВОДНОЙ ПРИ БОЛЬШИХ ИНТЕРВАЛАХ УСРЕДНЕНИЯ

Ю. Н. Субботин

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел и бесконечная в обе стороны последовательность $Y = \{y_k, k \in \mathbb{Z}\}$ удовлетворяет условию

$$\|\Delta^n y_k\|_{l_p} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Delta^n y_k|^p \right)^{1/p} \leq 1 \quad (1 \leq p \leq \infty), \quad (1)$$

где $\Delta^n y_k = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} C_n^s y_{k+s}$. Пусть $0 \leq h < \infty$. Обозначим через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(Y, n, p, h)$ множество локально интегрируемых по Лебегу функций $y(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} y(k+t) dt = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2)$$

Требуется найти такое наименьшее число $A = A(n, p, h)$, что для любой последовательности Y , удовлетворяющей (1), существует управление $u(t)$, $\|u\|_{L_p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq A$, при котором уравнение

$$y^{(n)}(t) = u(t) \quad (t \in (-\infty, \infty))$$

имеет решение $y(t)$, принадлежащее классу $\mathfrak{M}$, т.е. удовлетворяющее условиям (2).

При $0 \leq h \leq 1$ указанная задача решена в работах автора [1], [2]. Правда, там она сформулирована в несколько иных эквивалентных терминах. В работах А. Шармы, Н. Цимбаларио [3] при $h = 0$ эти результаты были перенесены на линейный дифференциальный оператор порядка n с постоянными коэффициентами, характеристический многочлен которого имеет

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-196.

лишь вещественные корни. В.Т. Шевалдин [4], [5] обобщил упомянутый результат автора на произвольные линейные дифференциальные операторы порядка n с постоянными коэффициентами. При $h > 1$ решение указанных задач не было известно.

В настоящей работе доказываются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. При $1 < h < 2$, $p = \infty$ величина

$$A = A(n, p, h) = h \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n+2} \left| \varphi_{n+1} \left[\frac{h}{2} - \frac{1}{4}(1 + (-1)^n) \right] \right|^{-1},$$

где $\varphi_n(t)$ – функция Фавара,

$$\varphi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{-n-1} \sin \left[(2m+1)\pi t - \frac{n\pi}{2} \right].$$

ТЕОРЕМА 2. При $h = 2m$, $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$A(n, p, 2m) = \infty \quad (1 < p \leq \infty).$$

О поведении величины $A(n, p, h)$ при $2m < h < 2m+2$, m – натуральное, ничего неизвестно, неясно даже является ли эта величина конечной.

В дальнейшем сначала доказывается теорема 2 и устанавливается общая оценка снизу для A в теореме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 проведем сначала при $n = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= \int_0^1 \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} y'(k+t+x) dx dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u(k+t+x) dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(h, t) u(t) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\varphi_k(h, t) = \begin{cases} 0, & t \leq k - h/2, \quad t \geq k + 1 + h/2, \\ \frac{1}{h}(t + h/2 - k), & k - h/2 \leq t \leq k - h/2 + 1, \\ \frac{1}{h}, & k - h/2 + 1 \leq t \leq k + h/2, \\ \frac{1}{h}(k + 1 + h/2 - t), & k + h/2 \leq t \leq k + h/2 + 1. \end{cases}$$

Полагая в (3) $h = 2m$, получаем

$$\sum_{k=0}^{N-1} (\Delta y_{2km} - \Delta y_{2km+1}) = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k,m}(t) u(t) dt, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}\psi_{k,m}(t) &= B_1(t-1+m) & (-m \leq t \leq -m+2), \\ \psi_{k,m}(t) &= B_1(t-2Nm+m-1) & (2Nm-m \leq t \leq 2Nm-m+2), \\ \psi_{k,m}(t) &\equiv 0 & \text{при других значениях } t\end{aligned}$$

и $B_1(t) = 1 - |t|$ ($-1 \leq t \leq 1$) — B -сплайн первой степени. Пусть $\Delta y_{2km} = (1/2N)^{1/p}$, $\Delta y_{2km+1} = -(1/2N)^{1/p}$ ($0 \leq k \leq N-1$), тогда, применяя неравенство Гёльдера, из (4) получаем

$$(2N)^{1/q} \leq \frac{1}{2m} \|u\|_{L_p} \|\psi_{k,m}\|_{L_q} = \frac{1}{2m} 4^{1/q} (q+1)^{-1/q} \|u\|_{L_p}.$$

В пределе при $N \rightarrow \infty$ устанавливаем справедливость теоремы 2 при $n = 1$.

Пусть $n \geq 2$, тогда при $h = 2m$ имеем

$$\Delta^n y_k = \Delta \Delta^{n-1} y_k = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \Delta^{n-1} y'(t) dt.$$

Далее, аналогично предыдущему, получаем

$$\|\Delta^{n-1} y'(t)\|_{L_p} \geq (2N)^{1/q} 2m 4^{-1/q} (q+1)^{1/q} \quad (1/p + 1/q = 1).$$

Используя представление (см. [6]),

$$\Delta^{n-1} y'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{n-2}(x) y^{(n)}(t+x) dx,$$

где $B_{n-2}(x)$ — B -сплайн с равномерными узлами, расстояние между которыми равно единице, и применяя обобщенное неравенство Минковского, выводим

$$\|\Delta^{n-1} y'(t)\|_{L_p} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |B_{n-2}(x)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x+t)|^p dt \right)^{1/p} dx = \|u\|_{L_p}.$$

Отсюда и из предшествующего неравенства устанавливаем справедливость теоремы 2 для любого натурального n .

