Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Хабилов, Винтовые движения в газовой динамике с давлением и плотностью, зависящими только от времени, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 133–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 07:25:50

ВИНТОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ С ДАВЛЕНИЕМ И ПЛОТНОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩИМИ ТОЛЬКО ОТ ВРЕМЕНИ

С. В. Хабиров

Постоянное решение системы уравнений газовой динамики является простейшим решением, которое используется для предварительного математического анализа квазилинейной системы (характеристики на постоянном решении, траектории, линеаризация и т.д.). Преимущество этого решения заключается в том, что оно зависит от пяти произвольных постоянных (столько же неизвестных функций, т.е. можно поставить начальную задачу в точке), а также в том, что оно определено на всем пространстве и для всех времен.

Инвариантные решения уравнений газовой динамики задаются квазилинейной системой с меньшим числом независимых переменных [1]. Эти системы не допускают постоянного решения. Вопрос выбора простого решения для таких систем всегда возникает. При этом требование зависимости от пяти произвольных постоянных является разумным, а область определения такого решения может не совпадать со всем пространством. Критерий простоты решения заключается в возможности явного построения характеристик, траекторий, постановки начальной задачи в точке общего положения.

В статье предлагается выбирать простые решения из множества решений с давлением и плотностью, зависящими только от времени.

Вычисления проводятся для винтовых движений, которые являются инвариантными решениями относительно одномерной подалгебры $X = \partial_x + \partial_\theta$, допускаемой уравнениями газовой динамики [1]

$$\begin{aligned}U_t + UU_x + VU_r + Wr^{-1}U_\theta + \rho^{-1}p_x &= 0, \\V_t + UV_x + VV_r + Wr^{-1}V_\theta + \rho^{-1}p_r &= r^{-1}W^2,\end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-013-17326.

$$\begin{aligned}
W_t + UW_x + VW_r + Wr^{-1}W_\theta + \rho^{-1}r^{-1}p_\theta &= -r^{-1}VW, \\
\rho_t + U\rho_x + V\rho_r + Wr^{-1}\rho_\theta + \rho(U_x + V_r + r^{-1}W_\theta + r^{-1}V) &= 0, \\
p_t + Up_x + Vp_r + Wr^{-1}p_\theta & \\
+ A(\rho, p)(U_x + V_r + r^{-1}W_\theta + r^{-1}V) &= 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где введена цилиндрическая система координат, ρ – плотность, p – давление; U, V, W – координаты скорости; $A = \rho c^2$, $c^2 = \partial p / \partial \rho$ – скорость звука, $p = p(\rho, S)$ – уравнение состояния газа, S – энтропия.

Система винтовых движений записывается с помощью инвариантов оператора X . Вид решения таков:

$$\begin{aligned}
U &= v(t, y, r) + r^{-1}w(t, y, r), \quad V = u(t, y, r), \quad W = w(t, y, r), \\
\rho &= \rho(t, y, r), \quad p = p(t, y, r), \quad y = x - \theta.
\end{aligned} \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}
u_t + uu_r + vu_y + \rho^{-1}p_r &= r^{-1}w^2, \\
v_t + uv_r + vv_y + (1 + r^{-2})\rho^{-1}p_y &= 2r^{-2}uw, \\
w_t + uw_r + vw_y - r^{-1}\rho^{-1}p_y &= -r^{-1}uw, \\
\rho_t + u\rho_r + v\rho_y + \rho(u_r + v_y + r^{-1}u) &= 0, \\
p_t + up_r + vp_y + A(u_r + v_y + r^{-1}u) &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Пусть $\rho = \rho(t)$, $p = p(t)$. Тогда из последних двух уравнений системы (3) следует уравнение для определения функции $p(t)$

