Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Рост целых функций с заданными нулями и представление мероморфных функций, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 120–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:24:45

УДК 517.547.2

РОСТ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДААННЫМИ НУЛЯМИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Б. Н. Хабибуллин

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность точек на комплексной плоскости и $\Lambda(r)$ – число точек последовательности Λ в круге $\{|z| < r\}$. В терминах считающей функции $\Lambda(r)$ исследуется следующий вопрос: каков минимально возможный рост характеристики $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ в классе всех целых функций $f \neq 0$, обращающихся в нуль на Λ ? Пусть F – мероморфная функция в $\mathbb{C}$. В терминах характеристики Неванлинны $T_F(r)$ функции F оценивается минимально возможный рост характеристик $M_g(r)$ и $M_h(r)$ в классе всех пар целых функций g и h таких, что $F = g/h$. Приведены аналоги полученных результатов для голоморфных и мероморфных функций в единичном круге комплексной плоскости.

Библиография: 16 названий.

1. Введение и формулировки результатов

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность точек на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$; $\Lambda(r)$ – считающая функция последовательности Λ , т.е. $\Lambda(r)$ – число точек этой последовательности в круге $D(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Если не оговорено противное, всюду предполагаем, что $0 \notin \Lambda$, поскольку это ограничение в рамках рассматриваемых вопросов всегда легко снимается. Пусть

$$N_\Lambda(r) = \int_0^r \Lambda(t) \frac{dt}{t} \quad (1.1)$$

– проинтегрированная, или усредненная, считающая функция последовательности Λ .

Следуя Л. Шварцу [1], *положительность* понимаем всюду как ≥ 0 . Функция $f(t)$, определенная на интервале (ограниченном или неограниченном) вещественной оси, называется *возрастающей* (соответственно *строго возрастающей*), если при всех $t_1 < t_2$ из области определения выполнено неравенство $f(t_1) \leq f(t_2)$ (соответственно строгое неравенство $f(t_1) < f(t_2)$). Аналогичным образом различаем *убывание* и *строгое убывание*.

Запись $f \equiv a$, где $a \in \mathbb{C}$ – постоянная, означает, что функция f тождественно равна a в области определения. В противном случае пишем $f \not\equiv a$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00770.

Класс всех целых функций обозначаем через $H(\mathbb{C})$. Для целой функции f полагаем $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$, $r \geq 0$.

Функция $f \in H(\mathbb{C})$ *обращается в нуль на последовательности* $\Lambda \subset \mathbb{C}$, если кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ не меньше числа повторений этой точки в последовательности Λ (пишем $f(\Lambda) = 0$). Если же кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ совпадает с числом ее повторений в Λ , то Λ – *нулевая последовательность функции* f (пишем $\text{Zero}_f = \Lambda$); через Zero_f обозначаем последовательность всех нулей функции f , перенумерованную с учетом кратности.

Рассматриваются следующие две родственные задачи.

ПРОБЛЕМА 1. *В терминах считающей функции $\Lambda(r)$ последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ дать верхнюю оценку возможного минимального роста характеристики $M_f(r)$ в классе всех целых функций $f \not\equiv 0$, обращающихся в нуль на последовательности Λ .*

Класс всех мероморфных функций в $\mathbb{C}$ обозначаем через $\text{Mer}(\mathbb{C})$. Всюду в работе, если не оговорено противное, для функции $F \in \text{Mer}(\mathbb{C})$ предполагаем, что $F(0) \neq \infty$. Это упрощает формулировки и в границах исследуемой проблематики не умаляет общности. Через T_F обозначаем классическую форму *характеристики Неванлинны функции* $F \in \text{Mer}(\mathbb{C})$, т.е. если $\Gamma = \{\gamma_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность полюсов функции F , перенумерованная с учетом кратности, то $T_F(r) = m_f(r) + N_\Gamma(r)$, где

$$m_F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})| d\theta, \quad \log^+ t = \max\{0, \log t\}, \quad t \geq 0.$$

ПРОБЛЕМА 2. *Исключительно в терминах характеристики Неванлинны $T_F(r)$ функции $F \in \text{Mer}(\mathbb{C})$ найти верхнюю оценку на возможный минимальный рост пары характеристик $M_g(r)$ и $M_h(r)$ в классе всех пар функций $g, h \in H(\mathbb{C})$, представляющих F в виде отношения $F = g/h$.*

Из тривиальных фактов по проблемам 1 и 2 отметим следующие. Если $\Lambda(r) = O(1)$, $r \rightarrow +\infty$, то существует многочлен f такой, что $f \not\equiv 0$, $f(\Lambda) = 0$ (и даже $\text{Zero}_f = \Lambda$) и $\log^+ M_f(r) \leq N_\Lambda(r)$ для всех r . Аналогично, если для $F \in \text{Mer}(\mathbb{C})$ выполнено $T_F(r) = O(\log r)$, $r \rightarrow +\infty$, то существуют два многочлена g и h , представляющие $F = g/h$, такие, что $\log^+ \max\{M_g(r), M_h(r)\} \leq T_F(r)$ для всех r .

Классическая теорема Линделёфа начала прошлого столетия об описании нулевых последовательностей для целых функций конечного типа при заданном конечном порядке (см. [2, гл. II, теоремы 4.4 и 4.5]) по проблемам 1 и 2 дает следующее.

ТЕОРЕМА А (Линделёф). *Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Если*

$$\Lambda(r) = O(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty, \tag{1.2}$$

то существует целая функция $f \not\equiv 0$ такая, что $f(\Lambda) = 0$ и

$$\log^+ M_f(r) = O(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty. \tag{1.3}$$

Пусть $F \in \text{Mer}(\mathbb{C})$. Если

$$T_F(r) = O(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty, \tag{1.4}$$

то существует представление $F = g/h$ в виде частного целых функций g и h , удовлетворяющих соотношению

$$\log^+ \max\{M_g(r), M_h(r)\} = O(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (1.5)$$

Значительно позже Л. А. Рубелем и Б. А. Тейлором [3] были получены обобщения теоремы Линделёфа, которые после Д. Майлза [4] (см. также [5]) и некоторого их уточнения¹ в нашей работе [6, теоремы 3 и 5] дали качественно новую форму решения проблем 1 и 2.