Установим оценку снизу в теореме 1. Воспользуемся следующим равенством (см. [2, с. 137])

$$\begin{aligned}(n-1)! \Delta^n y_m &= \sum_{s=0}^{n+1} \sum_{k=0}^n \int_0^1 u(m-1+s+t) \\ &\quad \times \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (-1)^{n-k} C_n^k (k+1+v-t-s)_+^{n-1} dv dt. \quad (5)\end{aligned}$$

Положим в (5)

$$\Delta^n y_m = \Delta^n y_m^* = \begin{cases} 0, & m < 0, \\ (-1)^m N^{-1/p}, & 0 \leq m \leq N-1, \\ 0, & m \geq N, \end{cases}$$

умножим (5) на $(-1)^m$ и просуммируем по m от 0 до $N-1$, в итоге получим

$$(n-1)! = N^{-1/q} \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \sum_{s=0}^{n-1} \int_0^1 u(m-1+s+t) \times \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k (k+1+v-t-s)_+^{n-1} dv dt. \quad (6)$$

Положим

$$a_s(t) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k (k+1+v-s-t)_+^{n-1} dv, \quad (7)$$

$$S_n(t) = S_n(t, h) = \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s a_s(t), \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (8)$$

$$S_n(t+l) = (-1)^l S_n(t)$$

$$b_1(l-1+t) = \sum_{s=0}^l (-1)^{l-s} a_s(t), \quad (0 \leq t \leq 1).$$

$$b_2(N+l-1+t) = \sum_{s=l}^{n+1} (-1)^{l+s} a_s(t)$$

Преобразуем и, применяя неравенство Гёльдера, оценим (6). Введем новые индексы суммирования $s = s$ и $l = m + s$. Тогда, учитывая, что функции $b_1(\cdot)$ и $b_2(\cdot)$ при $0 \leq t \leq 1$ допускают оценки, не зависящие от N , получим

$$\begin{aligned} (n-1)! &= N^{-1/q} \left\{ \int_n^{N-1} S_n(t) u(t) dt + \int_{-1}^n b_1(t) u(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{N-1}^{N+n} b_2(t) u(t) dt \right\} \\ &\leq N^{-1/q} \|u\|_{L_p} \{ (N-n)^{1/q} \|S_n\|_{L_q[0,1]} + O(1) \}. \end{aligned}$$

В пределе при $N \rightarrow \infty$ и $p > 1$ получаем

$$\|u\|_{L_p} \geq (n-1)! \|S_n\|_{L_q[0,1]}^{-1}. \quad (9)$$

Таким образом, при $p > 1$

$$A(n, p, h) \geq (n-1)! \|S_n(t, h)\|_{L_q[0,1]}^{-1}.$$

В частности, эта оценка верна при $p = \infty$.

Оценки сверху. При $p = \infty$ и $n = 2r + 1$, будем искать требуемое решение в виде

$$u(m-1+t) = z_m \quad (0 < t \leq 1, m \in \mathbb{Z}). \quad (10)$$

Тогда для нахождения z_m , учитывая (5), получаем систему разностных уравнений

$$(2r)! \Delta^{2r+1} y_m = \sum_{s=0}^{2r+2} b_s z_{m+s} \quad (m \in \mathbb{Z}), \quad (11)$$

где

$$b_s = - \int_0^1 \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_{2r+1}^k (k+1+v-t-s)_+^{2r} dv dt.$$

Нам потребуется следующий результат (см. [2, теорема С]).

ТЕОРЕМА А. Пусть полином $P_{2r+2}(x) = \sum_{l=0}^{2r+2} \gamma_l x^l$ удовлетворяет условию

$$P_{2r+2}(x) = x^{2r+2} P_{2r+2}(1/x) \quad (12)$$

и все его нули отрицательны и различны, тогда для любой последовательности $\{c_m\} \in l_p$ существует единственное решение разностного уравнения

$$\sum_{l=0}^{2r+2} \gamma_l z_{m+l} = c_m \quad (m \in \mathbb{Z}),$$

принадлежащее l_p , и для него справедливо представление

$$z_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{r+1} \frac{x_s^{r+|k|}}{P'_{2r+2}(x_s)} c_{m-r-1+k} \quad (m \in \mathbb{Z}),$$

где $x_s \in (-1, 0)$ ($s = 1, \dots, r+1$), и оценка

$$\sup_{\|c_m\|_{l_p}=1} \|z_m\|_{l_p} = |P_{2r+2}(-1)|^{-1}.$$

Установим свойство (12) для характеристического многочлена $P_{2r+2}(x) = \sum_{s=0}^{2r+2} b_s x^s$ разностного уравнения (10). Оно эквивалентно равенствам

$b_s = b_{2r+2-s}$ ($s = 0, 1, \dots, r$). Заменяв k на $2r + 1 - k$ и v на $-v$, t на $-t$, имеем

$$\begin{aligned} b_{2r+2-s} &= - \int_0^1 \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_{2r+1}^k \\ &\quad \times (k + 1 + v - t - 2r - 2 + s)_+^{2r} dv dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_{2r+1}^k (-k + v - t + s)_+^{2r} dv dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_{2r+1}^k (-k - 1 - v + t + s)_+^{2r} dv dt. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $(x)_+^{2r} + (-x)_+^{2r} = x^{2r}$ и, что разность порядка $2r + 1$ от полинома меньшей степени равна нулю, получаем $b_{2r+2-s} = b_s$ ($s = 0, 1, \dots, r$).

Далее нам потребуются некоторые свойства многочленов

$$P_n(t, x) = \sum_{l=0}^n x^l \sum_{k=0}^l (-1)^k C_{n+1}^k (l + t - k)^n. \quad (13)$$

Очевидно, что (см. также [2, с. 146])

$$P_n(t, x) = (1 - x)^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty} (l + t)^n x^l. \quad (14)$$

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие свойства:*

- 1) $\frac{\partial P_n(t, x)}{\partial t} = n(1 - x)P_{n-1}(t, x)$,
- 2) при $0 < t < 1$ многочлен $P_n(t, x)$ имеет n различных отрицательных нулей,
- 3) с ростом t ($0 \leq t \leq 1$) нули многочленов $P_n(t, x)$ строго убывают,
- 4) многочлен $P_n(1, x)$ имеет степень $n - 1$ и

$$P_n(0, x) = xP_n(1, x),$$

- 5) многочлен $P_n(1, x)$ имеет $n - 1$ различных отрицательных нулей.