$$A dp = \rho dp, \tag{4}$$

а остальные уравнения образуют переопределенную систему

$$\begin{aligned}
u_t + uu_r + vu_y &= r^{-1}w^2, \quad v_t + uv_r + vv_y = 2r^{-2}uw, \\
w_t + uw_r + vw_y &= -r^{-1}uw, \quad u_r + v_y + r^{-1}u + \rho^{-1}\rho' = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Дифференцирование по t последнего равенства в (5) приводит к уравнению первого порядка

$$\begin{aligned}
u_r^2 + v_ru_y + (u_r + r^{-1}u)(\rho^{-1}\rho' + r^{-1}u) & \\
= \frac{1}{2}\rho^{-1}\rho'' + \rho'^2\rho^{-2} + r^{-2}(uw_y + wu_y) + r^{-1}ww_r &= 0.
\end{aligned}$$

Дальнейшее дифференцирование приводит к уравнениям второго порядка. До конца этот процесс приведения системы (5) в инволюцию не сделан. Вместо него сначала уравнения (5) частично интегрируются в лагранжевой системе координат, далее наводится эквивалентность между

решениями и с точностью до эквивалентности перечисляются все решения, допускающие лагранжеву замену.

Система (5) наследует симметрии основной системы (1). Они образуют факторалгебру нормализатора оператора X по X [2, с. 269]:

$$\partial_t, \partial_y, t\partial_y + \partial_v. \quad (6)$$

Кроме этих операторов система (5) допускает растяжения:

$$r\partial_r + u\partial_u + w\partial_w, \rho\partial_\rho. \quad (7)$$

Операторы (7), (6) образуют алгебру Ли.

Полная допускаемая алгебра не может быть вычислена до тех пор, пока система (5) не будет приведена в инволюцию.

Переход к лагранжевой системе координат задается решением задачи с начальными данными для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dt} = u(t, r, y), \quad \frac{dy}{dt} = v(t, r, y); \quad (8)$$

$$r = \xi, \quad y = \eta \quad \text{при} \quad t = t_0. \quad (9)$$

Так как (5) допускает оператор ∂_t , то можно считать, что $t_0 = 0$, при этом начальные данные изменятся, но их можно переобозначить.

Решение задачи (8), (9) $r = r(t, \xi, \eta)$, $y = y(t, \xi, \eta)$ задает однопараметрическое семейство преобразований от лагранжевых переменных ξ, η к переменным r, y при условии $r_\xi y_\eta - r_\eta y_\xi \neq 0$.

Если для функции $f(t, r, y)$ рассмотреть функцию $\tilde{f}(t, \xi, \eta) = f(t, r(t, \xi, \eta), y(t, \xi, \eta))$, то первые три уравнения системы (5) и уравнения (8) примут вид:

$$\tilde{u}_t = r^{-1}\tilde{w}^2, \quad \tilde{v}_t = 2r^{-2}\tilde{u}\tilde{w}, \quad \tilde{w}_t = -r^{-1}\tilde{u}\tilde{w}, \quad r_t = \tilde{u}, \quad y_t = \tilde{v}. \quad (10)$$

Эти уравнения интегрируются:

$$r^2 = \xi^2 + \alpha^2 t^2 + 2\alpha_1 t, \quad y = \eta + \beta t - \arctg[2\gamma(\alpha_1 t + \xi^2)^{-1}], \quad (11)$$

$$\alpha^2 \xi^2 = \gamma^2 + \alpha_1^2, \quad (12)$$

$$\tilde{u} = r^{-1}(\alpha^2 t + \alpha_1), \quad \tilde{v} = \beta - \gamma r^{-2}, \quad \tilde{w} = \gamma r^{-1}. \quad (13)$$

Здесь величины $\alpha \neq 0$, $\alpha_1, \gamma \neq 0$, β зависят от $\xi \neq 0, \eta$, а также учитываются начальные данные (9).