Запись $f(r) = O(g(r))$, $r \rightarrow a$, при $g \equiv 0$ вблизи точки a (а такое ниже возможно) означает, что и $f \equiv 0$ вблизи a .

ТЕОРЕМА В (Майлз–Рубел–Тейлор). Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует целая функция $f \not\equiv 0$ такая, что $f(\Lambda) = 0$ и

$$\log^+ M_f(r) = O(N_\Lambda((1+\varepsilon)r)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (1.6)$$

Пусть $F \in \text{Mer}(\mathbb{C})$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует представление $F = g/h$ в виде частного целых функций g, h , удовлетворяющих соотношению

$$\log^+ \max\{M_g(r), M_h(r)\} = O(T_F((1+\varepsilon)r)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (1.7)$$

Вариацией на ту же тему является многомерный результат Г. Скоды [7] (см. также [8, теорема 9.12]), который для одной переменной наряду с ослабленным вариантом теоремы В дает следующее.

ТЕОРЕМА С (Скода). Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция $f \not\equiv 0$ такая, что $f(\Lambda) = 0$ и

$$\log^+ M_f(r) = O(r^3 N_\Lambda(r+\varepsilon)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (1.8)$$

Пусть $F \in \text{Mer}(\mathbb{C})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует представление $F = g/h$ в виде частного целых функций g, h , удовлетворяющих соотношению

$$\log^+ \max\{M_g(r), M_h(r)\} = O(r^3 T_F(r+\varepsilon)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (1.9)$$

Принципиальная особенность последних двух теорем В и С в отличие от приведенных выше тривиальных фактов и теоремы А – как отсутствие каких-либо предварительных условий на последовательность Λ (ср. с (1.2)) или функцию F (ср. с (1.4)), так и оценка непосредственно через проинтегрированную считающую функцию в (1.6) и (1.8) (ср. с (1.3)) и характеристику Неванлинны в (1.7) и (1.9) (ср. с (1.5)). Основные результаты нашей статьи по решению проблем 1 и 2 выдержаны в таком же духе и, в частности, заполняют “зазор” между теоремами В и С, уточняя последнюю.

Автор признателен И. Ф. Красичкову–Терновскому и С. В. Попену за полезные обсуждения содержания статьи.

¹В [6, теоремы 3 и 5] теорема В доказана сразу для многих комплексных переменных.

1.1. Основные результаты. Главный результат статьи представлен основной теоремой, изложенной с доказательством в п. 2. По проблемам 1 и 2 из нее в п. 3 выводится

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\varepsilon(r) > 0$ – убывающая и дифференцируемая при всех достаточно больших $r > 0$, а для ее производной ε' выполнено условие

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} r\varepsilon'(r) > -\infty. \quad (1.10)$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность точек в $\mathbb{C}$. Тогда существует целая функция $f \neq 0$ такая, что $f(\Lambda) = 0$ и

$$\log^+ M_f(r) = O\left(\frac{1}{\varepsilon(r)} N_\Lambda((1 + \varepsilon(r)) \cdot r)\right), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (1.11)$$

Пусть $F \in \text{Mer}(\mathbb{C})$. Тогда существует представление $F = g/h$ в виде частного целых функций g, h , удовлетворяющих соотношению

$$\log^+ \max\{M_g(r), M_h(r)\} = O\left(\frac{1}{\varepsilon(r)} T_F((1 + \varepsilon(r)) \cdot r)\right), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (1.12)$$

При $\varepsilon(r) \equiv \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – постоянная, получаем в точности теорему В, а при $\varepsilon(r)$, равном ε/r , опять же с постоянной $\varepsilon > 0$, получаем уточнение теоремы С, в которой теперь вместо r^3 в правых частях (1.8) и (1.9) можно поставить r . Вместе с тем условие (1.10) – весьма “мягкое” ограничение. К примеру, если функция $\varepsilon(r) > 0$ выпуклая начиная с некоторого $a > 0$, то для любого $r > a$ имеем

$$\varepsilon'(r) \geq \frac{\varepsilon(r) - \varepsilon(a)}{r - a} \geq \frac{-\varepsilon(a)}{r - a},$$

откуда сразу следует условие (1.10). Это позволяет продвинуться намного дальше теоремы Сходь в сторону значительного уменьшения функции $\varepsilon(r)$, что может оказаться существенным в случае быстрого роста характеристик N_Λ или T_F .

Для некоторых классов весовых пространств целых функций теорема 1 дает законченное описание множеств неединственности. Точнее, пусть $\lambda(r) > 0$, $r \geq 0$, – функция роста, т.е. непрерывная и возрастающая на $[0, +\infty)$, и функция $\varepsilon(r)$ такая же, как в теореме 1. Вещественнозначную функцию M на $[0, +\infty)$ называем функцией конечного (λ, ε) -типа, если существуют постоянные $A, \alpha, \beta > 0$ такие, что

$$M(r) \leq A \left(\frac{1}{\varepsilon(r)}\right)^\alpha \lambda(r + \beta\varepsilon(r)r)$$

для всех достаточно больших r .

Класс $\lambda^{(\varepsilon)}$ мероморфных функций определим как множество всех функций $F \in \text{Mer}(\mathbb{C})$, для которых характеристика $T_F(r)$ – функция конечного (λ, ε) -типа. Так, при $\varepsilon \equiv 1$ получаем известный класс мероморфных функций конечного λ -типа (см. [3], [5]). Подкласс класса $\lambda^{(\varepsilon)}$, состоящий из целых функций, обозначим $\lambda_E^{(\varepsilon)}$. Следующий результат можно рассматривать как обобщение соответствующих фактов о классах функций конечного λ -типа в смысле Рубела и Тейлора.

СЛЕДСТВИЕ. Λ – подпоследовательность нулей некоторой ненулевой функции из класса $\lambda_E^{(\varepsilon)}$, т.е. множество неединственности для алгебры $\lambda_E^{(\varepsilon)}$, тогда и только тогда, когда N_Λ – функция конечного (λ, ε) -типа.