Свойство 1) тривиально следует из (14). Свойства 2)–5) доказаны в [2]: свойство 2) доказано в лемме 2.3, свойство 3) в лемме 2.4, свойства 4)–5) доказаны в [2, с. 150–151], см. также замечание 2.2.

Преобразуем характеристический многочлен разностного уравнения (11). Вычислив интегралы, получим

$$\begin{aligned}
 & (2r+1)(2r+2)hP_{2r+2}(x) \\
 &= \sum_{s=0}^{2r+2} x^s \sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_{2r+1}^k \left[\left(k + \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} - \left(k - \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} \right. \\
 &\quad \left. - \left(k + \frac{h}{2} - s + 1 \right)_+^{2r+2} + \left(k - \frac{h}{2} - s + 1 \right)_+^{2r+2} \right] \\
 &= \sum_{s=0}^{2r+2} x^s \left\{ \sum_{k=0}^{2r+2} (-1)^k C_{2r+1}^k \left[\left(k + \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} - \left(k - \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^{2r+2} (-1)^k C_{2r+1}^{k-1} \left[\left(k + \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} - \left(k - \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} \right] \right\} \\
 &= \sum_{s=0}^{2r+2} x^s \sum_{k=0}^{2r+2} (-1)^k C_{2r+2}^k \left[\left(k + \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} - \left(k - \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} \right].
 \end{aligned}$$

Умножив левую и правую часть последнего равенства на $(1-x)$, в итоге получим

$$\begin{aligned}
 & (1-x)(2r+1)(2r+2)hP_{2r+2}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^{2r+2} (-1)^k C_{2r+2}^k \left[\left(k + \frac{h}{2} \right)_+^{2r+2} - \left(k - \frac{h}{2} \right)_+^{2r+2} \right] \\
 &\quad + \sum_{s=1}^{2r+2} x^s \sum_{k=0}^{2r+3} (-1)^k C_{2r+3}^k \left[\left(k + \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} - \left(k - \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} \right] \\
 &\quad + x^{2r+3} \sum_{k=0}^{2r+3} (-1)^k C_{2r+2}^{k-1} \left[\left(k + \frac{h}{2} - 2r - 3 \right)_+^{2r+2} \right. \\
 &\quad \left. - \left(k - \frac{h}{2} - 2r - 3 \right)_+^{2r+2} \right] \\
 &= \left(\frac{h}{2} \right)_+^{2r+2} \sum_{k=0}^{2r+2} (-1)^k C_{2r+2}^k \left[\left(k + \frac{h}{2} \right)_+^{2r+2} - \left(k - \frac{h}{2} \right)_+^{2r+2} \right] \\
 &\quad - x \sum_{s=1}^{2r+2} x^{s-1} \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{2r+3}^k \left(k + \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} \\
 &\quad + \sum_{s=1}^{2r+2} x^s \sum_{k=0}^s (-1)^k C_{2r+3}^k \left(k - \frac{h}{2} - s \right)_+^{2r+2} - x^{2r+3} \left(\frac{h}{2} \right)_+^{2r+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{2r+2} x^s \sum_{k=0}^s (-1)^k C_{2r+3}^k \left(s + \frac{h}{2} - k \right)^{2r+2} \\
&\quad - x \left[\sum_{s=0}^{2r+1} x^s \sum_{k=0}^s (-1)^k C_{2r+3}^k \left(s + 1 - k - \frac{h}{2} \right)^{2r+2} \right. \\
&\quad \left. + x^{2r+2} \left(\frac{h}{2} \right)^{2r+2} \right].
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
\left(\frac{h}{2} \right)^{2r+2} &= \left(\frac{h}{2} \right)^{2r+2} + \sum_{k=0}^{2r+3} (-1)^k C_{2r+3}^k \left(2r + 3 - k - \frac{h}{2} \right)^{2r+2} \\
&= \sum_{k=0}^{2r+2} (-1)^k C_{2r+3}^k \left(2r + 3 - k - \frac{h}{2} \right)^{2r+2},
\end{aligned}$$

тогда из предыдущего равенства и равенства (13) окончательно имеем

$$(1-x)(2r+1)(2r+2)hP_{2r+2}(x) = P_{2r+2}\left(\frac{h}{2}, x\right) - xP_{2r+2}\left(1-\frac{h}{2}, x\right). \quad (15)$$

Покажем, что при $1 \leq h < 2$ полином $P_{2r+2}(x)$ имеет $2r+2$ различных отрицательных нуля.

Из свойства 2) леммы 1 следует, что полиномы $P_{2r+2}(h/2, x)$ и $P_{2r+2}(1-h/2, x)$ имеют $2r+2$ различных отрицательных нуля, обозначим их соответственно $\{y_i\}_{i=1}^{2r+2}$ и $\{z_i\}_{i=1}^{2r+2}$:

$$\begin{aligned}
-\infty &< y_{2r+2} < y_{2r+1} < \cdots < y_1 < 0, \\
-\infty &< z_{2r+2} < z_{2r+1} < \cdots < z_1 < 0.
\end{aligned}$$

Из условия $1 < h < 2$ и свойства 3) леммы 1 имеем

$$y_i < z_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2r+2). \quad (16)$$

Пусть v_i ($i = 1, \dots, 2r+1$) – нули многочлена $P_{2r+2}(1, x)$. В силу свойства 5) он имеет степень $2r+1$ и

$$-\infty < v_{2r+1} < v_{2r} < \cdots < v_1 < 0.$$

Через u_i ($i = 1, 2, \dots, 2r+2$) обозначим нули полинома $P_{2r+2}(0, x)$, тогда в силу свойства 4) имеем

$$-\infty < u_{2r+2} = v_{2r+1} < u_{2r+1} = v_{2r} < \cdots < u_2 = v_1 < u_1 = 0. \quad (17)$$

Из свойства 3) следует, что

$$z_i < u_i \ (i = 1, 2, \dots, 2r+2), \quad y_{i-1} > v_{i-1} = u_i, \ (i = 2, 3, \dots, 2r+2). \quad (18)$$

