Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Шабозов, Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 1, 142–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:31:51

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ОДНОВРЕМЕННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ БИЛИНЕЙНЫМИ СПЛАЙНАМИ

М. Ш. Шабозов

1. Пусть $f(x, y)$ – непрерывная в области $G = [0, 1] \times [0, 1]$ функция. Через $C^{(r,s)}(G)$, где r, s – целые неотрицательные числа, обозначим класс функций $f(x, y)$, обладающих непрерывными частными производными $\partial^{i+j} f / \partial x^i \partial y^j$, где $i \leq r, j \leq s$. Далее, при $r = s = 0$ полагаем $C^{(0,0)}(G) = C(G)$ с обычной нормой

$$\|f\|_C = \|f\|_{C(G)} = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in G\}.$$

Специфика двумерного случая позволяет функции $f(x, y) \in C(G)$ сопоставить как полный модуль непрерывности [1, с. 335]:

$$\omega(f; t, \tau) = \sup\{|f(x', y') - f(x'', y'')| : |x' - x''| \leq t, |y' - y''| \leq \tau\},$$

где $(x', y'), (x'', y'') \in G$, так и частные модули непрерывности:

$$\omega(f; t, 0) = \sup\{|f(x', y) - f(x'', y)| : |x' - x''| \leq t, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\omega(f; 0, \tau) = \sup\{|f(x, y') - f(x, y'')| : |y' - y''| \leq \tau, 0 \leq x \leq 1\},$$

характеризующие изменение $f(x, y)$ вдоль каждой переменной.

Обозначим через $W^{(r,s)} H^{\omega_1, \omega_2} = W^{(r,s)} H^{\omega_1, \omega_2}(G)$ класс таких функций $f(x, y) \in C^{(r,s)}(G)$, что для любых двух точек $(x', y'), (x'', y'') \in G$

$$|f^{(r,s)}(x', y') - f^{(r,s)}(x'', y'')| \leq \omega_1(|x' - x''|) + \omega_2(|y' - y''|),$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ – заданные модули непрерывности.

В дальнейшем r и s принимают только значения 0 и 1. Зададим в области G сетку $\Delta_{mn} = \Delta_m^x \times \Delta_n^y$, где $\Delta_m^x: x_i = i/m$ ($i = \overline{0, m}$), $\Delta_n^y: y_j = j/n$ ($j = \overline{0, n}$). Поставим в соответствие каждой функции $f \in C(G)$ функцию $S_{1,1}(f; x, y) \in C(G)$, однозначно определенную условиями:

- 1) на каждой ячейке $G_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) функция $S_{1,1}(f; x, y)$ является алгебраическим многочленом первой степени по x и по y ;
- 2) $S_{1,1}(f; x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$ ($i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n}$).

Функции $S_{1,1}(f; x, y)$ называют *интерполяционными сплайнами первой степени двух переменных* или *билинейными сплайнами* (см. [1], [2]).

Для $(x, y) \in G_{i,j}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) имеет место представление

$$S_{1,1}(f; x, y) = \sum_{p=0}^1 \sum_{k=0}^1 f(x_{i+p-1}, y_{j+k-1}) H_{p,i}(x) H_{k,j}(y),$$

где

$$\begin{aligned} H_{0,i}(x) &= m(x_i - x), & \sum_{p=0}^1 H_{p,i}(x) &\equiv 1, \\ H_{0,j}(y) &= n(y_j - y), & \sum_{k=0}^1 H_{k,j}(y) &\equiv 1. \end{aligned}$$

В дальнейшем полагаем

$$\begin{aligned} F(x_i, y_j) &= \sum_{p=0}^1 \sum_{k=0}^1 (-1)^{p+k} f(x_{i+p-1}, y_{j+k-1}), \\ F_j(x_i, y) &= \sum_{k=0}^1 \sum_{p=0}^1 (-1)^p f(x_{i-p}, y_{j+k-1}) H_{k,j}(y), \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \\ F_i(x, y_j) &= \sum_{p=0}^1 \sum_{k=0}^1 (-1)^k f(x_{i+p-1}, y_{j-k}) H_{p,i}(x), \end{aligned}$$