Класс $\lambda^{(\varepsilon)}$ совпадает с полем частных $\lambda_E^{(\varepsilon)}/\lambda_E^{(\varepsilon)}$ алгебры $\lambda_E^{(\varepsilon)}$.

В части необходимости первое утверждение следствия сразу следует из формулы Пуассона–Йенсена, так как для целой функции $f \neq 0$ с нулевым множеством $\text{Zero}_f \supset \Lambda$ выполнено $N_\Lambda(r) \leq m_f(r) + O(1)$, $r \rightarrow +\infty$, и при этом $T_f(r) \equiv m_f(r)$, $r \geq 0$. Достаточность – прямое следствие первой части теоремы 1 и убывания функции $\varepsilon(r)$.

Вторую часть следствия легко получить из элементарных свойств характеристики Неванлинны и второй части теоремы 1.

Используя известные описания сопряженных пространств к весовым пространствам целых функций (см. [9]) в терминах преобразования Лапласа линейных непрерывных функционалов, первой части следствия можно придать форму критерия (не-)полноты систем экспонент с показателями из Λ в весовом пространстве целых функций, “сопряженном” к $\lambda_E^{(\varepsilon)}$.

1.2. О методе. Метод получения аналогов и обобщений приведенных теорем в настоящей работе, в отличие от традиционных, носит неконструктивный характер в том смысле, что не требует построения в какой-либо форме (в виде произведения или интеграла) голоморфных функций со специальными свойствами. Истоки этого метода – в исследованиях подобного рода для целых функций в [10]. Общая схема метода для голоморфных и мероморфных в области функций одной переменной изложена также в [11]. Вариант подхода, использованного в настоящей работе, применим и к функциям, голоморфным или мероморфным в единичном круге (см. заключительный комментарий в конце статьи).

2. Основная теорема

Через $\mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ обозначаем класс всех положительных борелевских мер $\mu \geq 0$ на $\mathbb{C}$, $\text{supp } \mu$ – носитель меры μ .

Используем общепринятое для мер μ в $\mathbb{C}$ обозначение

$$\mu(r) = \mu(D(r)), \quad r > 0. \quad (2.1)$$

Каждую последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ отождествляем с целочисленной мерой, обозначаемой тем же символом $\Lambda \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$, по правилу $\Lambda(B) = \sum_{\lambda_n \in B} 1$, $B \subset \mathbb{C}$. Таким образом, обозначение считающей функции через $\Lambda(r)$ вполне согласовано с (2.1). Как и в (1.1), для $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ полагаем

$$N_\mu(r) = \int_0^r \mu(t) \frac{dt}{t}. \quad (2.2)$$

Через $SH(\mathbb{C})$ обозначаем класс всех субгармонических функций в $\mathbb{C}$. Класс $SH(\mathbb{C})$ включает тождественную $-\infty$, а запись $u \not\equiv -\infty$ означает, что функция u не является таковой. Для функции $u \in SH(\mathbb{C})$ через μ_u обозначаем распределение масс Рисса этой функции [12], и наоборот, для $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ функция u_μ – субгармоническая функция с

распределением масс Рисса $\mu_u = \mu$, которая всегда существует и единственна с точностью до гармонического слагаемого [12]. Отметим, что для конечности интеграла (2.2) по мере $\mu = \mu_u$ необходимо и достаточно условие $u(0) \neq -\infty$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$. Тогда для каждой субгармонической в $\mathbb{C}$ функции $u = u_\mu$ с распределением масс Рисса $\mu_u = \mu$ при любом выборе непрерывной функции $\varrho(r) > 0$, определенной на $[a, +\infty)$ при некотором $a > 0$ и удовлетворяющей условию

$$r + \varrho(r) - \text{строго возрастающая функция на } [a, +\infty), \quad (2.3)$$

найдутся

[SH] субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция $v \not\equiv -\infty$ такая, что справедлива оценка

$$u(z) + v(z) \leq \int_a^r \int_a^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) d\mu(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x} + \mu(b) \log(1 + r), \quad r = |z| > a, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{где } b = a + \varrho(a); \quad (2.4)$$

[H] целая функция $q \not\equiv 0$ такая, что для любой функции $\sigma(r) > 0$ на $[a, +\infty)$ справедлива оценка

$$u(z) + \log |q(z)| \leq \int_a^{r+\sigma(r)} \int_a^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) d\mu(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x} + (\mu(b) + 3) \log \left(1 + \frac{1}{\sigma(r)}\right) + (\mu(b) + 3) \log(1 + r), \quad |z| = r > a, \quad (2.5)$$

с тем же b , что и в (2.4).

Прежде чем непосредственно доказывать теорему, в пп. 2.1–2.5 проведем предварительную подготовку.

2.1. Локализация меры μ вне $D(b)$ для [SH]. Допустим, что часть [SH] основной теоремы доказана для мер μ , сосредоточенных вне $D(b)$, где b определено в (2.4). В этом случае оценка (2.4) не содержит в правой части величины $\mu(b)$.

В случае уже произвольной меры $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ можем представить ее в виде суммы мер $\mu = \mu^b + \mu^\infty$, где μ^b – сужение меры μ на круг $D(b)$, а мера μ^∞ сосредоточена вне $D(b)$. При этом функцию $u = u_\mu$ с распределением масс Рисса μ можно представить в виде суммы $u = u^b + u^\infty$ с распределениями масс Рисса соответственно μ^b и μ^∞ так, что функция u^b выбрана в виде логарифмического потенциала $u^b(z) = \int_{\mathbb{C}} \log |z - \zeta| d\mu^b(\zeta) - C$. Тогда для некоторой постоянной $C > 0$ имеем оценку $u^b(z) \leq \mu(b) \log(1 + |z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Объединяя эту оценку с пока гипотетически существующей оценкой (2.4) для u^∞ , получаем оценку (2.4) уже для функции u с той же функцией v , что и для u^∞ .