Из (16)–(18) выводим

$$\begin{aligned} 0 > z_1 > y_1 > v_1 = u_2 > z_2 > y_2 > v_2 = u_3 > z_3 > \dots \\ > z_{2r+1} > y_{2r+1} > v_{2r+1} = u_{2r+2} > z_{2r+2} > y_{2r+2} > -\infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (15) и (14) имеем

$$\text{sign } P_{2r+2}(0) = \text{sign } P_{2r+2}(h/2, 0) = \text{sign}(h/2)^{2r+2} > 0. \quad (20)$$

Далее из (14) $P_{2r+2}(1 - h/2, 0) = (1 - h/2)^{2r+2} > 0$. Так как полином $P_{2r+2}(1 - h/2, x)$ имеет лишь простые нули, то из неравенств (19) следует, что

$$\text{sign } P_{2r+2}(1 - h/2, y_i) = (-1)^i \quad (i = 1, \dots, 2r+2). \quad (21)$$

Положим $x_0 = 0$, $x_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2r+2$), тогда из (15), (20) и (21) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \text{sign } P_{2r+2}(x_i) &= (-1)^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 2r+2), \\ -\infty < x_{2r+2} < x_{2r+1} < \dots < x_1 < x_0 &= 0, \end{aligned}$$

т.е. $P_{2r+2}(x)$ имеет $2r+2$ различных отрицательных нуля.

Многочлен $P_{2r+2}(x)$ удовлетворяет условию (12) и имеет лишь простые нули, следовательно, $P_{2r+2}(-1) \neq 0$. Иначе $x = -1$ был бы нулем кратности не меньшей двух.

Таким образом, многочлен $P_{2r+2}(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы А и в силу этой теоремы константы z_m в (10) допускают оценку

$$|z_m| \leq (2r)! |P_{2r+2}(-1)|^{-1} = (2r)! \left| \int_0^1 S_{2r+1}(t) dt \right|^{-1}. \quad (22)$$

При $n = 2r$ представление (5) запишем в виде

$$\begin{aligned} &(2r-1)! \Delta^{2r} y_m \\ &= \int_0^{2r+2} u(m-1+t) \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k+1+v-t)_+^{2r-1} dv dt \\ &= \sum_{l=0}^{2r+2} z_{m+l} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k+1+v-l-t)_+^{2r-1} dv dt, \end{aligned} \quad (23)$$

где $z_m = u(m - 1 + t)$ и добавленные интегралы от $-1/2$ до 0 при $l = 0$ и от $1/2$ до 1 при $l = 2r + 2$ равны нулю, так как в этом случае

$$\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k + 1 + v - l - t)_+^{2r-1} = 0.$$

Исследуем свойства характеристического многочлена $P_{2r+2}(x)$ разностного уравнения (23).

Вычислив интегралы, получим

$$\begin{aligned} & 2r(2r+1)hP_{2r+2}(x) \\ &= \sum_{l=0}^{2r+2} x^l \sum_{s=0}^{2r} (-1)^s C_{2r}^s \left[\left(s + 1 - l + \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} - \left(s + 1 - l + \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \right)_+^{2r-1} + \left(s + 1 - l - \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} - \left(s + 1 - l - \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} \right] \\ &= \sum_{l=0}^{2r+2} x^l \left\{ \sum_{s=0}^{2r} (-1)^s C_{2r}^s \left[\left(s - l - \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} - \left(s - l + \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} \right] - \sum_{s=1}^{2r+1} (-1)^s C_{2r}^{s-1} \left[\left(s - l + \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} - \left(s - l - \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} \right] \right\} \\ &= \sum_{l=0}^{2r+2} x^l \sum_{s=0}^{2r+1} (-1)^s C_{2r+1}^s \left[\left(s - l - \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} - \left(s - l + \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} \right]. \end{aligned}$$

Умножив левую и правую часть последнего равенства на $(1-x)$, получим:

$$\begin{aligned} & (1-x)2r(2r+1)hP_{2r+2}(x) \\ &= \sum_{s=0}^{2r+1} (-1)^s C_{2r+1}^s \left[\left(s - \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} - \left(s + \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} \right] \\ &+ \left(\frac{h-1}{2} \right)_+^{2r+1} + \sum_{l=1}^{2r+2} x^l \sum_{s=0}^{2r+2} (-1)^s (C_{2r+1}^s + C_{2r+1}^{s-1}) \\ &\times \left[\left(s - l - \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} - \left(s - l + \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} \right] \\ &- x^{2r+3} \sum_{s=0}^{2r+1} (-1)^s C_{2r+1}^s \left[\left(s - 2r - 2 - \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} - \left(s + 1 - 2r - 3 + \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \right)_+^{2r+1} \right]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю как разность порядка $2r + 1$ от полинома меньшей степени, коэффициент при $-x^{2r+3}$ равен $((h - 1)/2)^{2r+1}$ в силу определения x_+ . В итоге имеем

$$\begin{aligned} & (1 - x)2r(2r + 1)hP_{2r+2}(x) \\ &= \left(\frac{h - 1}{2}\right)^{2r+1} + \sum_{l=1}^{2r+2} x^l \sum_{s=l+1}^{2r+2} (-1)^s C_{2r+2}^s \left(s - l - \frac{h}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2r+1} \\ & \quad - \sum_{l=1}^{2r+2} x^l \sum_{s=l-1}^{2r+2} (-1)^s C_{2r+2}^s \left(s - l + \frac{h}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2r+1} - \left(\frac{h - 1}{2}\right)^{2r+1} x^{2r+3}. \end{aligned}$$

При дальнейших преобразованиях используем, что в последней двойной сумме слагаемое при $l = 1$ равно нулю,

$$\sum_{s=0}^{2r+2} (-1)^s C_{2r+2}^s \left(s - l + v + \frac{1}{2}\right)^{2r+1} = 0$$

и

$$\begin{aligned} & - \sum_{s=0}^{2r+1} (-1)^s C_{2r+2}^s \left(2r + 1 - s + \frac{3 - h}{2}\right)^{2r+1} \\ &= - \sum_{s=0}^{2r+2} (-1)^s C_{2r+2}^s \left(2r + 1 - s + \frac{3 - h}{2}\right)^{2r+1} + \left(-1 + \frac{3 - h}{2}\right)^{2r+1} \\ &= \left(\frac{h - 1}{2}\right)^{2r+1}. \end{aligned}$$