Ясно, что производные $S_{1,1}^{(r,s)}(f; x, y)$ ($r, s = 0, 1, 1 \leq r + s \leq 2$) на множествах

$$\begin{aligned} A_i &= \{(x, y) : x = x_i, 0 \leq y \leq 1\} \quad (i = \overline{0, m}), \\ B_j &= \{(x, y) : y = y_j, 0 \leq x \leq 1\} \quad (j = \overline{0, n}) \end{aligned}$$

терпят разрывы. Смешанную производную $S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y)$, как и в работе [3], доопределим для всех точек $(x, y) \in G'_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = \overline{1, m-1}, j = \overline{1, n-1}$), полагая $S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y) = mnF(x_{i-1}, y_{j-1})$, а если $(x, y) \in G_{m-1, n-1} = [x_{m-1}, x_m] \times [y_{n-1}, y_n]$, то $S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y) = mnF(x_{m-1}, y_{n-1})$. Положим также: если $(x, y) \in G'_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, 1]$ ($i = \overline{1, m-1}$), то $S_{1,1}^{(1,0)}(f; x, y) = mF_j(x_{i-1}, y)$ ($j = \overline{1, n}$); если $(x, y) \in G_{m-1} = [x_{m-1}, x_m] \times [0, 1]$, то $S_{1,1}^{(1,0)}(f; x, y) = mF_j(x_{m-1}, y)$ ($j = \overline{1, n}$). Аналогично доопределяется и производная $S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y)$.

2. Известно [1, гл. 5], что наличие в приближающем подпространстве сплайнов базиса с локальными носителями обуславливает хорошее приближение интерполяционными сплайнами одновременно и производной интерполируемой функции. В данной работе найдены точные оценки одно-временного приближения функций $f(x, y) \in W^{(r,s)} H^{\omega_1, \omega_2}$ и их производных интерполяционными билинейными сплайнами.

Требуется оценить погрешность

$$|e^{(l,q)}(f; x, y)| \stackrel{\text{def}}{=} |f^{(l,q)}(x, y) - S_{1,1}^{(l,q)}(f; x, y)| \quad (l, q = 0, 1)$$

в каждой точке $(x, y) \in G_{i,j}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) и для $l \leq r, q \leq s$, $1 \leq r + s \leq 2$ найти точное значение величины

$$\varepsilon^{(l,q)}(W^{(r,s)} H^{\omega_1, \omega_2}) = \sup\{\|e^{(l,q)}(f; \cdot, \cdot)\|_C : f \in W^{(r,s)} H^{\omega_1, \omega_2}\}. \quad (1)$$

Порядковые оценки величины, аналогичной (1), но для иных классов функций имеются в монографиях [2, гл. 2], [4] и [5]. Отметим также, что случай $r = s = 0$ рассмотрен в [6], где в предположении выпуклости $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ доказано равенство $\varepsilon(H^{\omega_1, \omega_2}) = \omega_1(1/2m) + \omega_2(1/2n)$, которое является двумерным аналогом результата, полученного в [7].

3. Предварительно докажем одно полезное утверждение.