Последнее уравнение системы (5), записанное в лагранжевых переменных, интегрируется по t (условия (9)) не учитываются):

$$r(r_\xi y_\eta - r_\eta y_\xi) = \rho^{-1}J(\xi, \eta). \quad (14)$$

Если (11) подставить в (14), то определится вид функции

$$\rho(t) = (S_2 t^2 + S_1 t + S_0)(T_5 t^5 + T_4 t^4 + T_3 t^3 + T_2 t^2 + T_1 t + T_0)^{-1},$$

при этом получится равенство, в котором переменная t будет свободной. Приравнивание нулю коэффициентов при различных степенях переменной t дает восемь уравнений для функций $\alpha, \alpha_1, \beta, J$ и постоянных S_i, T_i . В множестве возможных решений этой системы можно ввести эквивалентность с помощью преобразований, допускаемых системой (5). Операторы (7), (6) задают преобразования (преобразования инвариантных переменных не записываются):

$$\begin{aligned} 1) \ t' &= t + t_0; \quad 2) \ y' = y + y_0; \quad 3) \ r' = ar, \ u' = au, \ w' = aw; \\ 4) \ \rho' &= b\rho; \quad 5) \ y' = y + ct, \ v' = v + c. \end{aligned}$$

Параметры преобразований t_0, y_0, a, b, c можно считать функциями ξ, η . При этих преобразованиях начальные данные (9) изменяются.

Преобразования 1)–5) продолжаются на коэффициенты решения (11) и уравнения (14):

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha a^{-1}, \quad \alpha'_1 = \alpha^2 a^{-2} t_0 + \alpha_1 a^{-2}, \quad \gamma' = \gamma a^{-2}, \quad \beta' = \beta - c, \\ J' &= J a^{-1}, \quad \xi'^2 = \xi^2 a^{-2} + (\alpha t_0 a^{-1})^2 + 2t_0 \alpha_1 a^{-2}, \\ \eta' &= \eta - y_0 + (\beta - c)t_0 - \arctg[\gamma t_0(\alpha_1 t_0 + \xi^2)]; \end{aligned}$$

при этом равенство (12) остается инвариантным.

Эти преобразования образуют группу Ли G_5 , алгебра Ли которой задается базисом операторов

$$\partial_\eta, \partial_\beta, J\partial_J, \alpha^2\partial_{\alpha_1} + \alpha_1\xi^{-1}\partial_\xi + (\beta - \gamma\xi^{-2})\partial_\eta, \alpha\partial_\alpha + 2\alpha_1\partial_{\alpha_1} + \partial_\xi + 2\gamma\partial_\gamma.$$

Инварианты группы G_5 таковы:

$$I = \gamma\alpha^{-2}, \quad \gamma^{-2}(\alpha_1^2 + \alpha^2\xi^2) = -1.$$

Значение второго инварианта взято в силу равенства (12). Вводится новый параметр $\zeta = \alpha_1\alpha^{-2}$, а параметры решения (11) выражаются через инварианты $\gamma = I\alpha^2, \xi^2 = I^2\alpha^2 + \alpha_1^2\alpha^{-2}$:

$$r = \alpha^2[I^2 + (t + \zeta)^2], \quad y = \eta + \beta t - \arctg[It(\zeta t + \zeta^2 + I^2)^{-1}], \quad (15)$$

$$u = \alpha^2 r^{-1}(t + \zeta), \quad v = \beta - I\alpha^2 r^{-2}, \quad w = I\alpha^2 r^{-1}. \quad (16)$$

Преобразования эквивалентности неинвариантных параметров принимают вид

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha a^{-1}, \quad \zeta' = \zeta + t_0 \alpha^{-1}, \quad \beta' = \beta - c, \\ \eta' &= \eta - y_0 + (\beta - c)t_0 - \arctg[I t_0 (\zeta t_0 + \zeta^2 + I^2)^{-1}].\end{aligned}\quad (17)$$

В пространстве параметров $\alpha, \zeta, \beta, \eta$ группа действует транзитивно, поэтому любые значения параметров можно получить из фиксированных значений, например, $\alpha = 1, \zeta = \beta = \eta = 0$.