2.2. От [SH] к [H]. Для краткости введем обозначение для двойного интеграла в (2.4):

$$\Pi_a(r; \mu, \varrho) = \begin{cases} \int_a^r \int_a^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) d\mu(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x}, & \text{если } r > a, \\ \lim_{t \rightarrow a+0} \Pi_a(t; \mu, \varrho), & \text{если } r \leq a. \end{cases} \quad (2.6)$$

По конструкции $\Pi_a(r; \mu, \varrho)$ и из свойств функции ϱ легко следует, что эта функция (от r) определена и конечна при всех $r \geq 0$, а также возрастающая и непрерывная на $[0, +\infty)$.

Следующее предложение, выведенное из теоремы Хёрмандера о решении $\bar{\partial}$ -задачи в [6, лемма 2.2] для нескольких комплексных переменных, позволяет перейти от “субгармонического” заключения [SH] основной теоремы к “голоморфному” заключению [H].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $u \in SH(\mathbb{C})$, $v \in SH(\mathbb{C})$ и $v \not\equiv -\infty$. Если для некоторой непрерывной функции M неравенство $u(z) + v(z) \leq M(z)$ выполнено для всех $z \in \mathbb{C}$, то найдется функция $q \in H(\mathbb{C})$ такая, что $q(0) \neq 0$ и в любой точке $z \in \mathbb{C}$ для любого числа $\sigma > 0$ выполнено неравенство

$$u(z) + \log |q(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| < \sigma} M(\zeta) + 3 \log(1 + |z| + \sigma) - \log \sigma. \quad (2.7)$$

Допустим теперь, что выполнено (2.4) для субгармонической функции $v \not\equiv -\infty$. Положим $M(z) = \Pi_a(r; \mu, \varrho) + \mu(b) \log(1+r)$, $z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$. Тогда по принципу максимума $u + v \leq M$ всюду на $\mathbb{C}$.

Примем для каждой точки z за σ значение

$$\sigma = \sigma_z = \begin{cases} \sigma(r), & \text{если } |z| = r > a, \\ \sigma(a), & \text{если } 0 \leq |z| = r \leq a. \end{cases}$$

Тогда по предложению 2.1 найдется целая функция q , $q(0) \neq 0$, такая, что при всех $|z| = r > a$ (2.7) запишется в виде

$$\begin{aligned} u(z) + \log |q(z)| &\leq \sup_{|z-\zeta| < \sigma_z} M(\zeta) + 3 \log(1 + |z| + \sigma_z) - \log \sigma_z \\ &\leq \Pi_a(r + \sigma(r); \mu, \varrho) + \mu(b) \log(1 + r + \sigma(r)) + 3 \log(1 + r + \sigma(r)) + \log \frac{1}{\sigma(r)} \\ &\leq \Pi_a(r + \sigma(r); \mu, \varrho) + (\mu(b) + 3) \log(1 + r) + (\mu(b) + 3) \log \left(1 + \frac{1}{\sigma(r)} \right), \end{aligned}$$

что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если при выводе [6, лемма 2.2] воспользоваться следствием теоремы Хёрмандера из [13, теорема 5.12], то в предложении 2.1, а значит, и в [H], число 3 всюду можно заменить на любое число большее единицы.

2.3. Радиальные меры. Мету $\lambda \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ называем *радиальной на $\mathbb{C}$* , если она представляется в виде тензорного произведения (см. [1, с. 657]) мер

$$d\lambda(\zeta) = \frac{1}{2\pi} d\theta \otimes d\lambda(t), \quad \zeta = te^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad t \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Если радиальная мера λ не имеет “сильной” особенности в нуле (к примеру, сосредоточена вне некоторой окрестности нуля), то функция $N_\lambda(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, построенная по (2.2), является одной из *субгармонических функций*, равных нулю в нуле, с распределением масс Рисса именно λ . Убедиться в этом наиболее прямым путем можно, например, вычислив оператор Лапласа в полярных координатах (в смысле теории распределений) от $N_\lambda(|z|)$.

2.4. Меры и функции Йенсена. Для доказательства основной теоремы нам потребуются некоторые понятия и утверждения из [6], [10], [11]. Сформулируем их здесь только для конуса $SH(\mathbb{C})$.

Мера $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ с компактным носителем в $\mathbb{C}$ называется *мерой Йенсена* в $\mathbb{C}$, если для любой субгармонической в $\mathbb{C}$ функции u выполнено неравенство $u(0) \leq \int_{\mathbb{C}} u d\nu$.

Доказательство основной теоремы существенно опирается на следующий общий результат из [11, основная теорема] (см. также [6, теорема 1]), формулируемый здесь с потерей части информации и только для плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $u \in SH(\mathbb{C})$, M – непрерывная вещественнозначная функция на $\mathbb{C}$. Если существует постоянная C такая, что неравенство

$$\int_{\mathbb{C}} u d\nu \leq \int_{\mathbb{C}} M d\nu + C \quad (2.8)$$

выполнено для всех мер Йенсена ν в $\mathbb{C}$, то найдется функция $v \in SH(\mathbb{C})$ такая, что

$$v(0) \neq -\infty \quad \text{и} \quad u(z) + v(z) \leq M(z) \quad \text{для всех} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.9)$$

Ниже предложению 2.2 придадим несколько иную форму (предложение 2.5), аналогичную [10, основная теорема] (см. также [14]).

Пусть ν – мера Йенсена в $\mathbb{C}$. *Потенциалом меры ν* будем называть функцию

$$V_{\nu}(\zeta) = \int_{\mathbb{C}} \log |z - \zeta| d\nu(z) - \log |\zeta|.$$

Субгармоническую в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функцию V называем *функцией Йенсена* в $\mathbb{C}$, если $V(\zeta) \geq 0$ при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, существует число $r > 0$ такое, что $V(\zeta) \equiv 0$ при $|\zeta| \geq r$ (*финитность* V) и справедливо соотношение $\limsup_{\zeta \rightarrow 0} V(\zeta)/(-\log |\zeta|) \leq 1$.