ЛЕММА. Пусть $f(x, y) \in C(Q)$ ($Q = [a, b] \times [c, d]$) и для любой фиксированной точки $(x_0, y_0) \in Q$ выполняются равенства

$$\int_a^b f(t, y_0) dt = 0, \quad (c \leq y_0 \leq d); \quad \int_c^d f(x_0, \tau) d\tau = 0, \quad (a \leq x_0 \leq b). \quad (2)$$

Тогда для функции

$$F(x, y) = \int_a^x f(t, y_0) dt + \int_c^y f(x_0, \tau) d\tau, \quad (x, y) \in Q, \quad (3)$$

справедливы неувлучшаемые неравенства

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &\leq \frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^2} \int_0^{b-a} \omega(f; t, 0) dt + \frac{(d-y)(y-c)}{(d-c)^2} \int_0^{d-c} \omega(f; 0, \tau) d\tau \\ &\leq \frac{(b-x)(x-a)}{b-a} \omega(f; b-a, 0) + \frac{(d-y)(y-c)}{d-c} \omega(f; 0, d-c). \end{aligned} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $(x, y) \in Q$ и определим функции $\rho(t)$ и $\delta(\tau)$ равенствами

$$g(t) = g(\rho(t)), \quad a \leq t \leq x \leq \rho(t) \leq b, \quad (5)$$

$$q(\tau) = q(\delta(\tau)), \quad c \leq \tau \leq y \leq \delta(\tau) \leq d, \quad (6)$$

где функции $g(t)$ и $q(\tau)$ определены соотношениями

$$g(t) = \int_a^t \varphi(u) du, \quad \varphi(u) = \begin{cases} b - x, & a < u < x, \\ a - x, & x < u < b, \end{cases} \quad (7)$$

$$q(\tau) = \int_c^\tau \psi(v) dv, \quad \psi(v) = \begin{cases} d - y, & c < v < y, \\ c - y, & y < v < d. \end{cases} \quad (8)$$

В [8, с. 95] доказано, что функции $\rho(t)$ и $\delta(\tau)$, определенные в (5) и (6), абсолютно непрерывны и для них почти всюду выполняются равенства

$$\begin{aligned} g'(t) &= g'(\rho(t))\rho'(t), \quad a < t < x, \\ q'(\tau) &= q'(\delta(\tau))\delta'(\tau), \quad c < \tau < y. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) с учетом (7) и (8) следует, что

$$\rho'(t) = \frac{b - x}{a - x}, \quad a < t < x; \quad \delta'(\tau) = \frac{d - y}{c - y}, \quad c < \tau < y.$$

Используя соотношения (2), запишем очевидное равенство

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{b - x}{b - a} \int_a^x f(t, y_0) dt - \frac{x - a}{b - a} \int_x^b f(t, y_0) dt \\ &\quad + \frac{d - y}{d - c} \int_c^y f(x_0, \tau) d\tau - \frac{y - c}{d - c} \int_y^d f(x_0, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Сделав замену $t = \rho(u)$ и $\tau = \delta(v)$ соответственно в промежутках $[x, b]$ и $[y, d]$, имеем:

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &\leq \frac{b - x}{b - a} \int_a^x |f(t, y_0) - f(\rho(t), y_0)| dt \\ &\quad + \frac{d - y}{d - c} \int_c^y |f(x_0, \tau) - f(x_0, \delta(\tau))| d\tau \\ &\leq \frac{b - x}{b - a} \int_a^x \omega(f; \rho(t) - t, 0) dt + \frac{d - y}{d - c} \int_c^y \omega(f; 0, \delta(\tau) - \tau) d\tau \\ &= \frac{(b - x)(x - a)}{(b - a)^2} \int_0^{b-a} \omega(f; t, 0) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(d-y)(y-c)}{(d-c)^2} \int_0^{d-c} \omega(f; 0, \tau) d\tau \\
& \leq \frac{(b-x)(x-a)}{b-a} \omega(f; b-a, 0) + \frac{(d-y)(y-c)}{d-c} \omega(f; 0, d-c).
\end{aligned}$$

На функции $f(x, y) = g_h(x) + q_\eta(y)$ проверяется неухудшаемость неравенств (4) (при малых h и η), где $g_h(x)$ и $q_\eta(y)$ – функции Стеклова для заданных равенствами (7) и (8) функций $g(x)$ и $q(y)$. Лемма доказана.