В итоге, учитывая равенство (13), получим

$$\begin{aligned} & (1 - x)2r(2r + 1)hP_{2r+2}(x) \\ &= \sum_{l=0}^{2r+1} x^l \sum_{s=0}^l (-1)^s C_{2r+2}^s \left(l - s + \frac{h - 1}{2}\right)^{2r+1} \\ & \quad - x^2 \sum_{l=0}^{2r+1} x^l \sum_{s=0}^l (-1)^s C_{2r+2}^s \left(l - s + \frac{3 - h}{2}\right)^{2r+1} \\ &= P_{2r+1}\left(\frac{h - 1}{2}, x\right) - x^2 P_{2r+1}\left(\frac{3 - h}{2}, x\right) = \varphi(x). \end{aligned} \quad (24)$$

Покажем, что функция $\varphi(x)$ при $1 < h < 2$ имеет $2r + 2$ различных отрицательных нулей. Тем самым аналогичным свойством будет обладать и многочлен $P_{2r+2}(x)$.

Так как $0 < (h-1)/2 < 1/2$, $1/2 < (3-h)/2 < 1$, то многочлены $P_{2r+1}((h-1)/2, x)$ и $P_{2r+1}((3-h)/2, x)$ имеют по $2r+1$ различных отрицательных нулей. Обозначим их соответственно $\{y_i\}_{i=1}^{2r+1}$, $\{z_i\}_{i=1}^{2r+1}$:

$$\begin{aligned} -\infty < y_{2r+1} < y_{2r} < \dots < y_1 < 0, \\ -\infty < z_{2r+1} < z_{2r} < \dots < z_1 < 0. \end{aligned}$$

Из свойства 3) вытекает, что

$$z_i < y_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2r+1).$$

При $h = 1$ полиномы $P_{2r+1}((h-1)/2, x)$, $P_{2r+1}((3-h)/2, x)$ превращаются в полиномы $P_{2r+1}(0, x)$, $P_{2r+1}(1, x)$.

Из свойства 4) следует, что многочлен $P_{2r+1}(1, x)$ имеет степень $2r$ и $P_{2r+1}(0, x) = xP_{2r+1}(1, x)$. В частности, из последнего равенства следует, что один из нулей многочлена $P_{2r+1}(0, x)$ равен нулю, а из свойства 5) и указанного равенства следует, что многочлены $P_{2r+1}(0, x)$ и $P_{2r+1}(1, x)$ имеют по $2r$ различных отрицательных нулей и эти нули у них совпадают. Обозначим нули многочленов $P_{2r+1}(0, x)$ и $P_{2r+1}(1, x)$ соответственно через $\{v_i\}_{i=1}^{2r+1}$, $\{u_i\}_{i=1}^{2r}$, тогда

$$-\infty < v_{2r+1} = u_{2r} < v_{2r} = u_{2r-1} < \dots < v_2 = u_1 < v_1 = 0.$$

Далее, из свойства 3) выводим неравенства

$$\begin{aligned} -\infty < z_{2r+1} < y_{2r+1} < v_{2r+1} = u_{2r} < z_{2r} < y_{2r} < v_{2r} \\ &= u_{2r-1} < z_{2r-1} < \dots < y_2 < v_2 = u_1 < z_1 < y_1 < v_1 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (14) и (24) следует, что

$$\varphi(0) = P_{2r+1}\left(\frac{h-1}{2}, 0\right) = \left(\frac{h-1}{2}\right)^{2r+1} > 0 \quad (1 < h < 2). \quad (26)$$

Далее, многочлен $P_{2r+1}((h-1)/2, x)$ имеет лишь простые нули и, следовательно, при переходе через них меняет знак. Отсюда и из перемещаемости нулей многочленов $P_{2r+1}((h-1)/2, x)$ и $P_{2r+1}((3-h)/2, x)$ (неравенства (25)) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \varphi(z_i) &= \operatorname{sign} P_{2r+1}\left(\frac{h-1}{2}, z_i\right) = (-1)^i \quad (1 < h < 2), \\ i &= 1, 2, \dots, 2r+1, \end{aligned} \quad (27)$$

Покажем, что коэффициент при старшей степени x^{2r+3} многочлена $\varphi(x)$ отрицателен. Действительно, в [2] установлено рекуррентное соотношение

$$P_{n+1}\left(\frac{3-h}{2}, x\right) = x(1-x)P'_n\left(\frac{3-h}{2}, x\right) + \left[\frac{3-h}{2} + \left(n+1 - \frac{3-h}{2}\right)x\right]P_n\left(\frac{3-h}{2}, x\right).$$

Оно легко проверяется с помощью представления (14). Обозначим коэффициент при x^n многочлена $P_n((3-h)/2, x)$ через $a_{n,n}$, тогда, учитывая, что $P_0((3-h)/2, x) \equiv 1$, из рекуррентного соотношения выводим

$$a_{n+1,n+1} = -na_{n,n} + \left(n + \frac{h-1}{2}\right)a_{n,n} = \frac{h-1}{2}a_{n,n}.$$

Так как $a_{0,0} = 1$, то $a_{2r+1,2r+1} = ((h-1)/2)^{2r+1} > 0$. Отсюда и из (24) вытекает, что коэффициент при старшей степени x^{2r+3} многочлена $\varphi(x)$ равен $-((h-1)/2)^{2r+1} < 0$, т.е. $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -\infty$ и, следовательно, существует точка $z_{2r+2} < z_{2r+1}$, в которой

$$\text{sign } \varphi(z_{2r+2}) = 1. \quad (28)$$

Полагая $z_0 = 0$, из (26)–(28) получаем

$$\begin{aligned} \text{sign } \varphi(z_i) &= (-1)^i \quad (i = 0, 1, \dots, 2r+2), \\ 0 &= z_0 > z_1 > z_2 > \dots > z_{2r+2} > -\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, многочлен $P_{2r+2}(x)$ имеем $2r+2$ различных отрицательных нуля.