Для того чтобы формулы (15) задавали переход к лагранжевой системе координат, не все параметры $I, \alpha, \zeta, \beta, \eta$ должны быть фиксированными. Если I не фиксированный параметр, то можно с помощью преобразования (17) фиксировать три параметра из четырех $\alpha, \zeta, \beta, \eta$. Это можно сделать следующими четырьмя способами.

Случай $\zeta = \beta = \eta = 0$.

$$\begin{aligned}(15) &\implies r^2 = \alpha^2(I^2 + t^2), \quad y = -\arctg(tI^{-1}); \\ (14) &\implies \rho = t^{-1}, \quad J = \alpha_\xi I_\eta - \alpha_\eta I_\xi; \\ (16) &\implies u = rt^{-1} \sin^2 y, \quad v = t^{-1} \sin y \cos y, \\ &\quad w = -rt^{-1} \sin y \cos y.\end{aligned}\quad (18)$$

Случай $\alpha = 1, \beta = \eta = 0$.

$$\begin{aligned}(15), (16) &\implies r^2 = I^2 + (t + \zeta)^2, \quad y = -\arctg[I t (\zeta t + \zeta^2 + I^2)^{-1}], \\ &\quad u = r^{-1}(t + \zeta), \quad v = -Ir^{-2}, \quad w = Ir^{-1},\end{aligned}$$

или, используя перенос ∂_t ,

$$\begin{aligned}r^2 &= I^2 + t^2, \quad \operatorname{tg} y = -I(t - \zeta)(\zeta t + I^2)^{-1}, \\ u &= tr^{-1}, \quad v = -Ir^{-2}, \quad w = Ir^{-1}; \\ (14) &\implies \rho = 1, \quad J = I_\xi \zeta_\eta - I_\eta \zeta_\xi, \quad u = tr^{-1}, \\ &\quad v = -r^{-2}(r^2 - t^2)^{1/2}, \quad w = r^{-1}(r^2 - t^2)^{1/2}.\end{aligned}\quad (19)$$

Случай $\alpha = 1, \xi = \eta = 0$.

$$\begin{aligned}(15) &\implies r^2 = I^2 + t^2, \quad y = \beta t - \arctg(tI^{-1}); \\ (14) &\implies \rho = t^{-1}, \quad J = I(I_\xi \beta_\eta - I_\eta \beta_\xi); \\ (16) &\implies u = tr^{-1}, \quad w = r^{-1}(r^2 - t^2)^{-1}, \\ &\quad v = yt^{-1} - r^{-2}(r^2 - t^2)^{1/2} + t^{-1} \arctg[t(r^2 - t^2)^{-1/2}].\end{aligned}\quad (20)$$

Случай $\alpha = 1, \xi = \beta = 0$.

$$(15) \implies r^2 = I^2 + t^2, \quad y = f - \arctg(tI^{-1});$$

$$(14) \implies J = I(I_\xi f_\eta - I_\eta f_\xi), \quad \rho = 1;$$

$$(16) \implies (19).$$

Пусть теперь величина I есть фиксированная функция параметров $\alpha, \beta, \zeta, \eta$. Тогда из четырех параметров $\alpha, \zeta, \beta, \eta$ только два можно фиксировать.

Случай $\alpha = 1, \zeta = 0, I = I(\beta, f)$.

$$(15) \implies r^2 = I^2 + t^2, \quad y = f + \beta t - \arctg(tI^{-1});$$

$$(14) \implies \rho = (T_1 t + T_0)^{-1}, \quad I = I(T_0 \beta - T_1 f),$$

$$J = II'(\beta_\xi f_\eta - \beta_\eta f_\xi);$$

$$(16) \implies u = tr^{-1}, \quad w = r^{-1}(r^2 - t^2)^{1/2},$$

$$v = -r^{-2}(r^2 - t^2)^{1/2} + (T_1 t + T_0)^{-1} \\ \times [T_1 y + T_1 \arctg[t(r^2 - t^2)^{-1/2} + g(r^2 - t^2)],$$

где $g(s)$ – функция обратная к произвольной функции $I^2(s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Величина I выражается через произвольную функцию, поэтому ее можно взять в качестве независимого параметра и тем самым привести решение к ранее полученным формулам. Это замечание относится к тем случаям, когда I определяется с функциональным произволом.