Доопределим функцию V нулем в бесконечности. Для субгармонической в $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0\}$ функции $V \geq 0$ по неравенству Харнака [12], примененному к гармоническому продолжению V во внешность круга $D(r)$, $r > 0$, для каждой точки ζ при $|\zeta| > r$ получаем необходимое в дальнейшем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. При любом $\zeta \neq 0$ и при всех $r > 0$, но $r < |\zeta|$, для произвольной функции Йенсена V выполнено неравенство

$$V(\zeta) \leq \frac{|\zeta| + r}{|\zeta| - r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(re^{i\theta}) d\theta. \quad (2.10)$$

Известно [10, предложения 1.5 и 4.1], [11, предложение 3.4], что построение потенциалов V_{ν} мер Йенсена ν в $\mathbb{C}$ осуществляет биекцию всех мер Йенсена в $\mathbb{C}$ на класс всех функций Йенсена в $\mathbb{C}$. При этом справедлива обобщенная формула Пуассона–Йенсена [10, предложение 1.4]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть μ – распределение масс субгармонической на $\mathbb{C}$ функции u_{μ} , $u_{\mu}(0) \neq -\infty$. Тогда для каждой меры Йенсена ν в $\mathbb{C}$ с потенциалом V_{ν} справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{C}} u_{\mu} d\nu = \int_{\mathbb{C}} V_{\nu} d\mu + u_{\mu}(0). \quad (2.11)$$

Применяя предложение 2.4 к левой части в (2.8), получаем ключевое для доказательства основной теоремы

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ и $0 \notin \text{supp } \mu$, M – непрерывная вещественнозначная функция на $\mathbb{C}$. Если существует постоянная C такая, что неравенство

$$\int_{\mathbb{C}} V_{\nu} d\mu \leq \int_{\mathbb{C}} M d\nu + C \quad (2.12)$$

выполнено для всех мер Йенсена ν в $\mathbb{C}$, то для любой функции $u = u_{\mu}$ с распределением масс Рисса μ найдется функция $v \in SH(\mathbb{C})$ такая, что выполнено (2.9).

2.5. Вспомогательные функции, связанные с $\varrho(t)$. Нам удобно ввести обозначения функции

$$\Psi(t) = t + \varrho(t), \quad t \in [a, +\infty), \quad (2.13)$$

для которой, начиная с a , выполнено

$$t < \Psi(t) < +\infty, \quad t \in [a, +\infty). \quad (2.14)$$

Кроме того, по определению (2.13) функции Ψ в силу условия (2.3) на $[b, +\infty)$ с $b > 0$ из (2.4) определена строго возрастающая непрерывная обратная функция

$$\Phi = \Psi^{-1}, \quad b = \Psi(a) = a + \varrho(a) > 0. \quad (2.15)$$

Для этой функции ввиду условий $a > 0$ и (2.14) выполнено

$$0 < \Phi(t) < t \text{ при всех } t \in [b, +\infty), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = +\infty. \quad (2.16)$$

Наконец, Φ – собственное отображение из $[b, +\infty)$ на $[a, +\infty)$, т.е. прообраз каждого компакта из $[a, +\infty)$ при отображении Φ – компакт в $[b, +\infty)$.

2.6. Доказательство основной теоремы. Из пп. 1 и 2 следует, что достаточно получить доказательство заключения [SH] в предположении

$$\text{supp } \mu \cap D(b) = \emptyset. \quad (2.17)$$

Зафиксируем произвольную меру Йенсена ν с потенциалом $V_{\nu} = V$ в $\mathbb{C}$, который является функцией Йенсена.

Из определения в (2.4) величины b и ввиду (2.16) для каждой точки ζ из $\mathbb{C} \setminus D(b)$ имеем $\Phi(|\zeta|) < |\zeta|$. Следовательно, по предложению 2.3, расписывая (2.10) при $r = \Phi(|\zeta|)$, получаем оценку

$$V(\zeta) \leq \frac{|\zeta| + \Phi(|\zeta|)}{|\zeta| - \Phi(|\zeta|)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\Phi(|\zeta|)e^{i\theta}) d\theta \quad |\zeta| \geq b.$$

Отсюда, интегрируя по положительной мере μ , с учетом (2.17) и финитности V имеем

$$\int V d\mu \leq \int_{|\zeta| \geq b} \left(\frac{|\zeta| + \Phi(|\zeta|)}{|\zeta| - \Phi(|\zeta|)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\Phi(|\zeta|)e^{i\theta}) d\theta \right) d\mu(\zeta). \quad (2.18)$$

Правую часть здесь можно рассматривать как действие распространенного по стандартной схеме [12] на полунепрерывную сверху вне нуля финитную функцию V

некоторого линейного непрерывного функционала (меры Радона) λ на пространстве $C_0(\mathbb{C} \setminus D(a))$ финитных непрерывных функций на $\mathbb{C} \setminus D(a)$, определенного по правилу

$$\lambda(f) = \int_b^{+\infty} \left(\frac{t + \Phi(t)}{t - \Phi(t)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\Phi(t)e^{i\theta}) d\theta \right) d\mu(t) \quad (2.19)$$

на всех $f \in C_0(\mathbb{C} \setminus D(a))$. Другими словами, мера λ получена из меры $d\mu(t)$, заданной на $[b, +\infty)$, как композиция трех преобразований: сначала умножение ее на непрерывную функцию $(t + \Phi(t))/(t - \Phi(t))$ (см. [1, с. 590]), затем образ на $[a, +\infty)$ полученной меры при непрерывном собственном (см. п. 5 выше и [1, с. 618]) отображении $t \rightarrow \Phi(t)$ из $[b, +\infty)$ на $[a, +\infty)$ и, наконец, тензорное произведение с мерой $\frac{1}{2\pi} d\theta$ (см. [1, с. 657]). По построению мера λ , рассматриваемая уже как функция множеств, определена на $\mathbb{C} \setminus D(a)$ и после продолжения нулем на $D(a)$ радиальна на $\mathbb{C}$. При этом неравенство (2.18) можно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{C}} V d\mu \leq \int_{\mathbb{C}} V d\lambda. \quad (2.20)$$