Если обозначить через $\omega(f; [t_{i-1}, t_i], t, 0)$ и $\omega(f; 0, [\tau_{j-1}, \tau_j], \tau)$ – частные модули непрерывности функции $f(t, \tau) \in C(\overline{G})$, рассматриваемые только на ячейке $G_{i,j} = [t_{i-1}, t_i] \times [\tau_{j-1}, \tau_j]$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), то из доказанной леммы вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $f(t, \tau) \in C^{(1,0)}(G) \cap C^{(0,1)}(G)$ и $S_{1,1}(f; t, \tau)$ – билинейный сплайн, интерполирующий функцию $f(t, \tau)$ в узлах (t_i, τ_j) ($i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n}$) произвольного разбиения $G_{i,j} = [t_{i-1}, t_i] \times [\tau_{j-1}, \tau_j]$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) квадрата G . Тогда в каждой точке $(x, y) \in G_{i,j}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
& |f(x, y) - S_{1,1}(f; x, y)| \\
& \leq \frac{(t_i - x)(x - t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})^2} \int_0^{t_i - t_{i-1}} \omega(f^{(1,0)}; [t_{i-1}, t_i], t, 0) dt \\
& \quad + \frac{(\tau_j - y)(y - \tau_{j-1})}{(\tau_j - \tau_{j-1})^2} \int_0^{\tau_j - \tau_{j-1}} \omega(f^{(0,1)}; 0, [\tau_{j-1}, \tau_j], \tau) d\tau \\
& \leq \frac{(t_i - x)(x - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \omega(f^{(1,0)}; [t_{i-1}, t_i], t_i - t_{i-1}, 0) \\
& \quad + \frac{(\tau_j - y)(y - \tau_{j-1})}{\tau_j - \tau_{j-1}} \omega(f^{(0,1)}; 0, [\tau_{j-1}, \tau_j], \tau_j - \tau_{j-1}),
\end{aligned}$$

неухудшаемые на всем множестве $C^{(1,0)}(G) \cap C^{(0,1)}(G)$.

Положим

$$\begin{aligned}
\Omega(\omega_1, \omega_2) = \{f : f \in C^{(1,0)}(G) \cap C^{(0,1)}(G), \\
\omega(f^{(1,0)}; t, 0) \leq \omega_1(t), \omega(f^{(0,1)}; 0, \tau) \leq \omega_2(\tau)\}.
\end{aligned}$$

Тогда при равномерном разбиении $(x_i, y_j) = (i/m, j/n)$ ($i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n}$) в силу доказанной леммы для функций $f(x, y) \in \Omega(\omega_1, \omega_2)$ в точке $(x, y) \in$

$\{x_{i-1} < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j\}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f(x, y) - S_{1,1}(f; x, y)| &\leq m^2(x_i - x)(x - x_{i-1}) \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt \\ &\quad + n^2(y_j - y)(y - y_{j-1}) \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau \\ &= H_{0,i}(x)H_{1,i}(x) \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt \\ &\quad + H_{0,j}(y)H_{1,j}(y) \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Из неравенства (10) сразу вытекает

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ – произвольные выпуклые модули непрерывности. Тогда для любых m и n справедливо равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Omega(\omega_1, \omega_2)) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\|e(f; \cdot, \cdot)\|_C : f \in \Omega(\omega_1, \omega_2)\} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Если же $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ – произвольные модули непрерывности, то

$$\varepsilon(\Omega(\omega_1, \omega_2)) = \frac{\theta_\omega}{4} \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + \frac{\theta_\omega}{4} \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau \quad (2/3 \leq \theta_\omega \leq 1). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\begin{aligned} \max\{H_{0,i}(x)H_{1,i}(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ = \max\{H_{0,j}(y)H_{1,j}(y) : y \in [y_{j-1}, y_j]\} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

то из (11) для любого $(x, y) \in G_{i,j}$ имеем

$$|e_{i,j}(f; x, y)| \leq \frac{1}{4} \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(\Omega(\omega_1, \omega_2)) \leq \frac{1}{4} \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau. \quad (13)$$