Случай $\alpha = 1, \beta = 0, I = I(\zeta, f)$.

$$(15) \implies r^2 = I^2 + (t + \zeta)^2, \quad y = f - \arctg[It(\zeta t + \zeta^2 + I^2)^{-1}];$$

$$(14) \implies \rho = (T_1 t + T_0)^{-1}, \quad T_0 J = (II_\zeta + \zeta)(\zeta_\xi f_\eta - \zeta_\eta f_\xi),$$

$$T_1 II_\zeta + T_0 \zeta(I^2 + \zeta^2)^{-1} I_f = T_0 - T_1 \zeta.$$

Отсюда следует равенство для определения $\zeta = \zeta(t, r, y)$:

$$g(K) = y + \arctg[t(r^2 - (t + \zeta)^2)^{1/2}(r^2 - t^2 - \zeta t)^{-1}] \\ + T_0 T_1^{1/2} \int (K + 2T_0 \zeta(K + 2T_0 \zeta - T_1 \zeta^2)^{1/2})^{-1} \zeta d\zeta,$$

где $K = T_1(r^2 - t^2 - 2t\zeta) - 2T_0\zeta$, $g(K)$ – произвольная функция.

$$(16) \implies u = r^{-1}(t + \zeta), \quad v = -r^{-2}(r^2 - (t + \zeta)^2)^{1/2},$$

$$w = r^{-1}(r^2 - (t + \zeta)^2)^{1/2}.$$

Величина I определяется с функциональным произволом.

Случай $\alpha = 1, \eta = 0, I = I(\beta, \zeta)$.

$$(15) \implies r^2 = I^2 + (t + \zeta)^2, \quad y = \beta t - \arctg[It(\zeta t + \zeta^2 + I^2)^{-1}];$$

$$(14) \implies \rho = t^{-1}(t + T_0)^{-1}, \quad J = \zeta_\xi \beta_\eta - \zeta_\eta \beta_\xi,$$

$$II_\zeta - \zeta(I^2 + \zeta^2)^{-1}I_\beta = T_0 - \zeta.$$

Отсюда следует равенство для определения $\zeta = \zeta(t, r, y)$:

$$\begin{aligned} g(R^2) = & yt^{-1} + \frac{1}{2}T_0^{-1} \arccos[R^{-1}(\zeta - T_0)] \\ & + t^{-1} \arctg[t(R^2 - (\zeta - T_0)^2)^{1/2}(R^2 + \zeta t + 2\zeta T_0 - T_0^2)^{-1}] \\ & + \frac{1}{2}R^{-1}T_0^{-2}(T_0 + R)^2 \\ & \times \arctg[(T_0 - R)(T_0 + R)^{-1}(R + T_0 - \zeta)^{1/2}(R - T_0 + \zeta)^{-1/2}], \end{aligned}$$

где $R^2 = r^2 - t^2 + T_0^2 - 2\zeta(t + T_0)$, $g(R^2)$ – произвольная функция.

$$\begin{aligned} (16) \implies u = & r^{-1}(t + \zeta), \quad w = r^{-1}(r^2 - (t + \zeta)^2)^{1/2}, \\ v = & yt^{-1} - r^{-2}(r^2 - (t + \zeta)^2)^{1/2} \\ & + t^{-1} \arctg[t(r^2 - (t + \zeta)^2)^{1/2}(r^2 - t\zeta - t^2)^{-1}]. \end{aligned}$$

Величина I определяется с функциональным произволом.