Для проверки условий теоремы 2 осталось установить, что многочлен $P_{2r+2}(x)$ удовлетворяет условию (12) теоремы А и, следовательно, в силу отсутствия кратных нулей $P_{2r+2}(-1) \neq 0$ ($1 < h < 2$).

Положим в (23)

$$a_l = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k+1+v-l-t)_+^{2r-1} dv dt \quad (0 \leq l \leq 2r+2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} &a_{2r+2-l} \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k+1+v+l-2r-2-t)_+^{2r-1} dv dt \end{aligned}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (l - k - 1 + v - t)_+^{2r-1} dv dt.$$

Учитывая, что

$$(l - k - 1 + v - t)_+^{2r-1} + (l - k - 1 + v - t)_-^{2r-1} = (l - k - 1 + v - t)^{2r-1} \\ (x_- = \min(0, x)),$$

и, что разность порядка $2r$ от полинома меньшей степени равна нулю, а также равенство $(l - k - 1 + v - t)_-^{2r-1} = -(k + 1 - l - v + t)_+^{2r-1}$, имеем

$$a_{2r+2-l} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k + 1 - l - v + t)_+^{2r-1} dv dt.$$

Заменяя в последнем равенстве t на $-t$, v на $-v$, окончательно получим $a_{2r+2-l} = a_l$ ($l = 0, 1, \dots, r$).

Таким образом, характеристический многочлен $P_{2r+2}(x)$ разностного уравнения (23) удовлетворяет всем условиям теоремы А и, следовательно,

$$|z_m| \leq (2r - 1)! \cdot |P_{2r+2}(-1)|^{-1}. \quad (29)$$

Далее, из (23) имеем

$$P_{2r+2}(-1) \\ = \sum_{l=0}^{2r+2} (-1)^l \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k + 1 + v - l - t)_+^{2r-1} dv dt.$$

Учитывая, что при $l = 0$ сумма по k при $t < 0$ равна нулю, а при $l = 2r + 2$ та же сумма при $t > 0$ равна нулю, преобразуем, привлекая равенства (7), (8), значение $P_{2r+2}(-1)$:

$$P_{2r+2}(-1) \\ = \int_0^{1/2} \sum_{l=0}^{2r+1} \frac{(-1)^l}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k + 1 + v - l - t)_+^{2r-1} dv dt \\ + \int_{-1/2}^0 \sum_{l=0}^{2r+2} \frac{(-1)^l}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k + 1 + v - l - t)_+^{2r-1} dv dt \\ = \int_0^{1/2} S_{2r}(t, h) dt \\ - \int_{-1/2}^0 \sum_{l=0}^{2r+1} \frac{(-1)^l}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k + 1 + v - l - t)_+^{2r-1} dv dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{1/2} S_{2r}(t, h) dt \\
&\quad - \int_{1/2}^1 \sum_{l=0}^{2r+1} \frac{(-1)^l}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k+1+v-l-t)_+^{2r-1} dv dt \\
&= \int_0^{1/2} S_{2r}(t, h) dt - \int_{1/2}^1 S_{2r}(t, h) dt. \tag{30}
\end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Функция $S_n(t) = S_n(t, h)$ является четной (нечетной) относительно $t = 1/2$ при n нечетном (четном), т.е.

$$S_n(1-t) = (-1)^{n-1} S_n(t) \quad (0 \leq t \leq 1/2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя в (7), (8) t на $1-t$, а затем s на $n+1-s$, k на $n-k$ и, учитывая, что $(-k-1-v+t+s)_+^{n-1} + (-k-1-v+t+s)_-^{n-1} = (-k-1-v+t+s)^{n-1}$, $(-t)_-^{n-1} = (-1)^{n-1} t_+^{n-1}$, выводим утверждение леммы 2.

Положим

$$Q_n^*(t) = \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l \sum_{k=l}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k (k+1-l-t)^n.$$

В [2, лемма 2.1] доказано, что

$$Q_n^{*'}(t) = \frac{d}{dt} Q_n^*(t) = 2n Q_{n-1}^*(t).$$

Учитывая последнее тождество, преобразуем $S_n(t)$. Сохраняя лишь ненулевые слагаемые при $0 \leq t \leq 1-h/2$ ($1 < h < 2$), имеем

$$\begin{aligned}
hS_n(t) &= \int_{-h/2}^t \sum_{l=0}^n (-1)^l \sum_{k=l}^n (-1)^{n-k} C_n^k (k+1+v-t-l)^{n-1} dv \\
&\quad + \int_t^{h/2} \sum_{l=2}^{n+1} (-1)^l \sum_{k=l-1}^n (-1)^{n-k} C_n^k (k+1+v-t-l)^{n-1} dv \\
&= \int_{-h/2}^t Q_{n-1}^*(t-v) dv \\
&\quad - \int_t^{h/2} \sum_{l=0}^n (-1)^l \sum_{k=l}^n (-1)^{n-k} C_n^k (k+v-l-t)^{n-1} dv \\
&= \int_{-h/2}^t Q_{n-1}^*(t-v) dv - \int_t^{h/2} Q_{n-1}^*(1+t-v) dv
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2n} \left[Q_n^* \left(t + \frac{h}{2} \right) - Q_n^*(0) + Q_n^* \left(1 + t - \frac{h}{2} \right) - Q_n^*(1) \right]. \quad (31)$$

Аналогично, при $1 - h/2 \leq t \leq 1/2$ получаем

$$\begin{aligned} hS_n(t) &= \int_{-h/2}^{t-1} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \sum_{k=l+1}^n (-1)^{n-k} C_n^k (k+1+v-t-l)^{n-1} dv \\ &\quad + \int_{t-1}^t \sum_{l=0}^n (-1)^l \sum_{k=l}^n (-1)^{n-k} C_n^k (k+1+v-l-t)^{n-1} dv \\ &\quad + \int_t^{h/2} \sum_{l=2}^{n+1} (-1)^l \sum_{k=l-1}^n (-1)^{n-k} C_n^k (k+1+v-l-t)^{n-1} dv \\ &= - \int_{-h/2}^{t-1} Q_{n-1}^*(t-v-1) dv + \int_{t-1}^t Q_{n-1}^*(t-v) dv \\ &\quad - \int_t^{h/2} Q_{n-1}^*(t+1-v) dv \\ &= \frac{1}{2n} \left[Q_n^*(0) - Q_n^* \left(t + \frac{h}{2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - Q_n^*(1) + Q_n^*(0) + Q_n^* \left(t + 1 - \frac{h}{2} \right) - Q_n^*(1) \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие свойства:*