В п. 3 отмечено, что построенная по (2.2) функция $N_\lambda(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, — субгармоническая с распределением масс Рисса λ и при этом $N_\lambda(|z|) \equiv 0$ при $z \in D(a)$, поскольку по построению $\text{supp } \lambda \cap D(a) = \emptyset$. Тогда по обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (2.11) из предложения 2.4, примененной к паре λ и N_λ и мере Йенсена ν с потенциалом $V_\nu = V$, получаем равенство $\int_{\mathbb{C}} V d\lambda = \int_{\mathbb{C}} N_\lambda(|z|) d\nu(z)$. Отсюда и из (2.20) следует

$$\int_{\mathbb{C}} V_\nu d\mu \leq \int_{\mathbb{C}} N_\lambda(|z|) d\nu(z). \quad (2.21)$$

В начале доказательства фиксировалась *произвольная* мера Йенсена ν ; следовательно, равномерная по ν оценка (2.21) справедлива для всех мер Йенсена ν в $\mathbb{C}$. Кроме того, функция $N_\lambda(|z|)$ непрерывна в силу вида ее определения (2.2). Таким образом, выполнено условие (2.12) предложения 2.5 с функцией $M(z) = N_\lambda(|z|)$ и постоянной $C = 0$. Следовательно, можем заключить, что для любой субгармонической функции u_μ с распределением масс Рисса μ найдется функция $v \in SH(\mathbb{C})$, $v(0) \neq -\infty$, с которой справедливо неравенство

$$u_\mu(z) + v(z) \leq N_\lambda(|z|), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.22)$$

Для завершения доказательства необходимо вычислить функцию $N_\lambda(|z|)$, которая в итоге (2.24) совпадет с двойным интегралом в правой части (2.4).

Через $\chi_{D(x)}$ и $\chi_{[0,x)}$ обозначаем *характеристические функции* соответственно круга $D(x)$ в $\mathbb{C}$ и интервала $[0, x)$ в $\mathbb{R}$:

$$\chi_{D(x)}(te^{i\theta}) = \chi_{[0,x)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t < x, \\ 0, & \text{если } t \geq x. \end{cases} \quad (2.23)$$

С этим обозначением согласно (2.19) имеем

$$\lambda(x) = \lambda(\chi_{D(x)}) = \int_b^{+\infty} \left(\frac{t + \Phi(t)}{t - \Phi(t)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{D(x)}(\Phi(t)e^{i\theta}) d\theta \right) d\mu(t).$$

Характеристическая функция $\chi_{D(x)}(\Phi(t)e^{i\theta})$ из (2.23) не зависит от θ ; следовательно, последнее равенство можно записать в виде

$$\lambda(x) = \int_b^{+\infty} \frac{t + \Phi(t)}{t - \Phi(t)} \cdot \chi_{[0,x)}(\Phi(t)) d\mu(t).$$

Замена переменной $\tau = \Phi(t)$ в последнем интеграле, т.е. $t = \Psi(\tau)$ ввиду (2.15), и где согласно (2.16) и (2.14) имеем $\tau \in [a, +\infty)$, дает

$$\lambda(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\Psi(\tau) + \tau}{\Psi(\tau) - \tau} \cdot \chi_{[0,x)}(\tau) d\mu(\Psi(\tau)).$$

Отсюда по определению (2.23) характеристической функции $\chi_{[0,x)}$ и функции Ψ в (2.13) после замены τ на t имеем

$$\lambda(x) = \int_a^x \frac{\varrho(t) + 2t}{\varrho(t)} d\mu(t + \varrho(t)).$$

Исходя из последнего тождества, определение (2.2) функции N_λ можно переписать в виде

$$N_\lambda(r) = \int_0^r \lambda(x) \frac{dx}{x} = \int_0^r \int_a^x \frac{\varrho(t) + 2t}{\varrho(t)} d\mu(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x}. \quad (2.24)$$

Последнее вместе с (2.22) дает требуемое неравенство (2.4) при условии (2.17), т.е. при $\mu(b) = 0$. Таким образом, с учетом пп. 2.1, 2.2 основная теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Сначала нам потребуется оценка двойного интеграла в правой части (2.5) при специальном выборе функции $\varrho(r)$ через функцию $\varepsilon(r)$ из условия теоремы 1. При этом для двойного интеграла в (2.5) используем обозначение $\Pi_a(\cdot; \mu, \varrho)$, $r > a$, из (2.6).

3.1. Выбор функций $\varrho(r)$ и $\sigma(r)$ и подготовительные оценки. Для функции $\varepsilon(r) > 0$ из условия (1.10) теоремы 1 следует соотношение

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} (r\varepsilon(r))' \geq \liminf_{r \rightarrow +\infty} r\varepsilon'(r) > -\infty.$$

Таким образом, можно выбрать число $a > 0$ так, что $(r\varepsilon(r))' \geq -C$ с некоторым положительным числом C при всех $r \geq a$. Исходя из этого можно подобрать число $\alpha > 0$ столь малое, что

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{3}, \quad \alpha\varepsilon(a) \leq 1, \quad \alpha(r\varepsilon(r))' \geq -\alpha C \geq -\frac{1}{2} \quad \text{при всех } r \geq a. \quad (3.1)$$

Положим

$$\varrho(r) = \alpha \cdot r\varepsilon(r), \quad r \geq a. \quad (3.2)$$

Тогда условия на функцию $\varepsilon(r)$ переходят в следующие свойства функции $\varrho(r)$.

ЛЕММА 3.1. *Выбранная по (3.2) функция $\varrho(r)$ дифференцируема на $[a, +\infty)$ и такова, что функция $r/\varrho(r)$ возрастающая,*

$$\varrho'(r) \geq -\frac{1}{2}, \quad r \geq a, \quad (3.3)$$

функция $r + \varrho(r)$ строго возрастает на $[a, +\infty)$, а также справедливы соотношения

$$\varrho(r) \leq r \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{\varrho(r + \varrho(r))}{\varrho(r)} \leq 2 \quad \text{при всех } r \geq a. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Доказательства требует только (3.4). Из определения (3.2) функции $\varrho(r)$ и убывания функции $\varepsilon(r)$ ввиду второго неравенства в (3.1) получаем $\varrho(r) \leq \alpha \varepsilon(a)r \leq r$, и первое неравенство в (3.4) доказано. Тогда

$$\varrho(r + \varrho(r)) = \alpha \cdot (r + \varrho(r)) \cdot \varepsilon(r + \varrho(r)) \leq \alpha \cdot 2r \cdot \varepsilon(r) = 2\varrho(r)$$

и доказана верхняя оценка в последнем соотношении из (3.4).