Случай $\zeta = \beta = 0, I = I(\alpha, f)$.

$$(15) \implies r^2 = \alpha^2(I^2 + t^2), \quad y = f - \arctg(tI^{-1});$$

$$(14) \implies \rho = (t^2 + T_0)^{-1}, \quad J = \alpha(\alpha_\xi f_\eta - \alpha_\eta f_\xi), \quad I^2 = T_0 - I_0\alpha^{-2},$$

где T_0, I_0 – постоянные.

$$\begin{aligned} (16) \implies u = & t(t^2 + T_0)^{-1}r^{-1}(r^2 + I_0), \\ v = & -r^{-2}(t^2 + T_0)^{-1}(r^2 + I_0)^{1/2}(T_0r^2 - I_0t^2)^{1/2}, \\ w = & r^{-1}(t^2 + T_0)^{-1}(r^2 + I_0)^{1/2}(T_0r^2 - I_0t^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Случай $\zeta = \eta = 0, I = I(\alpha, \beta)$.

$$(15) \implies r^2 = \alpha^2(I^2 + t^2), \quad y = \beta t - \arctg(tI^{-1});$$

$$\begin{aligned} (14) \implies \rho = & t^{-1}(t^2 + \tau^2)^{-1}, \quad J = \alpha(\alpha_\zeta \beta_\eta - \alpha_\eta \beta_\zeta), \\ & \alpha II_\alpha + I_\beta = \tau^2 - I^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство для определения $I = I(t, r, y)$:

$$\begin{aligned} (I - \tau)(I + \tau)^{-1} \exp[2\tau(yt^{-1} + t^{-1} \arctg(tI^{-1}))] \\ = g(r^2(I^2 - \tau^2)(I^2 + \tau^2)^{-1}), \end{aligned}$$

где $g(s)$ – произвольная функция, τ – постоянная.

$$(16) \Rightarrow u = \operatorname{tr}(I^2 + t^2)^{-1}, \quad w = \operatorname{Ir}(I^2 + t^2)^{-1}, \\ v = yt^{-1} + t^{-1} \operatorname{arctg}(tI^{-1}) - I(I^2 + t^2)^{-1}.$$

Величина I определяется с функциональным произволом.

Случай $\beta = \eta = 0$, $I = I(\alpha, \zeta)$.

$$(15) \Rightarrow r^2 = \alpha^2[I^2 + (t + \zeta)^2], \quad y = -\operatorname{arctg}[It(\zeta t + \zeta^2 + I^2)^{-1}];$$

$$(14) \Rightarrow \rho = t^{-1}(T_1 t + T_0)^{-1},$$

$$T_1 J = \alpha(T - \zeta I_\zeta)(I^2 + \zeta^2)^{-1}(\alpha_\xi \zeta_\eta - \alpha_\eta \zeta_\xi),$$

$$T_1 \zeta \alpha I_\alpha + [T_1(I^2 - \zeta^2) + T_0 \zeta] I_\zeta = I(T_0 - 2T_1 \zeta).$$

Отсюда определяется функция $I = I(t, r, y)$ с функциональным произволом.

$$(16) \Rightarrow u = r(t + \zeta)(I^2 + (t + \zeta)^2)^{-1}, \quad v = -I(I^2 + (t + \zeta)^2)^{-1}, \\ v = rI(I^2 + (t + \zeta)^2)^{-1}, \quad \zeta = -\frac{1}{2}t \pm (\frac{1}{4}t^2 - I^2 - It \operatorname{ctg} y)^{1/2}.$$

Остается рассмотреть возможность $\tilde{w} = 0$ в (10):

$$r = \alpha t + \xi, \quad y = \beta t + \eta; \quad u = \alpha, \quad v = \beta, \quad w = 0.$$