- 1) $Q_n^*(t)$ – четен (нечетен) относительно точки $t = 1/2$ при n четном (нечетном),
- 2) $|Q_n^*(t)| = (-1)^{[(n+1)/2]} Q_n^*(t)$ ($0 \leq t \leq 1/2$), где $[x]$ – целая часть числа x ,
- 3) $Q_{2s}^*(0) = Q_{2s}^*(1) = 0$ ($s \geq 1$),
- 4) $Q_{2s+1}^*(0) + Q_{2s+1}^*(1) = 0$ ($s \geq 0$),
- 5) $Q_n^*(t) = n!(2/\pi)^{n+1} \varphi_n(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), где $\varphi_n(t)$ – функция Фавара (с точностью до нормировки полином Эйлера $E_n(t)$ при $0 \leq t \leq 1$),

$$\varphi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{-n-1} \sin \left[(2m+1)\pi t - \frac{n\pi}{2} \right].$$

Свойства 1)–4) следуют из [2, лемма 2.1], при этом в 2)–4) следует принять во внимание четность (нечетность) $Q_n(t)$ относительно $t = 1/2$. Свойство 5) вытекает из [1, лемма А и равенство (1.19)], следует лишь учесть, что в этой работе $Q_n(2t-1) = Q_n^*(t)$.

ЛЕММА 4. На отрезке $[0, 1/2]$ функция $|Q_n^*(t)|$ строго возрастает (убывает) с ростом t при n четном (нечетном).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя свойство 2) леммы 3, тождество (31) и вновь свойство 2), имеем

$$\frac{d}{dt}|Q_n^*(t)| = 2n(-1)^{[(n+1)/2]}(-1)^{[n/2]}|Q_{n-1}^*(t)| \quad (0 \leq t \leq 1/2). \quad (33)$$

Отсюда, учитывая, что $Q_n^*(t)$ – не равный тождественно нулю полином, выводим утверждения леммы 3. Можно отметить, что лемма 3 следует также из свойства 5).

Из свойств 1), 3), 4) леммы 3, равенств (31), (32) следует, что

$$hS_n(t) = \frac{1}{2n} \left[Q_n^* \left(t + \frac{h}{2} \right) + (-1)^n Q_n^* \left(\frac{h}{2} - t \right) \right] \quad (0 \leq t \leq 1 - h/2), \quad (34)$$

$$hS_n(t) = \frac{1}{2n} \left[(-1)^n Q_n^* \left(\frac{h}{2} - t \right) - Q_n^* \left(t + \frac{h}{2} - 1 \right) \right] \quad (1 - h/2 \leq t \leq 1/2). \quad (35)$$

ЛЕММА 5. На отрезке $[0, 1/2]$ функция $S_n(t)$ сохраняет знак.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 2r$. Тогда из свойства 2) леммы 3, равенства (34) и четности $Q_{2r}^*(t)$ относительно $t = 1/2$ следует, что $S_{2r}(t)$ сохраняет знак на отрезке $[0, 1 - h/2]$. Покажем, что на полуинтервале $[1 - h/2, 1/2]$ функция $S_{2r}(t)$ также сохраняет знак. Рассмотрим два случая: а) $1 < h \leq 3/2$ и б) $3/2 < h < 2$. В случае а) при $t \in [1 - h/2, 1/2]$ $h/2 - t \leq h - 1 < 1/2$, $t + h/2 - 1 \leq (h - 1)/2 < 1/2$, а их разность $1 - 2t > 0$, и в силу свойства 3) леммы 3 и леммы 4 знак $S_{2r}(t)$ определяется знаком первого слагаемого в правой части (35). В случае б) $1 - h/2 < (h - 1)/2$ и при $1 - h/2 \leq t \leq (h - 1)/2$ доказательство нужного факта проходит как в случае а). Далее, при $(h - 1)/2 < t < 1/2$ точки $t + h/2 - 1$ и $h/2 - t$ лежат по разные стороны от точки $t = 1/2$ и $t + h/2 - 1 < 1/2 < h/2 - t$. Так как $[1/2 - (t + h/2 - 1)] - [(h/2 - t) - 1/2] = 2 - h > 0$, то, учитывая четность $Q_{2r}^*(t)$ относительно $t = 1/2$ и строгое возрастание $|Q_{2r}^*(t)|$ на $[0, 1/2]$, вновь получаем, что знак $S_{2r}(t)$ определяется знаком первого слагаемого в правой части (35), т.е. $S_{2r}(t)$ сохраняет знак на $[1 - h/2, 1/2]$. Учитывая непрерывность $S_{2r}(t)$ на $[1 - h/2, 1/2]$ и тот факт, что функция $S_{2r}(t)$ при $t = (h - 1)/2$ не обращается в нуль, выводим, что она сохраняет знак на $[1 - h/2, 1/2]$.

Кроме того из формул (34), (35) и свойств 3), 4) леммы 3 следует, что $S_{2r}(t)$ непрерывна в точке $t = 1 - h/2$. Из леммы 4 вытекает, что функция $S_{2r}(t)$ не обращается в нуль в точке $t = 1 - h/2$. Отсюда и из установленных фактов в случаях а) и б) следует, что $S_{2r}(t)$ сохраняет знак на $[0, 1/2]$.