Наконец, из теоремы о конечных приращениях для некоторой точки r^* из отрезка $[r, r + \varrho(r)]$ и из (3.3) имеем

$$\varrho(r + \varrho(r)) = \varrho(r) + \varrho'(r^*)\varrho(r) \geq \varrho(r) - \frac{1}{2}\varrho(r) = \frac{1}{2}\varrho(r).$$

ЛЕММА 3.2. *Пусть функция $\varrho(r)$ выбрана как в (3.2). Положим*

$$\sigma(r) \equiv \varrho(r), \quad r \in [a, +\infty). \quad (3.5)$$

Тогда для двойного интеграла в (2.5) при таком выборе функций $\varrho(r)$ и $\sigma(r)$ в обозначении (2.6) справедлива оценка

$$\Pi_a(r + \sigma(r); \mu, \varrho) \leq \frac{48}{\alpha} \cdot \frac{1}{\varepsilon(r)} N_\mu(r + \varepsilon(r)r), \quad r \geq a. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Из леммы 3.1 по первому неравенству в (3.4) и ввиду возрастания $t/\varrho(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \Pi_a(r + \sigma(r); \mu, \varrho) &\leq \int_a^{r+\varrho(r)} \int_a^x \frac{3t}{\varrho(t)} d\mu(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x} \\ &\leq 3 \cdot \frac{r + \varrho(r)}{\varrho(r + \varrho(r))} \int_a^{r+\varrho(r)} \mu(x + \varrho(x)) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя первое неравенство и нижнюю оценку для $\varrho(r + \varrho(r))$ из (3.4), получаем

$$\Pi_a(r + \sigma(r); \mu, \varrho) \leq 12 \cdot \frac{r}{\varrho(r)} \int_a^{r+\varrho(r)} \mu(x + \varrho(x)) \frac{dx}{x}. \quad (3.7)$$

Для последнего интеграла из представления

$$\int_a^{r+\varrho(r)} \mu(x + \varrho(x)) \frac{dx}{x} = \int_a^{r+\varrho(r)} \frac{\mu(x + \varrho(x))}{x + \varrho(x)} \cdot \frac{x + \varrho(x)}{x} \frac{d(x + \varrho(x))}{(x + \varrho(x))'}$$

ввиду (3.3) и (3.4) следует

$$\int_a^{r+\varrho(r)} \mu(x + \varrho(x)) \frac{dx}{x} \leq 4 \int_a^{r+\varrho(r)} \frac{\mu(x + \varrho(x))}{x + \varrho(x)} d(x + \varrho(x)).$$

Отсюда после замены $t = x + \varrho(x)$ с $b = a + \varrho(a) > a$, как в (2.4), получаем

$$\int_a^{r+\varrho(r)} \mu(x + \varrho(x)) \frac{dx}{x} \leq 4 \int_b^{r+\varrho(r)+\varrho(r+\varrho(r))} \frac{\mu(t)}{t} dt.$$

Применение последнего соотношения из (3.4) к верхнему пределу интегрирования в последнем интеграле ввиду $b > a$ влечет

$$\int_a^{r+\varrho(r)} \mu(x + \varrho(x)) \frac{dx}{x} \leq 4 \int_0^{r+3\varrho(r)} \mu(t) \frac{dt}{t} = 4N_\mu(r + 3\varrho(r)).$$

Последнее вместе с (3.7) согласно выбору $\varrho(r)$ в (3.2) и $\alpha \leq 1/3$ в (3.2) дает

$$\Pi_\alpha(r + \sigma(r); \mu, \varrho) \leq \frac{48}{\alpha} \cdot \frac{1}{\varepsilon(r)} N_\mu(r + 3\varrho(r)) \leq \frac{48}{\alpha} \cdot \frac{1}{\varepsilon(r)} N_\mu(r + r\varepsilon(r)), \quad (3.8)$$

что и требовалось в (3.6).

Для оценки логарифмических добавок в правой части (2.5) потребуются простая

ЛЕММА 3.3. Пусть μ – ненулевая мера, а функция $\varrho(r)$ и равная ей $\sigma(r)$ выбраны как в (3.2) и (3.5). Тогда

$$\log(1 + r) = O(N_\mu(r)), \quad \log\left(1 + \frac{1}{\sigma(r)}\right) = O\left(\frac{1}{\varepsilon(r)} N_\mu(r)\right), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3.9)$$

Лемма 3.3 очевидным образом следует из того, что для ненулевой меры μ характеристика $N_\mu(r)$ растет не медленнее функции $\log(1 + r)$.

3.2. Доказательство теоремы 1. Обе части теоремы выводятся ниже из основной теоремы одновременно. Для первой части теоремы 1 рассмотрим какую-либо целую функцию f_Λ с последовательностью нулей в точности Λ , т.е. $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$, $0 \notin \Lambda$, $f(0) \neq 0$.

Для $F \in \text{Mer}(\mathbb{C})$, $F(0) \neq \infty$, пусть $F = g_F/h_F$ – представление функции в виде частного двух целых функций g_F и h_F , не имеющих общих нулей, $h_F(0) \neq 0$. Тогда характеристику Неванлинны $T_F(r)$ можно определить (см. [2, после теоремы 4.1]) и как интеграл

$$T_F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^F(re^{i\theta}) d\theta, \quad u^F(z) = \max\{\log |g_F(z)|, \log |h_F(z)|\}. \quad (3.10)$$

Полагаем

$$u(z) = \begin{cases} \log |f_\Lambda(z)| & \text{для первой части,} \\ u^F(z) & \text{для второй части.} \end{cases}$$

По построению u – субгармоническая функция. Пусть $\mu = \mu_u$ – распределение масс Рисса этой функции. В силу принятых соглашений $0 \notin \Lambda$ и $F(0) \neq \infty$ имеем $u(0) \neq -\infty$. Тогда в первом случае $\mu = \Lambda$, а во втором по формуле Пуассона–Йенсена ввиду (3.10)

$$T_F(r) = N_\mu(r) + u(0). \quad (3.11)$$

Не умаляя общности, можно считать, что μ – ненулевая мера (в противном случае можно было сразу выбрать f_Λ , g_F и h_F тождественными постоянными).