До сих пор на $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ не накладывалось никаких ограничений. Считая теперь $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ выпуклыми модулями непрерывности, докажем,

что в (13) имеет место знак равенства. С этой целью зададим соответственно на $[0, 1/m]$ и $[0, 1/n]$ две функции:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega_1\left(\frac{1}{m} - 2t\right), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2m}, \\ -\frac{1}{2}\omega_1\left(2t - \frac{1}{m}\right), & \frac{1}{2m} \leq t \leq \frac{1}{m}; \end{cases}$$

$$\psi_0(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega_2\left(\frac{1}{n} - 2\tau\right), & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2n}, \\ -\frac{1}{2}\omega_2\left(2\tau - \frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \leq \tau \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Для $t \in [1/m, 1/2m]$ положим $\varphi_0(t) = \varphi_0(2/m - t)$ и продолжим функцию $\varphi_0(t)$ периодически с периодом $2/m$ на всю ось. Аналогично с периодом $2/n$ продолжим на всю ось функцию $\psi_0(\tau)$. Наконец, положим

$$f_0(x, y) = \int_0^x \varphi_0(t) dt + \int_0^y \psi_0(\tau) d\tau, \quad (x, y) \in G.$$

Очевидно, что $f_0 \in \Omega(\omega_1, \omega_2)$. Кроме того

$$\begin{aligned} \|f_0(\cdot, \cdot) - S_{1,1}(f_0; \cdot, \cdot)\|_C &= \|f_0(\cdot, \cdot)\|_C \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2m} \omega_1\left(\frac{1}{m} - 2t\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^{1/2n} \omega_2\left(\frac{1}{n} - 2\tau\right) d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом доказано, что для выпуклых модулей непрерывности $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ неравенство (13) обращается в равенство. Если же $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ — произвольные модули непрерывности, то будем полагать $\varphi_1(t) = \frac{2}{3}\varphi_0(t)$, $\psi_1(\tau) = \frac{2}{3}\psi_0(\tau)$. Тогда функция

$$f_1(x, y) = \int_0^x \varphi_1(t) dt + \int_0^y \psi_1(\tau) d\tau, \quad (x, y) \in G,$$

принадлежит классу $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ [9, с. 24]. Однако в этом случае

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Omega(\omega_1, \omega_2)) &\geq \|f_1(\cdot, \cdot) - S_{1,1}(f_1; \cdot, \cdot)\|_C = \|f_1(\cdot, \cdot)\|_C \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует (12), чем и завершается доказательство теоремы 1.

Сопоставляя неравенства (13) и (14), получаем

СЛЕДСТВИЕ. Для любых модулей непрерывности $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ справедливо неравенство

$$\frac{2}{3} \mathcal{J}_{m,n}(\omega_1, \omega_2) \leq \varepsilon(\Omega(\omega_1, \omega_2)) \leq \mathcal{J}_{m,n}(\omega_1, \omega_2),$$

где

$$\mathcal{J}_{m,n}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4} \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ – произвольные модули непрерывности. Тогда для любых m и n имеет место равенство

$$\varepsilon^{(1,1)}(W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}) = m \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + n \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся интегральным представлением погрешности, полученным в [3],

$$\begin{aligned} e_{i,j}^{(1,1)}(f; x, y) &= f^{(1,1)}(x, y) - S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y) \\ &= \sum_{p=0}^1 \sum_{k=0}^1 H_{p,i}(x) H_{k,j}(y) \int_0^1 \int_0^1 [f^{(1,1)}(x, y) - \\ &\quad - f^{(1,1)}(x + t(x_{i+p-1} - x), y + \tau(y_{j+k-1} - y))] dt d\tau, \\ &\quad (x, y) \in G_{i,j} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (15)$$