Преобразования 1)–5), продолженные на коэффициенты, образуют транзитивную группу

$$\alpha' = \alpha a^{-1}, \quad \beta' = \beta - c, \quad \xi' = a^{-1}(\xi + \alpha t_0), \quad \eta' = \eta + t_0(\beta - c) - y_0, \\ J' = Jb^{-1}a^{-2}.$$

Этим преобразованием можно фиксировать все коэффициенты: $\alpha = 1$, $\beta = \xi = \eta = 0$, $J = 1$. В лагранжевой замене два параметра остаются произвольными. Получаются лишь следующие непротиворечивые случаи.

$$\text{Случай } \beta = \xi = 0: \quad \rho = t^{-2}, \quad u = rt^{-1}, \quad v = w = 0. \quad (22)$$

$$\text{Случай } \xi = \eta = 0: \quad \rho = t^{-3}, \quad u = rt^{-1}, \quad v = yt^{-1}, \quad w = 0. \quad (23)$$

Итак, решения системы (5), допускающие лагранжеву замену, сводятся к простейшим решениям (18)–(23) с помощью преобразования эквивалентности (17). Решения (18)–(21) допускают увеличение постоянных параметров до пяти преобразованиями допускаемой группы 1)–5). Явная формула для давления получается для политропного газа $A = \gamma p$ из уравнения (4): $p = B\rho^{-\gamma}$.

$$(18) \Rightarrow u = r(t + t_0)^{-1} \sin^2(y - v_0 t + y_0),$$

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_0(t+t_0)^{-1}, \quad p = p_0(t+t_0)^{-\gamma}, \\
v &= v_0 + \frac{1}{2}(t+t_0)^{-1} \sin[2(y-v_0t+y_0)], \\
w &= -\frac{1}{2}(t+t_0)^{-1} \sin[2(y-v_0t+y_0)]; \\
(19) \implies u &= w_0^2 r^{-1}(t+t_0), \quad v = v_0 - w_0 r^{-2}[r^2 - w_0^2(t+t_0)^2]^{1/2}, \\
w &= w_0 r^{-1}[r^2 - w_0^2(t+t_0)^2]^{1/2}, \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0. \\
(20) \implies u &= w_0^2 r^{-1}(t+t_0), \quad w = w_0 r^{-1}[r^2 - w_0^2(t+t_0)^2]^{1/2}, \\
\rho &= \rho_0(t+t_0)^{-1}, \quad p = p_0(t+t_0)^{-\gamma}, \\
v &= (y+y_0)(t+t_0)^{-1} - w_0 r^{-2}[r^2 - w_0^2(t+t_0)^2]^{1/2} \\
&\quad + (t+t_0)^{-1} \arctg[w_0(t+t_0)(r^2 - w_0^2(t+t_0)^2)^{-1/2}]; \\
(21) \implies u &= t(t^2+T_0)^{-1}r^{-1}(r^2+I_0), \\
\rho &= \rho_0(t^2+T_0)^{-1}, \quad p = p_0(t^2+T_0)^{-\gamma}, \\
v &= v_0 - r^{-2}(t^2+T_0)^{-1}(r^2+I_0)^{1/2}(T_0r^2 - I_0t^2)^{1/2}, \\
w &= r^{-1}(t^2+T_0)^{-1}(r^2+I_0)^{1/2}(T_0r^2 - I_0t^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Предъявленные формулы являются простейшими пятипараметрическими семействами решений для системы (3). Для них можно рассмотреть поверхности распространения слабых и сильных разрывов, проводить линеаризацию. Физический смысл полученных решений нужно рассматривать после замены (2). Единственное решение, определенное во всем пространстве при $t > 0$, является решение (18). Для него при $t \rightarrow \infty$ всюду наступает вакуум. Скорость U ограничена, а V, W стремятся к бесконечности при $r \rightarrow \infty$, обеспечивая разлет газа с закручиванием, пропорциональным r .

Институт механики
Уфимского научного центра РАН

Поступило
25.11.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. № 4. С. 30–55.
- [2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.