Применяя основную теорему к мере μ и функции u с функциями $\varrho(r)$ и $\sigma(r)$, построенными по функции $\varepsilon(r)$ в (3.2) и (3.5), из заключительной оценки (2.5) по леммам 3.2 и 3.3 получаем

$$u(z) + \log |q(z)| = O\left(\frac{1}{\varepsilon(r)} N_\mu(r + \varepsilon(r)r)\right),$$

где $q \neq 0$. Отсюда заключение (1.11) первой части теоремы 1 выполнено для $f = f_\Lambda q \neq 0$, а второй, т.е. (1.12), – для пары целых функций $g = g_F q$ и $h = h_F q$, если взглянуть на (3.10) и (3.11).

Теорема 1 доказана.

3.3. Заключительный комментарий о функциях в единичном круге. Основная теорема как в части формулировки, так и в части доказательства (используются меры и функции Йенсена в круге [11], неравенство Харнака из предложения 2.3 и решение Хёрмандера $\bar{\partial}$ -задачи [6, лемма 2.2]) дословно и с теми же оценками (2.4) и (2.5) переносится на меры и функции в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$. Естественные изменения касаются только областей определения и значения функций. Конкретнее, положительную меру μ надо предполагать заданной в круге $\mathbb{D}$; вместо $a > 0$ следует писать $0 < a < 1$; субгармонические в $\mathbb{C}$ функции $u = u_\mu$ и $v \neq -\infty$ заменить на субгармонические в $\mathbb{D}$; целую функцию q – на голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию $q \neq 0$; за область определения функций $\varrho(r)$ и $\sigma(r)$ (и вообще вместо $[a, +\infty)$) необходимо принять интервал $[a, 1)$ и дополнительно наложить на них очевидные требования $\varrho(r) < 1 - r$, $\sigma(r) < 1 - r$, $r \in [a, 1)$; в [SH] и в [H] в (2.4) и (2.5) добавить $r < 1$. После этого из оценки (2.5), $a < r < 1$, выбирая $\varrho(r) \equiv \sigma(r) \equiv \alpha \varepsilon(r)$ с достаточно малым числом $\alpha > 0$ и используя простые оценки вкупе с интегрированием по частям, без особых технических осложнений выводится следующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varepsilon(r) > 0$ – убывающая выпуклая дифференцируемая функция в некоторой левой окрестности 1 такая, что $\varepsilon(r) < 1 - r$ при $r < 1$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность точек в $\mathbb{D}$. Тогда существует голоморфная в $\mathbb{D}$ функция $f \neq 0$, $f(\Lambda) = 0$, такая, что $\log^+ M_f(r) = O(N_\Lambda(r + \varepsilon(r))/\varepsilon(r))$, $r \rightarrow 1 - 0$.

Пусть F – мероморфная функция в $\mathbb{D}$. Тогда существует представление $F = g/h$ в виде частного голоморфных в $\mathbb{D}$ функций g и h таких, что

$$\log^+ \max\{M_g(r), M_h(r)\} = O\left(\frac{T_F(r + \varepsilon(r))}{\varepsilon(r)}\right), \quad r \rightarrow 1 - 0.$$

Этот результат вполне вписывается в данное Ф. А. Шамояном [15] описание нулевых множеств в пространствах голоморфных в $\mathbb{D}$ функций, быстро растущих у границы $\mathbb{D}$. Но он мало содержателен в случае умеренного “степенного” или медленного “логарифмического роста” логарифмов модулей функций вблизи границы $\mathbb{D}$ (см., к примеру, обзор [16]), поскольку в этом случае требуется привлечение характеристик более тонких, чем N_Δ и T_F . В то же время и в доказательстве прямого аналога основной теоремы для круга остается ощущение недосказанности, связанное с использованием неравенства Харнака во внешности круга для функций Йенсена. В таком варианте неравенство Харнака из предложения 2.3 не учитывает то, что носители функций и мер Йенсена сосредоточены внутри $\mathbb{D}$. Возможно, для круга более уместно и продуктивно использование оценок функций Йенсена в кольце с внешней единичной окружностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шварц Л. Анализ. Т. I. М.: Наука, 1967.
- [2] Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
- [3] Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France. 1968. V. 96. P. 53–96.
- [4] Miles J. B. Quotient representations of meromorphic functions // J. Analyse Math. 1972. V. 25. P. 371–388.
- [5] Rubel L. A. Entire and Meromorphic Functions. New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
- [6] Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 1. С. 129–146.
- [7] Skoda H. Croissance des fonctions entières s'annulant sur une hypersurface donnée de $\mathbb{C}^n$ // Seminaire P. Lelong 1970–71. Lecture Notes in Math. V. 275. Springer-Verlag, 1972. P. 82–105.
- [8] Stoll W. Value Distribution Theory for Meromorphic Maps. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft GmbH, 1985.
- [9] Taylor B. A. Some locally convex spaces of entire functions // Proc. Symp. Pure Math. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1968. P. 431–467.
- [10] Хабибуллин Б. Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 5. С. 1101–1123.
- [11] Khabibullin B. N. Dual approach to certain questions for the weighted spaces of holomorphic functions // Proc. Israel Math. Conf. “Entire Functions in Modern Analysis”. Tel-Aviv, 1997.
- [12] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
- [13] Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989.
- [14] Koosis P. Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Montréal: Publ. CRM, 1996.
- [15] Шамоян Ф. А. О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы // Изв. АН АрмССР. Матем. 1983. Т. 18. № 1. С. 15–27.
- [16] Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1985. С. 3–124.