Оценивая равенство (15) по абсолютной величине и имея ввиду, что $f(x, y) \in W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}$, имеем

$$|e_{i,j}^{(1,1)}(f; x, y)| \leq \Phi_{i,j}(x, y), \quad (x, y) \in G_{i,j} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}), \quad (16)$$

где

$$\Phi_{i,j}(x, y) = m \sum_{p=0}^1 \int_0^{m^{-1}H_{p,i}(x)} \omega_1(t) dt + n \sum_{k=0}^1 \int_0^{n^{-1}H_{k,j}(y)} \omega_2(\tau) d\tau.$$

Очевидно, что

$$\max\{\Phi_{i,j}(x, y) : (x, y) \in G_{i,j}\} = m \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + n \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau. \quad (17)$$

В силу (16) и (17) запишем оценку сверху

$$\varepsilon^{(1,1)}(W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}) \leq m \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + n \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau.$$

Положим

$$f_2(x, y) = y \int_0^x \varphi_2(t) dt + x \int_0^y \psi_2(\tau) d\tau, \quad (x, y) \in G,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \omega_1((-1)^i(1/m - x)) - m \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt, \\ &\quad x \in [i/m, (i+1)/m] \quad (i = 0, 1), \\ \psi_2(y) &= \omega_2((-1)^j(1/n - y)) - n \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau, \\ &\quad y \in [j/n, (j+1)/n] \quad (j = 0, 1), \\ \varphi_2(x + 2/m) &= \varphi_2(x), \quad \psi_2(y + 2/n) = \psi_2(y). \end{aligned} \quad (18)$$

Ясно, что функция $f_2(x, y) \in W^{(1,1)} H^{\omega_1, \omega_2}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\|e^{(1,1)}(f_2; \cdot, \cdot)\|_C = \|f_2^{(1,1)}(\cdot, \cdot)\|_C = m \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + n \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau.$$

Теорема 2 доказана.

Теоремы 1 и 2 в некотором смысле являются двумерными аналогами основных результатов работ [7] и [8]. Рассмотрим еще вопрос о приближении частных производных $f^{(1,0)}(x, y)$ и $f^{(0,1)}(x, y)$ соответствующими производными $S_{1,1}^{(1,0)}(f; x, y)$, $S_{1,1}^{(0,1)}(f; x, y)$ билинейного сплайна.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\omega_1(t)$ – произвольный, а $\omega_2(\tau)$ – выпуклый модуль непрерывности. Тогда имеет место равенство

$$\varepsilon^{(1,0)}(W^{(1,0)} H^{\omega_1, \omega_2}) = m \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + \omega_2(1/2n). \quad (19)$$

Если же $\omega_1(t)$ – выпуклый, $\omega_2(\tau)$ – произвольный модуль непрерывности, то

$$\varepsilon^{(0,1)}(W^{(0,1)} H^{\omega_1, \omega_2}) = \omega_1(1/2m) + n \int_0^{1/n} \omega_2(\tau) d\tau. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства (19) и (20) доказываются одинаково, поэтому докажем только (19). Используя определение и свойства разделенных разностей функции $f(x, y)$ (см., например, [11]), находим

$$\begin{aligned} e_{i,j}^{(1,0)}(f; x, y) &= f^{(1,0)}(x, y) - S_{1,1}^{(1,0)}(f; x, y) = f^{(1,0)}(x, y) - m F_j(x_i, y) \\ &= f^{(1,0)}(x, y) - m \sum_{k=0}^1 H_{k,j}(y) [f(x_i, y_{j+k-1}) - f(x_{i-1}, y_{k+j-1})] \\ &= f^{(1,0)}(x, y) - \sum_{p=0}^1 \sum_{k=0}^1 H_{p,i}(x) H_{k,j}(y) f(x_{i+p-1}, x; y_{j+k-1}), \\ &\quad (x, y) \in G_{i,j} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (21)$$