Докажем лемму для нечетного $n = 2r + 1$. Имеем

$$2(2r+1)S_{2r+1}(t) = Q_{2r+1}^*\left(t + \frac{h}{2}\right) - Q_{2r+1}^*\left(\frac{h}{2} - t\right) \quad (0 \leq t \leq 1 - h/2), \quad (36)$$

$$2(2r+1)S_{2r+1}(t) = -Q_{2r+1}^*\left(\frac{h}{2} - t\right) - Q_{2r+1}^*\left(t + \frac{h}{2} - 1\right) \quad (1 - h/2 \leq t \leq 1/2). \quad (37)$$

Пусть $1 < h \leq 3/2$ и $0 \leq t \leq (h-1)/2$, тогда точки $t + h/2$ и $h/2 - t$ лежат правее точки $t = 1/2$. Поэтому из нечетности (лемма 3, свойство 1)) $Q_{2r+1}^*(t)$ относительно $t = 1/2$ и строгого убывания $|Q_{2r+1}^*(t)|$ на $[0, 1/2]$ (лемма 4) следует, что $|Q_{2r+1}^*(t + h/2)| > |Q_{2r+1}^*(h/2 - t)|$ и, значит, при $0 \leq t \leq (h-1)/2$ знак $S_{2r+1}(t)$ совпадает со знаком $Q_{2r+1}^*(t + h/2)$.

При тех же h , $1 < h \leq 3/2$ и $(h-1)/2 < t \leq 1 - h/2$ точки $h/2 - t$ и $h/2 + t$ лежат по разные стороны от $t = 1/2$. Поэтому из нечетности $Q_{2r+1}^*(t)$ относительно $t = 1/2$ $Q_{2r+1}^*(h/2 + t)$ и $Q_{2r+1}^*(h/2 - t)$ имеют противоположные знаки и в силу (36)

$$\text{sign } S_{2r+1}(t) = \text{sign } Q_{2r+1}^*(t + h/2).$$

При $1 < h < 3/2$ в силу нечетности $Q_{2r+1}^*(t)$ относительно $t = 1/2$ из (37) имеем при $1 - h/2 < t \leq 1/2$

$$\text{sign } S_{2r+1}(t) = \text{sign}[Q_{2r+1}^*(1 + t - h/2) + Q_{2r+1}^*(2 - t - h/2)].$$

Так как $1 + t - h/2 > 1/2$ и $2 - t - h/2 > 1/2$, то в силу нечетности $Q_{2r+1}^*(t)$ относительно $t = 1/2$ и свойства 2) леммы 3 слагаемые в квадратных скобках сохраняют знак.

Таким образом, при $1 < h \leq 3/2$ знак $S_{2r+1}(t)$ при $0 < t \leq 1/2$ совпадает со знаком $Q_{2r+1}^*(t)$ для $t \in (1/2, 1]$.

Для завершения доказательства леммы осталось рассмотреть случай $3/2 < h < 2$. В этом случае при $0 \leq t \leq 1 - h/2$ выполняется неравенство $0 \leq t \leq (h-1)/2$ и, как в предыдущем случае, знак $S_{2r+1}(t)$ совпадает со знаком $Q_{2r+1}^*(t + h/2)$, т.е. со знаком $Q_{2r+1}^*(t)$ при t из полуинтервала $(1/2, 1]$.

Пусть $3/2 < h < 2$ и $1 - h/2 < t \leq (h-1)/2$, тогда $1/2 \leq h/2 - t \leq h-1$ и $0 \leq t + h/2 - 1 \leq h - 3/2 < 1/2$. В силу леммы 4 и свойства 1) леммы 3, чем дальше влево или вправо от точки $t = 1/2$ отстоит t , тем больше $|Q_{2r+1}^*(t)|$. В нашем случае $1/2 - (t + h/2 - 1) = 3/2 - t - h/2$, $(h/2 - t) - 1/2 = h/2 - t - 1/2$ и $(3/2 - t - h/2) - (h/2 - t - 1/2) = 2 - h > 0$, поэтому в силу (36) знак $S_{2r+1}(t)$ определяется знаком $-Q_{2r+1}^*(t + h/2 - 1)$ или

в силу нечетности $Q_{2r+1}^*(t)$ относительно $t = 1/2$ знаком $Q_{2r+1}^*(2-t-h/2)$, где $2-t-h/2 \geq 5/2-h > 1/2$.

Осталось рассмотреть случай $3/2 < h < 2$ и $(h-1)/2 < t \leq 1/2$. Имеем $(h-1)/2 \leq h/2-t \leq 1/2$, $h-3/2 \leq t+h/2-1 \leq (h-1)/2 < 1/2$. Поэтому из свойства 2) леммы 3 знаки слагаемых в правой части (37) одинаковы, и в силу нечетности $Q_{2r+1}^*(t)$ относительно $t = 1/2$ вновь $\text{sign } S_{2r+1}(t)$ при $0 < t \leq 1/2$ совпадает со знаком $Q_{2r+1}^*(t)$ при $t \in [1/2, 1)$, т.е. знак сохраняется. Лемма доказана.

Из лемм 2 и 5 следует, что правые части в оценках (9) и (22), (29) (с учетом (30)) совпадают. Из этих оценок, используя (33), получаем

$$\begin{aligned} A(n, \infty, h) &= (n-1)!h \left[\int_0^1 |S_n(t)| dt \right]^{-1} = (n-1)!h \left[2 \left| \int_0^{1/2} S_n(t) dt \right| \right]^{-1} \\ &= 2(n+1)! \left| [1 + (-1)^{n+1}] Q_{n+1}^* \left(\frac{h}{2} \right) + [1 + (-1)^n] Q_{n+1}^* \left(\frac{h-1}{2} \right) \right|^{-1} \\ &= (n+1)!h \left| Q_{n+1}^* \left(\frac{2h-1-(-1)^n}{4} \right) \right|^{-1}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства вместе со свойством 5) леммы 3 следует справедливость теоремы 1.

Институт математики и механики
Уральского отделения РАН

Поступило
19.01.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Субботин Ю. Н. Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n -й производной // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 30–60.
- [2] Субботин Ю. Н. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН. 1975. Т. 138. С. 118–173.
- [3] Шарма А., Цимбаларио И. Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 2. С. 161–173.
- [4] Шевалдин В. Т. Об одной задаче функциональной интерполяции // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 4. С. 603–622.
- [5] Шевалдин В. Т. Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164.
- [6] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.