Представляя разделенно-разностные отношения в интегральной форме, перепишем (21) в следующем виде

$$\begin{aligned} e_{i,j}^{(1,0)}(f; x, y) &= \sum_{p=0}^1 \sum_{k=0}^1 H_{p,i}(x) H_{k,j}(y) \\ &\quad \times \int_0^1 [f^{(1,0)}(x, y) - f^{(1,0)}(x + t(x_{i+p-1} - x); y_{j+k-1})] dt. \end{aligned}$$

Отсюда в силу принадлежности $f(x, y)$ классу $W^{(1,0)}H^{\omega_1, \omega_2}$ имеем

$$|e_{i,j}^{(1,1)}(f; x, y)| \leq m \sum_{p=0}^1 \int_0^{m^{-1}H_{p,i}(x)} \omega_1(t) dt + \sum_{k=0}^1 H_{k,j}(y) \omega_2(|y - y_{j+k-1}|) \equiv \Phi(x) + F(y). \quad (22)$$

Непосредственным вычислением находим:

$$\max\{\Phi(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = m \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt. \quad (23)$$

В силу выпуклости $\omega_2(\tau)$ и тождества $\sum_{k=0}^1 H_{k,j}(y) \equiv 1$, для функции $F(y)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} F(y) &= \sum_{k=0}^1 H_{k,j}(y) \omega_2(|y - y_{j+k-1}|) \\ &= H_{0,j}(y) \omega_2(y - y_{j-1}) + H_{1,j}(y) \omega_2(y_j - y) \\ &\leq \omega_2[H_{0,j}(y)(y - y_{j-1}) + H_{1,j}(y)(y_j - y)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Но для функции $\lambda(y) = H_{0,j}(y)(y - y_{j-1}) + H_{1,j}(y)(y_j - y)$,

$$\max\{\lambda(y) : y \in [y_{j-1}, y_j]\} = \lambda\left(\frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) = \frac{1}{2n},$$

а потому из (24) следует, что

$$\max\{F(y) : y \in [y_{j-1}, y_j]\} \leq \omega_2(1/2n).$$

В качестве экстремальной рассмотрим функцию

$$f_3(x, y) = \int_0^x \varphi_2(t) dt + x\psi_3(y), \quad (x, y) \in G,$$

где $\varphi_2(x)$ – функция, определенная равенством (18), а $\psi_3(y)$ определяется следующим образом:

$$\psi_3(y) = \begin{cases} \omega_2(y - y_{j-1}), & y_{j-1} \leq y \leq y_{j-1} + \frac{1}{2n}, \\ \omega_2(y_j - y), & y_{j-1} + \frac{1}{2n} \leq y \leq y_j, \end{cases} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Легко проверить, что $f_3(x, y) \in W^{(1,0)}H^{\omega_1, \omega_2}$, и так как

$$\|e^{(1,0)}(f_3; \cdot, \cdot)\|_C = \|f_3^{(1,0)}(\cdot, \cdot)\|_C = m \int_0^{1/m} \omega_1(t) dt + \omega_2(1/2n),$$

то равенство (19) и вместе с ним теорема 3 доказаны.

Автор благодарен Н. П. Корнейчуку за консультации и полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корнейчук Н. П. Сплаины в теории приближения. М.: Наука, 1984.
- [2] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
- [3] Вакарчук С. Б. К интерполяции билинейными сплайнами // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 5. С. 26–29.
- [4] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.
- [5] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплаины в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
- [6] Сторчай В. Ф. Приближение функций двух переменных многогранными функциями в равномерной метрике // Изв. вузов. Матем. 1973. № 8. С. 84–88.
- [7] Малозёмов В. Н. Об отклонении ломаных // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астроном. 1966. № 7. С. 150–153.
- [8] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
- [9] Степанец А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев: Наукова думка, 1981.
- [10] Малозёмов В. Н. К полигональной интерполяции // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 5. С. 537–540.
- [11] Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. М.: Гостехиздат, 1953.